給同學的話

　　數學能解決日常生活中有關數、量、形的問題，因此才被列入中學的重要課程。

　　數學的學習至少包括兩個重點，一是基本概念的建立，一是計算程序的熟練，二者缺一不可。如果同學只是記住計算程序，並且反覆練習，在小範圍的考試時可能有效。但到高中之後，教材內容加深、加廣，變得抽象而複雜時，就學不下去了。

　　主動學習、專注聽講、適時演算、樂於思考解題，是學習數學的不二法門。能做到這幾點，相信您一定可以學好數學。

人物介紹

博士

數學狂熱者，擅長將數學套入各種生活情境中。

傑克

幽默風趣愛搞笑，喜歡出風頭。

威利

個性憨厚，但其實是電玩高手，號稱電玩狂人。

安琪

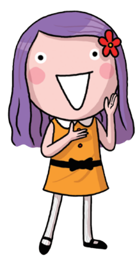
個子嬌小天真爛漫，有點小迷糊，愛問問題，心中永遠有十萬個為什麼？

妙麗

數學一級棒，說起話來很犀利，是博士的得力小助手。

洛基

喜歡吃美食，但又愛漂亮，藉由運動維持好身材。



艾美

外表是氣質美少女，但是愛耍冷，喜歡各種藝術類活動。

國民中學

數學 第四冊

目次

Contents

2下

課中標示說明

學習前哨站

診斷學生是否已建立先備知識。

1 學習主題

根據該節主題切割成若干教學活動，以利同學形成階段性的數學觀念，並穩固學習的內涵。

議題

在課程內容中融入各項議題，培養學生批判思考及解決問題的能力。

例1 教學例題

與課文相關的基本題目，以實例產生呼應或作為對照說明。附有詳解，並於題號旁標示其題目類型。

探索活動

透過步驟化的學習，加強同學的思考邏輯能力，並能觀察出數學的原理原則。

跨領域

數學的應用是跨領域的，結合其他科目的學習，幫助學生統整所學。

補給站

提供與前面內容所提到的數學相關之延伸或生活常識補充，作為同學延伸思考及課外參考資料。

Thinking 動動腦

將特別值得同學思索及探討的問題，用另一個段落來呈現，以便和課文與例題有所區隔。

計算機

搭配計算機的使用教學，培養學生使用計算機的正確態度。看到計算機圖示，代表可使用計算機協助計算。

課後標示說明

隨堂練習
通常於例題之後，安排相同類型的練習題目，以增加同學自我演算練習的機會。不附解答。

補充說明
於學習內容或例題中，針對較為困難或易產生錯誤的地方，作為提示或提醒學生注意。

重點摘要
於一段概念學習之後，將其重點條列化整理，讓同學能更容易掌握學習重點。

重點回顧
將該節中重要的學習內容，作條列化的統整，方便同學作有系統的複習。

自我評量
每一節後面均安排相關的複習題目，以利於該節結束時，可以加強演練。

自我挑戰
本單元為統整課程，由學生自行挑戰，教師視班級情況決定如何運用。

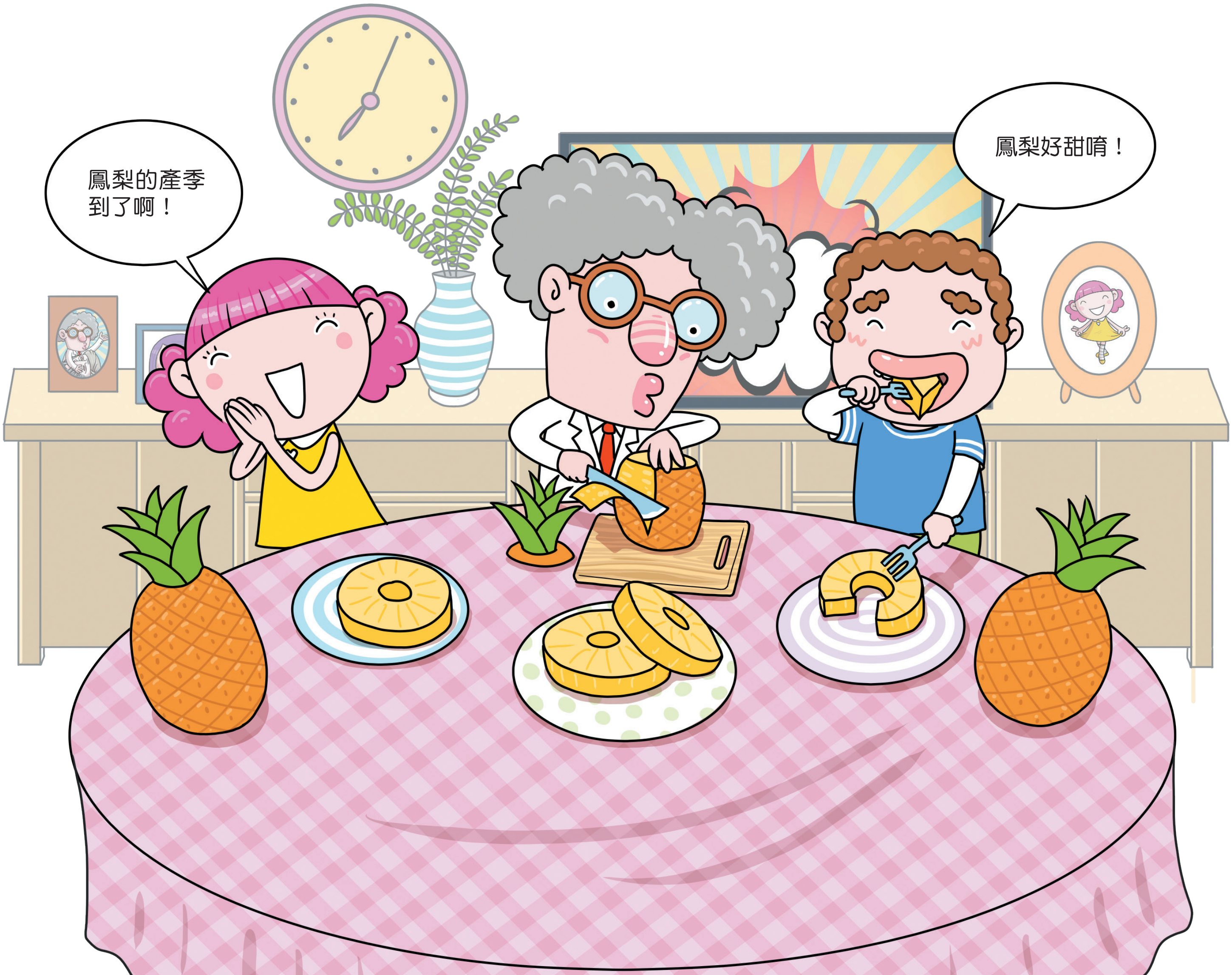
數學萬花筒
提供與該章節相關的補充知識等，作為課外的參考資料。

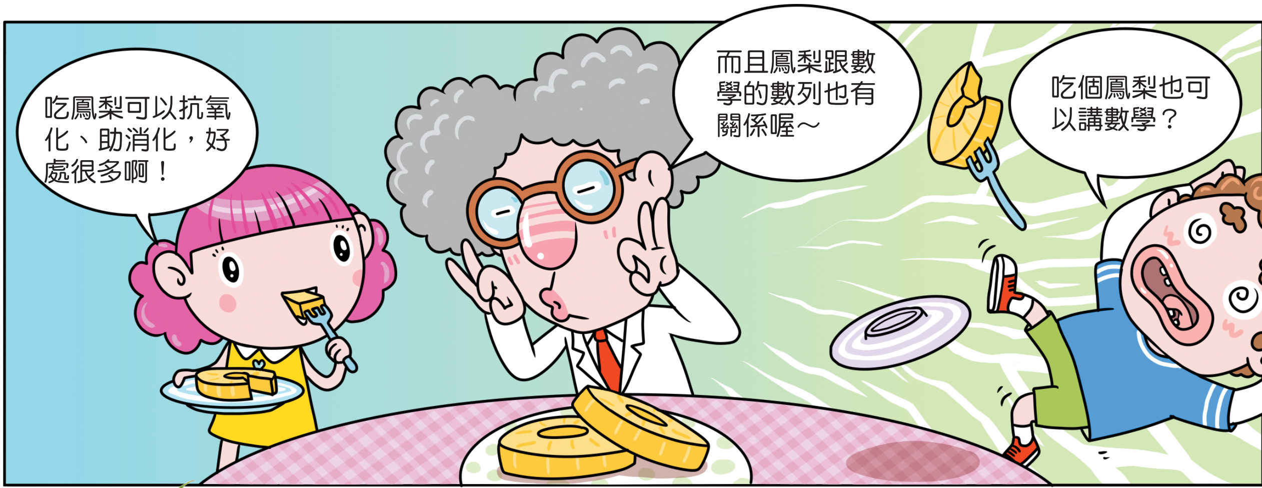
附件標示說明

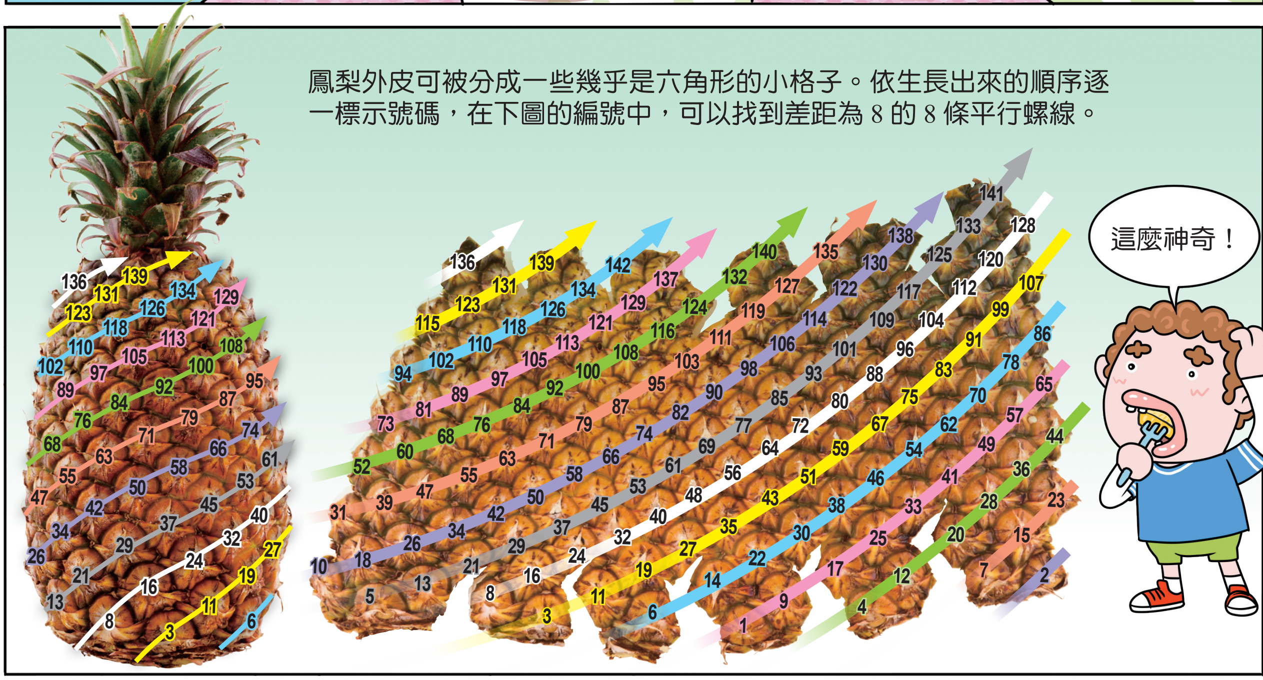
秒懂數學
當冊知識重點自我檢測，掌握國中所學數學概念。

教學附件
配合課本教學內容，透過附件實際操作，動手也動腦，加深學習成效。

1 數列與級數







關於費氏數列參考 P9 補給站、費氏數列與鳳梨的關係參考 P47 數學萬花筒。

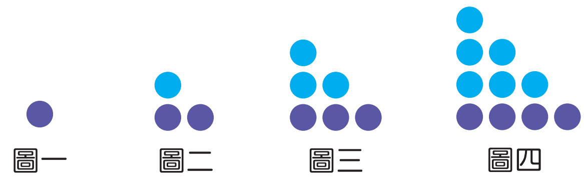
學習前哨站

本單元為學生自我複習，
教師可視班級情況決定如何運用。

回顧 1 數形關係

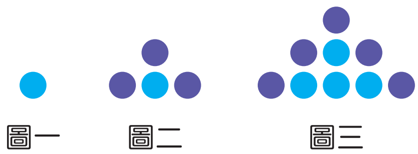
國小 4 年級

右圖存在某種規律：圖二比圖一多 2 個點，圖三比圖二多 3 個點，……，依照圖一、二、三的規律，圖四的圖形如右：



課前練習

依照右圖的規律，
畫出圖四的排列：



回顧 2 解一元一次方程式

7 上第 3 章

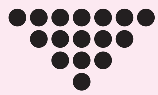
解一元一次方程式 $4(x-1)=2(x+1)$ 時，可先將等號兩邊去括號整理後，再移項求得 x 值，如右所示。

$$\begin{aligned} 4(x-1)&=2(x+1)\\ 4x-4&=2x+2\\ 4x-2x&=2+4\\ 2x&=6\\ x&=3 \end{aligned}$$

課前練習

解一元一次方程式 $5-3(x-1)=-22$。

解答：1.



2. $x=10$

1-1 數列

1 認識數列

班次	臺北車站北三門發車時間
1	11：00
2	12：00
3	13：00
4	14：00
5	15：00
6	16：00
7	21：00
8	22：00

右表是新北市免費公車明志線 F216 例假日的班次時刻表，其中臺北車站北三門的發車時間都是整點，可以簡記為：11 , 12 , 13 , 14 , 15 , 16 , 21 , 22 。像這樣將數排成一列，並以逗點分開，稱為**數列**。

在上面的數列中：

11 稱為這個數列的**第 1 項或首項**，通常記為 a_1；

12 稱為這個數列的第 2 項，記為 a_2；

13 稱為這個數列的第 3 項，記為 a_3；

⋮

這個數列的第 n 項，記為 a_n；**而數列中的最後一項稱為末項**。

隨堂練習

數列 1 , 3 , 5 , 7 , 9 , 11 , 13 中，

第 1 項 a_1＝________，第 2 項 a_2＝________，第 3 項 a_3＝________，

第 4 項 a_4＝________，第 7 項 a_7＝________。

數列可能具有某種規律。例如：

(1)洛基走在中山路，觀察到商店街的門牌號碼如下：

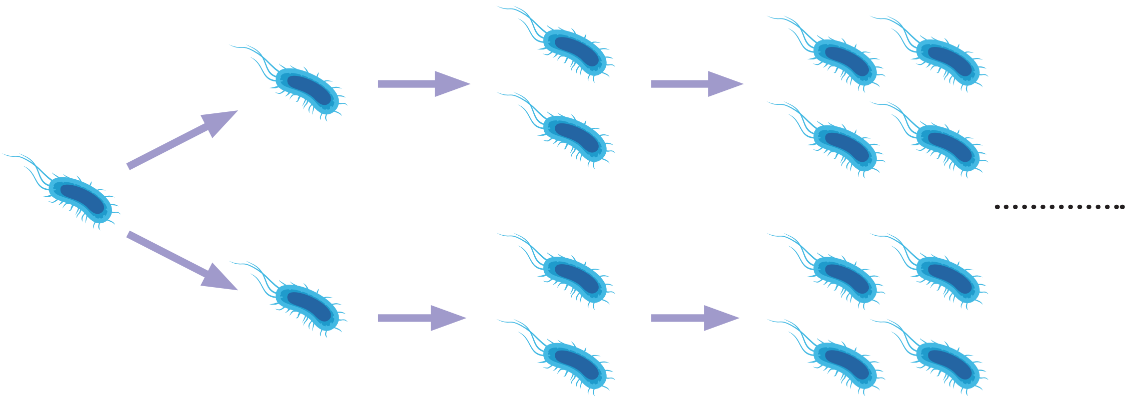
20 , 22 , 24 , 26 , 28 , 30 , ……，

可以發現這個數列的規律是：相鄰兩項中，後一項等於前一項加 2。

$$20 \underset{+2}{\curvearrowright} 22 \underset{+2}{\curvearrowright} 24 \underset{+2}{\curvearrowright} 26 \underset{+2}{\curvearrowright} 28 \underset{+2}{\curvearrowright} 30 , \cdots\cdots$$

(2)若每分鐘某細菌 1 個會分裂為 2 個，依此方式持續分裂，觀察細菌的數目如下：

1 , 2 , 4 , 8 , ……。



1 分鐘後 $1\times2=2^1$ $=2$（個）

2 分鐘後 $1\times2\times2=2^2$ $=4$（個）

3 分鐘後 $1\times2\times2\times2=2^3$ $=8$（個）

……

10 分鐘後 2^{10} $=1024$（個）

可以發現這個數列的規律是：相鄰兩項中，後一項等於前一項乘以 2。

$$1 \underset{\times2}{\curvearrowright} 2 \underset{\times2}{\curvearrowright} 4 \underset{\times2}{\curvearrowright} 8 \underset{\times2}{\curvearrowright} \cdots\cdots \underset{\times2}{\curvearrowright} 1024$$

隨堂練習

已知下列各數列分別隱含某種規律，依其規律在空格中填入適當的數。

(1) 22 , 18 , 14 , ________ , 6 , 2

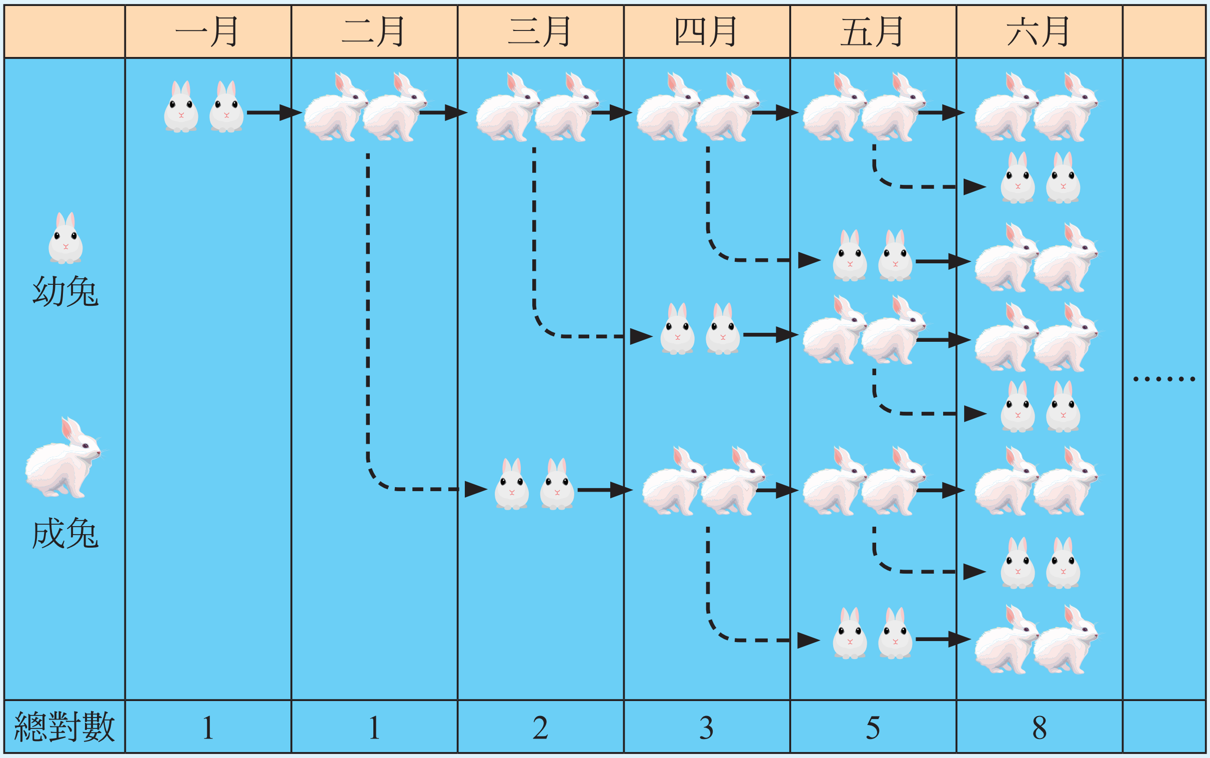
(2) 128 , 64 , ________ , ________ , 8 , 4 , 2 , 1

(3) 1 , 8 , 27 , ________ , 125 , 216

(4) 2 , 2 , 4 , 6 , 10 , 16 , ________ , 42

補給站　費波那契數列

義大利數學家費波那契（*Leonardo Pisano Fibonacci*，1170-1250）在他所著的《計算書》（*Liber Abaci*）中，提出一個有趣的問題：「某人養了一對幼兔（雌雄各一），假設幼兔經過一個月就能完全長成成兔，此後每經過一個月便可以生一對幼兔，在持續生育且皆不死亡的理想狀況下，兔子的對數呈現什麼情形呢？」



從上面的說明可以得到兔子的對數依次為 1，1，2，3，5，8，……，這些數形成一個數列，稱為**費氏數列**（*Fibonacci sequence*）。

所以這個數列的規律是：從第 3 項開始，每一項等於前二項的和。

第 1 項 $a_1=1$

第 2 項 $a_2=1$

第 3 項 $a_3=2=1+1\ (a_3=a_1+a_2)$

第 4 項 $a_4=3=1+2\ (a_4=a_2+a_3)$

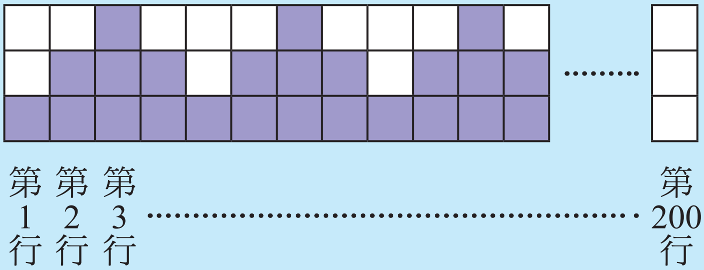
第 5 項 $a_5=5=2+3\ (a_5=a_3+a_4)$

第 6 項 $a_6=8=3+5\ (a_6=a_4+a_5)$

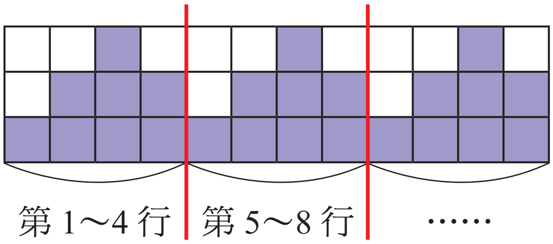
$\vdots$

例 1 觀察規律

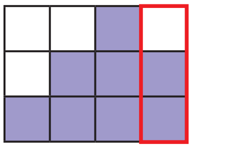
艾美將方格有規律的著色，作為教室布置的邊框，依圖形的規律，在第 200 行中畫出其圖樣。



解 觀察圖形第 5～8 行，發現它們與第 1～4 行相同，因此每 4 行一數，如右圖。

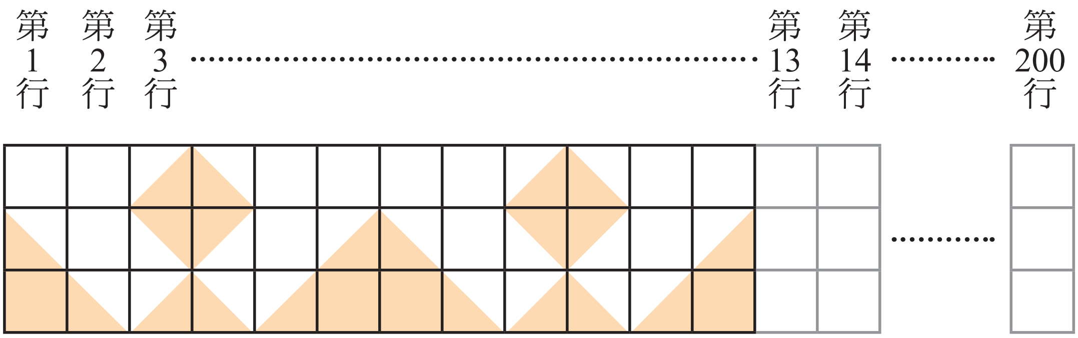


因為 $200 \div 4 = 50$，剛好整除，所以第 200 行會與第 4 行相同，即第 200 行的圖形如右圖。



隨堂練習

依下面圖形的規律，在第 13 行、第 14 行及第 200 行中畫出其圖樣。



有些具有規律的數列，其第 n 項 a_n 可用含有未知數 n 的式子表示，例如：

⑴從 1 開始的連續正整數的倒數所形成的數列如下：

$\frac{1}{1}$，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{4}$，……

第 1 項	第 2 項	第 3 項		第 n 項
a_1	a_2	a_3	………	a_n
$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{n}$

⑵從 2 開始的連續正偶數所形成的數列如下：

2，4，6，8，……

第 1 項	第 2 項	第 3 項		第 n 項
a_1	a_2	a_3	………	a_n
2	4	6		$2n$
2×1	2×2	2×3		$2\times n$

像這類具有規律的數列，如果能寫出第 n 項的表示式，就可以找到該數列的任意一項。上述例 ⑵ 中，第 n 項 $a_n=2n$ 稱為此數列的**一般項**。

若要求第 99 項 a_{99}，只要在 $a_n=2n$ 的式子中，n 以 99 代入即可求得：

$a_{99}=2\times99=198$。

隨堂練習

1. 右表各項是由底數為 2，指數從 1 開始的連續正整數所形成的數列，寫出第 n 項。

第 1 項	第 2 項	第 3 項		第 n 項
a_1	a_2	a_3	……	a_n
2^1	2^2	2^3		?

2. 右表各項是由 1，3，5，……的正奇數所形成的數列。
   ⑴寫出第 n 項。
   ⑵第 100 項是多少？

第 1 項	第 2 項	第 3 項		第 n 項
a_1	a_2	a_3	……	a_n
$1=2\times1-1$	$3=2\times2-1$	$5=2\times3-1$		?

例2 求第 n 項

已知某數列的第 n 項 $a_n=n(n+1)$，

(1)求此數列的前 3 項。

(2)求此數列的第 20 項。

(3)若此數列的第 k 項為 42，求 k。

解

(1) $a_1=1\times(1+1)=2$，

$a_2=2\times(2+1)=6$，

$a_3=3\times(3+1)=12$。

此數列的前 3 項分別為 2 , 6 , 12。

(2) $a_{20}=20\times(20+1)=420$。

第 20 項為 420。

(3) $a_k=42$，

$k(k+1)=42$

$k^2+k-42=0$

$(k-6)(k+7)=0$

$k=6$ 或 -7（負不合）

所以 $k=6$。

隨堂練習

已知某數列的第 n 項 $a_n=3n-37$，

(1)求此數列的前 3 項。

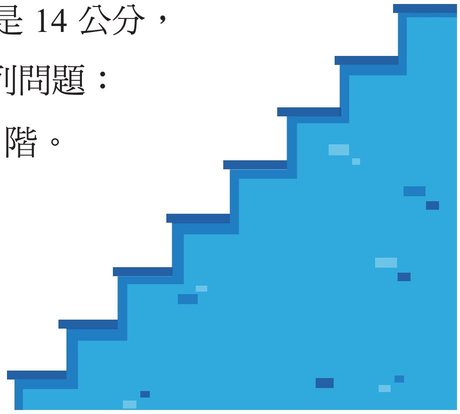
(2)求此數列的第 30 項。

(3)若此數列的第 k 項為 263，求 k。

2 等差數列

探索活動 等差數列

自強樓樓梯從一樓上到二樓，第 1 階離地面的高度是 14 公分，相鄰兩階的高度差(階梯高)都是 16 公分，回答下列問題：



(1)從站在第 1 階往上走到第 6 階，共走了 ________ 階。

(2)第 1 階是 14 公分，
第 2 階是 30 公分，
第 3 階是 46 公分，
第 4 階是 ______ 公分，
第 5 階是 ______ 公分，
第 6 階是 ______ 公分。

(3)從第 1 階走到第 13 階，共走了 ______ 個階梯，
第 13 階離地面 ______ 公分。

由 探索活動 可知，每一階離地面的高度形成一個數列，其中：

第 1 項 $a_1=14$
第 2 項 $a_2=30$
第 3 項 $a_3=46$
第 4 項 $a_4=62$
⋮

$$14 \underbrace{,}_{+16} 30 \underbrace{,}_{+16} 46 \underbrace{,}_{+16} 62 \underbrace{,}_{+16} 78 \underbrace{,}_{+16} 94$$

這個數列的每一項都是前一項加 16，就另一個觀點，此數列的後項減去前項都等於 16，即 $a_2-a_1=a_3-a_2=a_4-a_3=a_5-a_4=\cdots\cdots=a_n-a_{n-1}=16$。

像這樣，在一個數列中，任意相鄰兩項「後項減去前項所得的差」都相同，稱為**等差數列**，這個差稱為**公差**，通常用 d 表示。

46，25，38，21，12，9，觀察此數列的變化，哪一個數字應該被拿走？

等差數列前後項關係

1. 一個數列 $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \cdots\cdots, a_{n-1}, a_n$，
   若 $a_2-a_1=a_3-a_2=a_4-a_3=a_5-a_4=\cdots\cdots=a_n-a_{n-1}=d$，
   則此數列是公差為 d 的等差數列。
2. 等差數列中，公差＝後項－前項，即 $d=a_n-a_{n-1}$。

公差 d 也可以是負數，例如：安琪帶了 300 元去 10 元商品店（每件物品都是 10 元）買東西，如果買 1 件，就會剩下 290 元；買 2 件，剩下 280 元；買 3 件，剩下 270 元；買 4 件 ，剩下 260 元 ⋯⋯。

290 , 280 , 270 , 260 , ⋯⋯

－10　－10　－10　－10

公差 $d=280-290=270-280=260-270=\cdots\cdots=-10$。

例 3 判別等差數列

自評 P31 第 1 題 (1)

判別下列各數列是否為等差數列。如果是，寫出該數列的公差。

(1) 7 , 4 , 1 , －2 , －5 , －8　　(2) －3 , －3 , －3 , －3 , －3

解

(1) 7 , 4 , 1 , －2 , －5 , －8

－3　－3　－3　－3　－3

相鄰兩項中，後項減前項的差都是－3，所以這是等差數列，公差為－3。

(2) －3 , －3 , －3 , －3 , －3

0　0　0　0

相鄰兩項中，後項減前項的差都是 0，所以這是等差數列，公差為 0。

Thinking

如果等差數列的公差為負數時，則此數列的各項是否會愈來愈小？

隨堂練習

判別下列各數列是否為等差數列。如果是，寫出該數列的公差。

(1) 1 , 0 , 1 , 0 , 1 , 0　　(2) -8 , -3 , 2 , 7 , 12 , 17

等差數列的各項及公差並不限於整數，也可能是分數、小數、含有根號的數或文字符號。

例4 利用公差完成數列

在下列空格中填入適當的數，使得各數列成為等差數列。

(1)______ , 15 , 18 , 21 , ______　(2)______ , $3a+2b$, $5a-b$, ______ , $9a-7b$

解

(1)公差 $d=18-15=3$，且 $a_2=15$，$a_4=21$。

$a_1=a_2-d=15-3=12$，

$a_5=a_4+d=21+3=24$，

因此，等差數列為 12 , 15 , 18 , 21 , 24。

? , 15 , 18 , 21 , ?

+3　+3　+3　+3

(2)$a_2=3a+2b$，$a_3=5a-b$，所以公差 $d=(5a-b)-(3a+2b)=2a-3b$

$a_1=a_2-d=(3a+2b)-(2a-3b)=a+5b$，

$a_4=a_3+d=(5a-b)+(2a-3b)=7a-4b$，

因此，等差數列為 $a+5b$, $3a+2b$, $5a-b$, $7a-4b$, $9a-7b$。

隨堂練習

完成下列各等差數列，並寫出公差。

(1) -2 , 3 , ______ , ______ , ______ ，公差為 ______ 。

(2) ______ , ______ , $3\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$, ______ ，公差為 ______ 。

(3) $5b$, $3b$, ______ , ______ , ______ ，公差為 ______ 。

解答：25。（每一項的十位數成等差）

從自強樓樓梯的一樓走到二樓時，每一階樓梯離地面的高度是 14，30，46，62，78，……，這些數形成一個數列，我們先觀察數列中各項與首項及公差的關係：

$30=a_2=14+1\times 16$（首項加 1 個公差）

$46=a_3=14+2\times 16$（首項加 2 個公差）

$62=a_4=14+3\times 16$（首項加 3 個公差）

$78=a_5=14+4\times 16$（首項加 4 個公差）

$$\begin{array}{ccccccccccc} a_1 & , & a_2 & , & a_3 & , & a_4 & , & a_5 & \cdots\cdots \\ 14 & & 30 & & 46 & & 62 & & 78 & \\ & +16 & & +16 & & +16 & & +16 & & \end{array}$$

公差 $d=30-14=46-30=62-46=78-62=\cdots\cdots=16$。

Thinking

第 12 階樓梯離地面的高度等於第 1 階的高度再加多少個階梯的高度？

設首項為 a_1，公差為 d 的等差數列，各項與首項及公差的關係如下：

$a_2=a_1+1\times d$（首項加 1 個公差）

$a_3=a_1+2\times d$（首項加 2 個公差）

$a_4=a_1+3\times d$（首項加 3 個公差）

$a_5=a_1+4\times d$（首項加 4 個公差）

$\vdots$

$a_n=a_1+(n-1)\times d$（首項加 $n-1$ 個公差）

$$\begin{array}{cccccccccccccc} a_1 & , & a_2 & , & a_3 & , & a_4 & , & a_5 & , & \cdots\cdots & , & a_n \\ & +d & & +d & & +d & & +d & & & & +d & \end{array}$$

等差數列第 n 項公式

如果一個等差數列的首項為 a_1，公差為 d，

則第 n 項為 $a_n=a_1+(n-1)d$，也稱為此等差數列的一般項。

例5 求公差與首項

1. 已知一個等差數列的首項為 30，第 16 項為 -15，求此等差數列的公差。
2. 已知一個等差數列的第 16 項為 10，公差為 $\frac{2}{3}$，求此等差數列的首項。

解

1. $a_1=30$，$a_{16}=-15$，$n=16$，
   代入公式 $a_n=a_1+(n-1)d$ 得
   $-15=30+(16-1)\times d$，
   $-45=15d$，$d=-3$，
   此等差數列的公差為 -3。

a_n	$=$	a_1	$+$	$(n-1)$	d
↑ -15		↑ 30		↑ 16	↑ ?

2. $a_{16}=10$，$n=16$，$d=\frac{2}{3}$，
   代入公式 $a_n=a_1+(n-1)d$ 得
   $10=a_1+(16-1)\times\frac{2}{3}$，$a_1=0$，
   此等差數列的首項為 0。

a_n	$=$	a_1	$+$	$(n-1)$	d
↑ 10		↑ ?		↑ 16	↑ $\frac{2}{3}$

隨堂練習

自評 P31 第 2 題

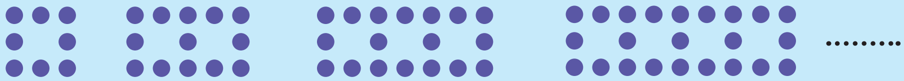
1. 已知等差數列的首項為 -9，第 6 項為 11，求此等差數列的公差及第 11 項。
2. 已知一個等差數列的第 12 項為 15，公差為 $\frac{1}{2}$，求此等差數列的首項。

4，7，13，22，34，49，□，觀察此數列的規律，□應填入哪一個數？

例6 等差數列的一般項

自評 P31 第 3 題

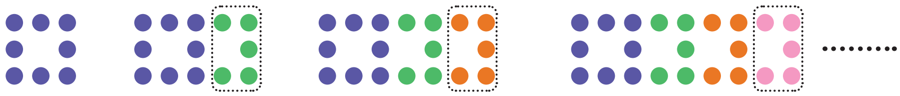
下面各圖是由圓點「●」所組成的規律圖形：



圖一 圖二 圖三 圖四

若圖 n 中，圓點的總數為 a_n，以 n 的式子表示 a_n。

解



圖一 圖二 圖三 圖四

8 $8+1\times5$ $8+2\times5$ $8+3\times5$ ……

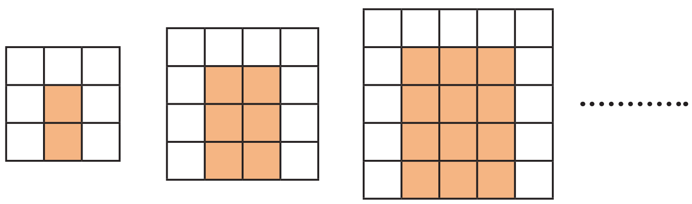
由圖形的規律發現，依序會增加 5 個圓點，

可知 $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$ 為一等差數列，其首項為 8，公差為 5，

所以 $a_n=8+(n-1)\times5=5n+3$。

隨堂練習

如下圖，將白色方塊與橘色方塊按照規律拼成若干個正方形圖案。其中的橘色方塊構成一個長方形，且長方形各邊的方塊數每次都會增加一個。設 a_n 為圖 n 中ㄇ字型白色方塊的總數，以 n 的式子表示 a_n。



圖一 圖二 圖三

例 7 存款問題

自評 P32 第 5 題

3 月 1 日傑克已有存款 350 元，他自 3 月 2 日起，每日皆再儲蓄 55 元，則幾月幾日傑克才有足夠的錢購買 2000 元的玩具？

解 設自 3 月 1 日算起第 n 天，傑克才有足夠的錢購買 2000 元的玩具。

傑克每日存款總額成等差數列 350 , 405 , 460 , ⋯⋯，

此等差數列的首項 $a_1=350$，公差 $d=55$，

則 $a_n=a_1+(n-1)d\geq 2000$

$$350+(n-1)\times 55\geq 2000$$

$$55n\geq 1705$$

$$n\geq 31$$

所以在 3 月 31 日時，傑克的存款總額剛好可以購買 2000 元的玩具。

隨堂練習

承 例 7，若傑克想買 3000 元的玩具，要存到幾月幾日，他才有足夠的錢購買？

解答：67。（相鄰兩項的差為等差數列）

等差中項

如果 a , b , c 三數成等差數列，則 b 稱為 a 與 c 的**等差中項**。

例如：-8 , 12 , 32 成等差數列，則 12 為 -8 與 32 的等差中項。

因此，若 a , b , c 三數成等差數列，則 $b-a=c-b$ ← 後項減前項等於公差

$$2b=a+c$$

$$b=\frac{a+c}{2}$$

等差中項公式

b 為 a 與 c 的等差中項，則 $2b=a+c$，即 $b=\dfrac{a+c}{2}$。

例 8 等差中項的應用

自評 P31 第 4 題

已知三數成等差數列，且其等差中項為 7，求此三數的和。

解 設此三數為 a , 7 , b，因為 a , 7 , b 三數成等差數列，所以 $a+b=2\times7=14$。

因此，三數的和 $a+7+b=a+b+7$

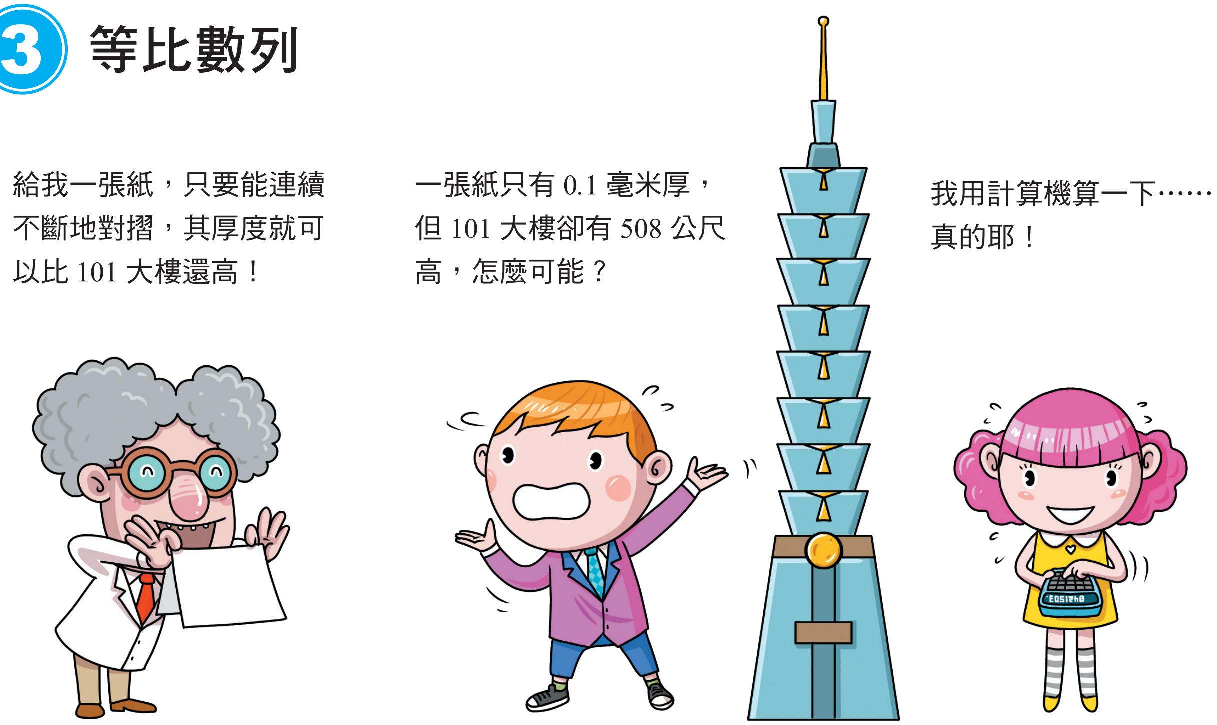
$$=14+7$$

$$=21$$

隨堂練習

已知三數成等差數列，且此三數總和為 -45，求此三數的等差中項為多少？

3 等比數列



摺疊 1 次是	$2\ (=2^1)$	張紙的厚度：$0.1\times 2^1=0.2$（毫米）
摺疊 2 次是	$2\times2\ (=2^2)$	張紙的厚度：$0.1\times 2^2=0.4$（毫米）
摺疊 3 次是	$2\times2\times2\ (=2^3)$	張紙的厚度：$0.1\times 2^3=0.8$（毫米）
摺疊 4 次是	$2\times2\times2\times2\ (=2^4)$	張紙的厚度：$0.1\times 2^4=1.6$（毫米）
摺疊 5 次是	$2\times2\times2\times2\times2\ (=2^5)$	張紙的厚度：$0.1\times 2^5=3.2$（毫米）
⋮		⋮
摺疊 23 次是	$2\times2\times2\times\cdots\cdots\times2\ (=2^{23})$	張紙的厚度：0.1×2^{23}（毫米）

而 0.2 , 0.4 , 0.8 , 1.6 , 3.2 , …… ，
這些數形成一個新的數列，其中 $a_1=0.2$、
$a_2=0.4$、$a_3=0.8$、$a_4=1.6$、$a_5=3.2$ ……，
且這個數列的規律是：每一項都是前一項乘以 2。

$$\begin{array}{ccccccccccc} a_1 & , & a_2 & , & a_3 & , & a_4 & , & a_5 & , & \cdots\cdots \\ 0.2 & \xrightarrow{\times 2} & 0.4 & \xrightarrow{\times 2} & 0.8 & \xrightarrow{\times 2} & 1.6 & \xrightarrow{\times 2} & 3.2 & & \end{array}$$

就另一個觀點，此數列的每一項除以前一項都等於 2，即 $\dfrac{a_2}{a_1}=\dfrac{a_3}{a_2}=\cdots\cdots=\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=2$。

像這樣在一個數列中，任意相鄰兩項的後項除以前項所得的商（比值）都相同，稱為**等比數列**，而這個商（或比值）稱為**公比**，通常用 r 表示。

等比數列前後項關係

1. 一個數列 $a_1 , a_2 , a_3 , a_4 , a_5 , \cdots\cdots , a_{n-1} , a_n$，

   若 $\dfrac{a_2}{a_1}=\dfrac{a_3}{a_2}=\cdots\cdots=\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=r$，則此數列是公比為 r 的等比數列。

2. 等比數列中，公比 $=\dfrac{\text{後項}}{\text{前項}}$，即 $r=\dfrac{a_n}{a_{n-1}}$。

例 9 判別等比數列

自評 P31 第 1 題(2)

判別下列各數列是否為等比數列。如果是，寫出該數列的公比。

(1) $16 , 8 , 4 , 2 , 1 , \dfrac{1}{2}$　　(2) $-5 , -5 , -5 , -5 , -5 , -5$

解

(1) $16 , 8 , 4 , 2 , 1 , \dfrac{1}{2}$

$\times\dfrac{1}{2}$　$\times\dfrac{1}{2}$　$\times\dfrac{1}{2}$　$\times\dfrac{1}{2}$　$\times\dfrac{1}{2}$

相鄰兩項中，後項除以前項的比值都是 $\dfrac{1}{2}$，所以這是等比數列，公比為 $\dfrac{1}{2}$。

(2) $-5 , -5 , -5 , -5 , -5 , -5$

$\times 1$　$\times 1$　$\times 1$　$\times 1$　$\times 1$

相鄰兩項中，後項除以前項的比值都是 1，所以這是等比數列，公比為 1。

隨堂練習

判別下列各數列是否為等比數列。如果是，寫出該數列的公比。

(1) $\dfrac{1}{2} , -1 , 2 , -4 , 8 , -16$　　(2) $1 , 6 , 1 , 6 , 1 , 6$

例 10 利用公比完成數列

在下列空格中填入適當的數，使得各數列成為等比數列。

(1) ______, 3, -9, ______, ______

(2) ______, ______, 8, $8\sqrt{2}$, ______

解 (1)公比 $r=\dfrac{-9}{3}=-3$，且 $a_2=3$，$a_3=-9$

$$a_1=\frac{a_2}{r}=\frac{3}{-3}=-1$$

$$a_4=a_3\cdot r=(-9)\times(-3)=27$$

$$a_5=a_4\cdot r=27\times(-3)=-81$$

因此，等比數列為 -1, 3, -9, 27, -81。

$$? \xrightarrow{\times(-3)} 3 \xrightarrow{\times(-3)} -9 \xrightarrow{\times(-3)} ? \xrightarrow{\times(-3)} ?$$

(2)公比 $r=\dfrac{8\sqrt{2}}{8}=\sqrt{2}$，且 $a_3=8$，$a_4=8\sqrt{2}$

$$a_2=\frac{a_3}{r}=\frac{8}{\sqrt{2}}=4\sqrt{2}$$

$$a_1=\frac{a_2}{r}=\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=4$$

$$a_5=a_4\times r=8\sqrt{2}\times\sqrt{2}=16$$

因此，等比數列為 4, $4\sqrt{2}$, 8, $8\sqrt{2}$, 16。

隨堂練習

完成下列各等比數列，並寫出公比。

(1) 54, 18, ______, ______, ______；公比為 ______ 。

(2) ______, 4, -8, ______, ______；公比為 ______ 。

(3) ______, ______, 9, $9\sqrt{3}$, ______；公比為 ______ 。

以下將以摺紙探討等比數列，進而形成等比數列的公式。

在摺紙的過程中，如果對摺 11 次（第 11 項）的厚度是多少毫米？
我們先觀察下列首項及公比的關係：

$$a_1 \xrightarrow{\times 2} a_2 \xrightarrow{\times 2} a_3 \xrightarrow{\times 2} a_4 \cdots\cdots \xrightarrow{\times 2} a_{11}$$

$0.2,\ 0.4,\ 0.8,\ 1.6,\ \cdots\cdots,\ ?$

$a_1 = 0.2$

$a_2 = 0.4 = 0.2\times 2$ （首項乘以公比的 1 次方）

$a_3 = 0.8 = 0.2\times 2\times 2 = 0.2\times 2^2$ （首項乘以公比的 2 次方）

$a_4 = 1.6 = 0.2\times 2\times 2\times 2 = 0.2\times 2^3$ （首項乘以公比的 3 次方）

$\vdots$

$a_{11} = 0.2\times 2^{10}$ （首項乘以公比的 10 次方）

同理，首項為 a_1，公比為 r 的等比數列，首項及公比的關係如下：

$$a_1 \xrightarrow{\times r} a_2 \xrightarrow{\times r} a_3 \xrightarrow{\times r} a_4 \cdots\cdots\cdots \xrightarrow{\times r} a_n$$

$a_2 = a_1\times r = a_1\times r^1$ （首項乘以公比的 1 次方）

$a_3 = a_1\times r\times r = a_1\times r^2$ （首項乘以公比的 2 次方）

$a_4 = a_1\times r\times r\times r = a_1\times r^3$ （首項乘以公比的 3 次方）

$\vdots$

$a_n = a_1\times r\times r\times \cdots\cdots \times r = a_1\times r^{n-1}$ （首項乘以公比的 $n-1$ 次方）

等比數列第 n 項公式

如果一個等比數列的首項為 a_1，公比為 r，則第 n 項 $a_n = a_1\times r^{n-1}$。

在 P21 所提到連續將紙對摺後，紙的厚度形成首項 $a_1=0.2$，公比是 2 的等比數列，紙的厚度為：$a_{23}=0.2\times2^{23-1}=838860.8$（毫米）

$=838.8608$（公尺）>508（公尺）。

理論上，只要對摺 23 次，其厚度就可以比 101 大樓還高，但實際上卻不可能完成。

輸入 0.2 $\boxed{\times}$ 2 $\boxed{x^y}$ 22，

螢幕顯示 

。

例 11 求第 n 項 a_n

自評 P32 第 6 題

已知一個等比數列的首項為 7，公比為 2，求此等比數列的第 6 項。

思路分析

$$a_1 \xrightarrow{\times r} a_2 \xrightarrow{\times r} a_3 \xrightarrow{\times r} a_4 \xrightarrow{\times r} a_5 \xrightarrow{\times r} a_6$$

解

$a_1=7$，$r=2$，$n=6$

代入公式 $a_n=a_1\times r^{n-1}$ 得

$a_6=7\times2^{6-1}=7\times32=224$

此等比數列的第 6 項為 224。

$$\underset{?}{a_n} = \underset{7}{a_1} \times \underset{2}{r}^{\overset{6}{n-1}}$$

隨堂練習

已知等比數列的首項為 $\frac{1}{4}$，公比為 -2，求此等比數列的第 6 項。

第1章

3，6，12，15，24，觀察此數列的規律，哪一個數字應該被拿走？

例12 利用$a_n=a_1\times r^{n-1}$求等比數列第 n 項

自評 P32 第 7 題

已知一個等比數列的首項為 $\frac{4}{9}$，公比為 $\frac{3}{2}$，求 $\frac{27}{8}$ 是此數列的第幾項？

解 $a_1=\frac{4}{9}$，$r=\frac{3}{2}$，設第 n 項是 $\frac{27}{8}$。

代入公式 $a_n=a_1\times r^{n-1}$ 得

$$a_n=\frac{27}{8}=\frac{4}{9}\times\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}=\frac{27}{8}\times\frac{9}{4}$$

$$=\frac{243}{32}$$

$$=\left(\frac{3}{2}\right)^{5}$$

$n-1=5$，$n=6$

所以 $\frac{27}{8}$ 是此數列的第 6 項。

$$\underset{\frac{27}{8}}{\underset{\uparrow}{a_n}} = \underset{\frac{4}{9}}{\underset{\uparrow}{a_1}} \times \underset{\frac{3}{2}}{\underset{\uparrow}{r}}^{\overset{?}{\overset{\downarrow}{n-1}}}$$

隨堂練習

已知一個等比數列的首項為 1536，公比為 $\frac{1}{2}$，求 3 是此數列的第幾項？

例 13 等比數列的應用

有一個皮球自離地面 81 公尺高處落下，首次反彈後高度為 54 公尺，此後每次反彈高度為其前次反彈高度的 $\dfrac{2}{3}$，求第 5 次反彈後的高度是多少公尺？

解 首次反彈後高度為 54 公尺，首項 $a_1=54$（公尺）

每次反彈高度為其前次反彈高度的 $\dfrac{2}{3}$，公比 $r=\dfrac{2}{3}$

代入公式 $a_n=a_1\times r^{n-1}$ 得

$$a_5=54\times\left(\frac{2}{3}\right)^{5-1}$$
$$=54\times\frac{16}{81}$$
$$=\frac{32}{3}$$

所以第 5 次反彈後的高度是 $\dfrac{32}{3}$ 公尺。

隨堂練習 環境

聯合國推動塑膠減量的淨海計畫，預計流入海洋的塑膠垃圾量，每年都比前一年減少 10%。已知 2017 年流入海洋塑膠垃圾達 800 萬公噸，回答下列問題：

(1)每年流入海洋的塑膠垃圾是前一年的多少倍？

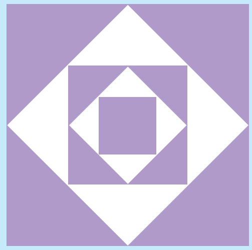
(2)實施 3 年後，在 2020 年流入海洋的塑膠垃圾約為多少萬公噸？

第 1 章

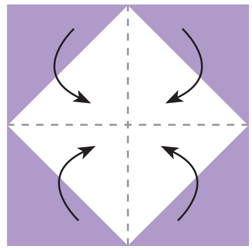
解答：15。（拿走 15 即為等比數列）

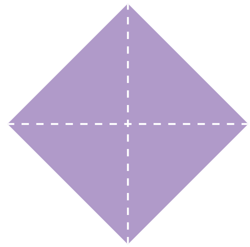
例14 等比數列的應用

一個面積為 16 的正方形，取各邊中點連成第 2 個正方形，再將第 2 個正方形各邊中點連成第 3 個正方形，依此方法，則第 5 個正方形的面積為何？



解 取正方形的四邊中點，從連接四個中點的虛線，向內摺成等腰三角形，如右圖，可以看出第 2 個正方形面積是第 1 個正方形的一半。





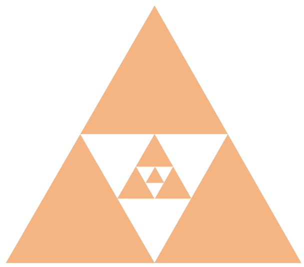
所以首項 $a_1=16$，公比 $r=\frac{1}{2}$

第 5 個正方形面積 $a_5=a_1\times r^{5-1}$

$$=16\times(\frac{1}{2})^4$$
$$=1$$

隨堂練習

將一個面積為 $256\sqrt{3}$ 的正三角形各邊中點連成一個新的正三角形，而面積是原正三角形的 $\frac{1}{4}$，如右圖。若一個正三角形取其各邊中點連成一個正三角形，稱為第 2 層三角形，再取第 2 層三角形各邊中點連成一個正三角形，此為第 3 層三角形。依此方法，求第 6 層三角形的面積。



等比中項

如果 a , b , c 三數成等比數列，則 b 稱為 a 與 c 的**等比中項**。

例如：8 , −4 , 2 成等比數列，則 −4 為 8 與 2 的等比中項。

因此，若 a , b , c 三數成等比數列，則 $\dfrac{b}{a}=\dfrac{c}{b}$ ← 後項除以前項等於公比

$$b^2=ac$$

$$b=\pm\sqrt{ac}$$

等比中項公式

若 b 為 a 與 c 的等比中項，則 $b^2=ac$，即 $b=\pm\sqrt{ac}$。

上面的推導過程中，從 $b^2=ac$ 可以看出 $a\times c$ 是正數，所以當 a 與 c 必須同時為正數或同時為負數時，才會有等比中項。

例 15 等比中項的應用

已知 4 , a , 16 三數成等比數列，求 a 的值。

解 因為 4 , a , 16 三數成等比，

所以 $a^2=4\times16=64$，$a=\pm8$。

隨堂練習

1. 若 9 與 $\dfrac{1}{4}$ 的等比中項為 y，求 y 的值。

2. 若 $\dfrac{3}{2}$ 與 x 的等比中項為 3，求 x 的值。

第 1 章

2 , 11 , 4 , 22 , 6 , □ , 8 , 88 , 10，觀察此數列的規律，□應填入哪一個數？

重點回顧

❶等差數列

(1)一個數列中，任意相鄰兩項，後項減去前項所得的差都相同，稱為等差數列，這個差稱為公差，通常用 d 表示。

例 數列 2 , 5 , 8 , 11 , 14 為等差數列，其公差為 3。

(2)如果一個等差數列的首項為 a_1，公差為 d，則第 n 項 $a_n=a_1+(n-1)d$。

例 一個等差數列的首項為 3，公差為 4，
則第 n 項 $a_n=3+(n-1)\times 4=4n-1$。

❷等差中項

若 b 為 a 與 c 的等差中項，則 $2b=a+c$，即 $b=\dfrac{a+c}{2}$。

例 6 與 12 的等差中項為 $\dfrac{6+12}{2}=9$。

❸等比數列

(1)一個數列中，任意相鄰兩項，後項除以前項所得的比值都相同，稱為等比數列，這個比值也稱為公比，通常用 r 表示。

例 數列 $10 , 5 , \dfrac{5}{2} , \dfrac{5}{4} , \dfrac{5}{8}$ 為等比數列，其公比為 $\dfrac{1}{2}$。

(2)如果一個等比數列的首項為 a_1，公比為 r，則第 n 項 $a_n=a_1\times r^{n-1}$。

例 一個等比數列的首項為 4，公比為 3，則第 n 項 $a_n=4\times 3^{n-1}$。

❹等比中項

若 b 為 a 與 c 的等比中項，則 $b^2=ac$，即 $b=\pm\sqrt{ac}$。

例 3 與 12 的等比中項為 $\pm\sqrt{3\times 12}=\pm\sqrt{36}=\pm 6$。

1-1 自我評量

課 P14 例 3、P22 例 9

1 下列各數列分別隱含某種規律，判別是否為等差或等比數列，在 □ 中打「✓」。

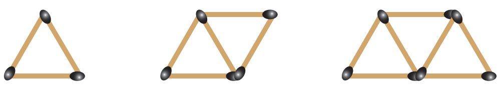
(1) $6,1,-4,-9,-14,-19,-24$。　□等差　□等比　□都不是

(2) $1,-1,1,-1,1,-1,1$。　□等差　□等比　□都不是

(3) $\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\frac{1}{6},\frac{1}{7},\frac{1}{8}$。　□等差　□等比　□都不是

2 已知一個等差數列的首項為 7，公差為 3，求此等差數列的第 15 項。課 P17 隨堂 1

3 下面各圖是由火柴棒排成的正三角形所組成：
觀察圖形的規律，並完成下表。課 P18 例 6


....

圖一　圖二　圖三

正三角形個數	1	2	3	4	5	....	40
火柴棒總數						....	

4 已知 8 是 a 與 b 的等差中項，且 $2a-3b=-38$，求 a、b 的值。課 P20 例 8

解答：44。（偶數項為等比數列）

課 P19 例 7

5 已知北北基地區計程車的計費錶起跳為 70 元，之後每跳一次錶加 5 元。若將起跳 70 當作數列的首項，則計費錶所形成的數列為 $70, 75, 80, \cdots\cdots, a_n$，求：

(1) 第 36 項。

(2) 威利坐計程車到達時，錶上呈現的費用是 320 元，則共跳錶多少次？（設起跳 70 元為第一次跳錶）

6 已知一個等比數列的首項為 $\frac{1}{27}$，公比為 -3，求此數列的第 5 項。 課 P25 例 11

7 已知一個等比數列的首項為 256，公比為 $\frac{3}{4}$，求 81 是此數列的第幾項？

課 P26 例 12

1-2 等差級數

1 等差級數的和

將數列的各項用「＋」連接而成的式子，稱為**級數**。例如：2，4，5，7，9 是一個數列，而 $2+4+5+7+9$ 就是一個級數。

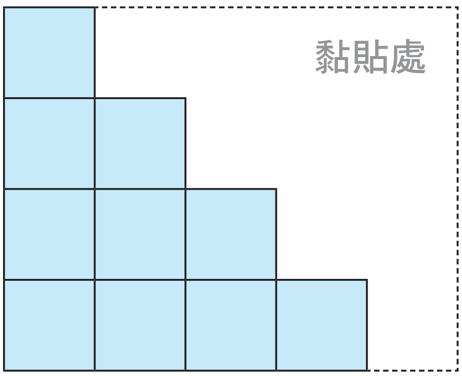
當 a_1，a_2，a_3，……，a_n 為等差數列時，將此數列的各項用「＋」連接，所得的式子 $a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n$ 就稱為**等差級數**。

例如：1，3，5，7，9 是等差數列，$1+3+5+7+9$ 稱為等差級數，而其和為 25，就稱 25 為等差級數 $1+3+5+7+9$ 的和。

探索活動 等差級數的和（一）

從附件 1 中取出黃色階梯方格，並將此階梯方格與下圖中的藍色階梯方格合併成一個 4×5 的大矩形，並完成下列空格：

(1)



藍＋ 黃

第 1 橫列 5 個方格（＝ 1 ＋ 4 ）

第 2 橫列 5 個方格（＝ 2 ＋ ____ ）

第 3 橫列 5 個方格（＝ 3 ＋ ____ ）

第 4 橫列 5 個方格（＝ 4 ＋ ____ ）

(2)藍色階梯方格和黃色階梯方格的數目一樣，

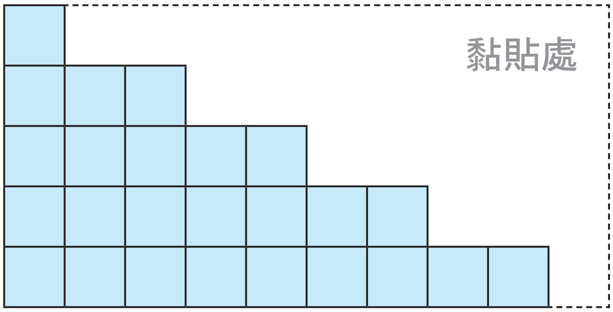
因此藍色階梯方格共有 $\dfrac{(\quad)\times5}{2}=$ ______ 個小正方形，

亦即 $1+2+3+4=$ ______ 。

探索活動 等差級數的和（二）

從附件 2 中取出黃色階梯方格，並將此階梯方格與下圖中的藍色階梯方格合併成一個 5×10 的大矩形，並完成下列空格：

(1)



藍＋　黃

第 1 橫列 10 個方格（＝ 1 ＋ 9 ）

第 2 橫列 10 個方格（＝ 3 ＋ ____ ）

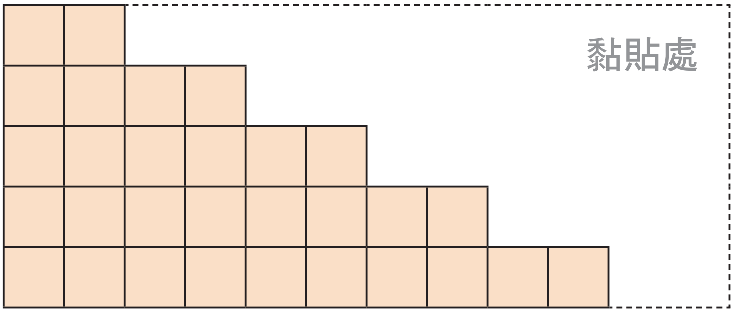
第 3 橫列 10 個方格（＝ 5 ＋ ____ ）

第 4 橫列 10 個方格（＝ 7 ＋ ____ ）

第 5 橫列 10 個方格（＝ 9 ＋ ____ ）

(2)藍色階梯方格和黃色階梯方格的數目一樣，因此藍色階梯方格共有 $\dfrac{(\quad)\times10}{2}=$ ______ 個小正方形，亦即 $1+3+5+7+9=$ ______ 。

隨堂練習



從附件 3 中取出藍色階梯方格，將此階梯方格與左圖中的橘色階梯方格合併成一個大矩形，並完成下列空格：

(1)每一橫列有 ______ 個方格。

(2)共有 ______ 個橘色階梯方格。

據說被譽為「數學王子」的德國數學家高斯（*Carl Friedrich Gauss*，1777-1855），在十歲那年，有一天老師要求全班同學計算出 $1+2+3+4+5+\cdots\cdots+98+99+100$ 的和。當老師將題目寫完後不久，高斯就在他的小石板上寫出 5050，並舉手告訴老師這個答案。你知道高斯是怎麼算出來的嗎？

從 探索活動 與 隨堂練習 可知，將兩個階梯方格合併成一個大矩形，每一橫列的小正方形數目皆相等，當年高斯就是用這個概念來計算 $1+2+3+\cdots\cdots+98+99+100$ 的和。

可以先假設　　　　$S=1+2+3+\cdots\cdots+98+99+100$ ← 由小到大

同樣地，也可以寫成　$S=100+99+98+\cdots\cdots+3+2+1$ ← 由大到小

將兩式相加可得：

$$
\begin{array}{rccccccccccccc}
 & S= & 1 & + & 2 & + & 3 & + & \cdots\cdots & + & 98 & + & 99 & + & 100 \\
+) & S= & 100 & + & 99 & + & 98 & + & \cdots\cdots & + & 3 & + & 2 & + & 1 \\
\hline
 & 2S= & 101 & + & 101 & + & 101 & + & \cdots\cdots & + & 101 & + & 101 & + & 101
\end{array}
$$
← 共 100 個 101

所以 $2S=101\times100$

$$S=\frac{101\times100}{2}=5050$$

隨堂練習

仿照高斯的作法完成下列空格，並求出等差級數 $1+4+7+\cdots\cdots+94+97+100$，共 34 項的和。

可以先假設　　　　$S=1+4+7+\cdots\cdots+94+97+100$

同樣地，也可以寫成　$S=100+97+94+\cdots\cdots+7+4+1$

將兩式相加可得：

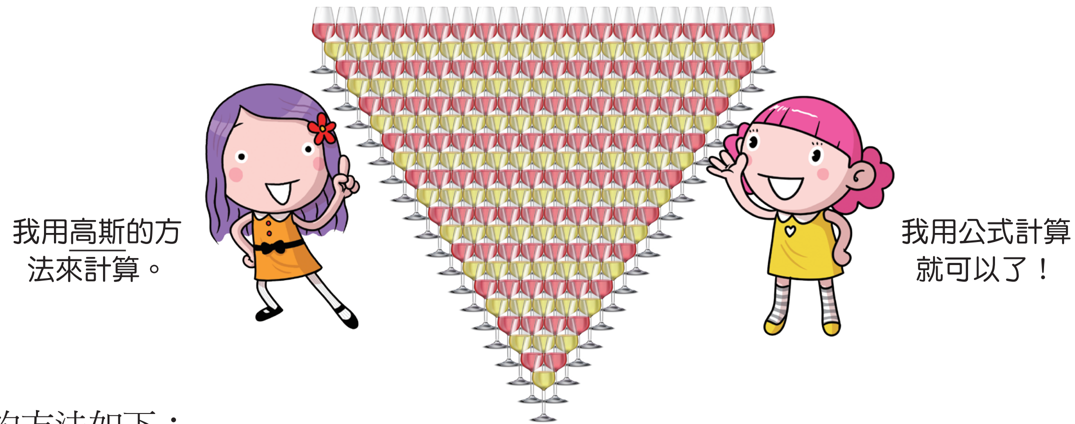
$$
\begin{array}{rccccccccccccc}
 & S= & 1 & + & 4 & + & 7 & + & \cdots\cdots & + & 94 & + & 97 & + & 100 \\
+) & S= & 100 & + & 97 & + & 94 & + & \cdots\cdots & + & 7 & + & 4 & + & 1 \\
\hline
 & 2S= & (\quad) & + & (\quad) & + & (\quad) & + & \cdots\cdots & + & (\quad) & + & (\quad) & + & (\quad)
\end{array}
$$

所以 $2S=(\qquad)\times34$，$S=\dfrac{(\qquad)\times34}{2}=(\qquad)$

因此 $1+4+7+\cdots\cdots+94+97+100=$ ＿＿＿＿＿＿。

2 等差級數和的公式

博士帶著安琪、艾美去參加朋友的婚禮，婚禮現場有 200 人，主辦單位為了慶祝，在現場用酒杯排成一個大正三角形。如圖，第 1 排有 1 個酒杯，第 2 排有 2 個，第 3 排有 3 個，……，共有 20 排。如果一人一杯，則這樣的擺設是否足夠？



艾美的方法如下：

設 $S=1+2+3+4+\cdots+19+20$ 是一個公差為 1 的等差級數，

首項 $a_1=1$，項數 $n=20$，末項 $a_{20}=20$。

兩式相加可得：

$+1$ 個公差　$+2$ 個公差　$+19$ 個公差

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & 1 & + & 2 & + & 3 & + & \cdots\cdots & + & 20\\ S & = & 1 & + & (1+1\times1) & + & (1+2\times1) & + & \cdots\cdots & + & (1+19\times1)\\ S & = & 20 & + & (20-1\times1) & + & (20-2\times1) & + & \cdots\cdots & + & (20-19\times1)\\ & & 20 & + & 19 & + & 18 & + & \cdots\cdots & + & 1\end{array}$$

-1 個公差　-2 個公差　-19 個公差

$2S=(1+20)+(1+20)+(1+20)+\cdots\cdots+(1+20)$

$2S=21\times20$，$S=\dfrac{21\times20}{2}=210$

但安琪所說的公式是什麼？接下來將介紹等差級數的公式。

若一個等差級數的首項為 a_1，公差為 d，第 2 項為 a_2，……，第 n 項為 a_n，其前 n 項的和可記為 S_n，即 $S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n$。

$$S_n = \underset{a_1}{a_1} + \underset{a_2}{(a_1+d)} + \underset{a_3}{(a_1+2d)} + \cdots\cdots + \underset{a_n}{[a_1+(n-1)d]}$$

$$S_n = \underset{a_n}{a_n} + \underset{a_{n-1}}{(a_n-d)} + \underset{a_{n-2}}{(a_n-2d)} + \cdots\cdots + \underset{a_1}{[a_n-(n-1)d]}$$

$$2S_n = \underbrace{(a_1+a_n)+(a_1+a_n)+(a_1+a_n)+\cdots\cdots+(a_1+a_n)}_{\text{共有 } n \text{ 個}(a_1+a_n)}$$

$2S_n=n(a_1+a_n)$，即 $S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$。

等差級數和的公式（一）

等差級數的和 $=\dfrac{\text{項數}\times(\text{首項}+\text{末項})}{2}$，即 $S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$。

隨堂練習

自評 P44 第 1 題

求 50 個連續偶數 $2+4+6+8+\cdots\cdots+100$ 的和是多少？

例1 先求 n，再代入 $S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$ 求和

自評 P44 第 2 題

已知等差級數 $41+38+35+\cdots\cdots+5$，則：

(1)共有多少項？　(2)求等差級數的和。

解

思路分析

(1)先利用公式 $a_n=a_1+(n-1)d$，求得項數。

(2)再利用公式 $S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$，求得總和。

(1)首項 $a_1=41$，末項 $a_n=5$，公差 $d=38-41=-3$。

代入公式 $a_n=a_1+(n-1)d$，得 $5=41+(n-1)\times(-3)$，$n=13$

所以共有 13 項。

(2)$S_{13}=\dfrac{13\times(41+5)}{2}=299$，即 $41+38+35+\cdots\cdots+5=299$，

所以等差級數的和是 299。

隨堂練習

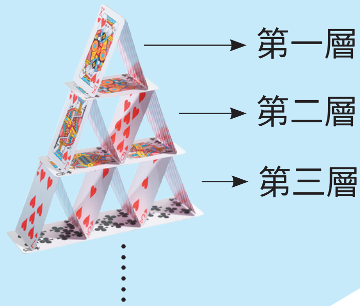
求下列各等差級數的和：

(1)$2+6+10+\cdots\cdots+42$　　(2)$5+1+(-3)+\cdots\cdots+(-39)$

例2 求等差級數的和

自評 P44 第 3 題

用撲克牌堆疊的高塔中，小三角形的數量由上而下逐層增加，第一層有 1 個小三角形，第二層有 3 個小三角形，……，每層的小三角形個數依序形成一個有規律的數列。如果排了 10 層，總共會有幾個小三角形？



解 第一層有 1 個小三角形，首項 $a_1=1$，第二層有 3 個小三角形，$a_2=3$。

且每層的小三角形個數皆依序增加 2 個，所以形成一個公差為 2 的等差數列。

代入公式 $a_n=a_1+(n-1)d$ 得

$$a_{10}=1+(10-1)\times 2=19$$

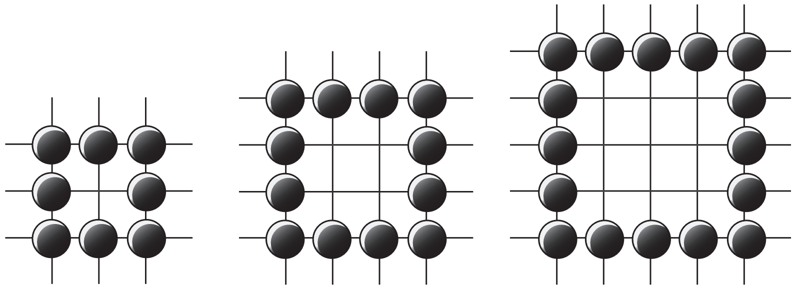
代入公式 $S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$ 得

$$S_{10}=\frac{10\times(1+19)}{2}=5\times 20=100$$

所以總共會有 100 個小三角形。

隨堂練習

用相同大小的圍棋黑子排成數個空心正方形的圖形，已知圖一有 8 個黑子，完成下列空格：



(1)圖二有 ______ 個黑子，比圖一多 ______ 個黑子。

(2)圖三有 ______ 個黑子，比圖二多 ______ 個黑子。

(3)依此規律排下去，則圖十有 ______ 個黑子。

(4)圖一～圖十共使用了 ______ 個黑子。

在不知道末項 a_n 的情形下，也可以直接由首項 a_1、公差 d 與項數 n 求出等差級數的和。因為 a_1，a_2，……，a_n 為等差數列，所以 $a_n=a_1+(n-1)d$，將此代入 $S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}$，可得 $S_n=\frac{n[a_1+a_1+(n-1)\times d]}{2}=\frac{n[2a_1+(n-1)\times d]}{2}$。

等差級數和的公式（二）

$S_n=\frac{n[2a_1+(n-1)\times d]}{2}$。

例3 利用等差級數和的公式求和

自評 P45 第 4 題

已知一個等差級數的首項為 3，公差為 −2，求此等差級數前 12 項的和。

解 首項 $a_1=3$，公差 $d=-2$，項數 $n=12$。

代入上述公式 $S_n=\frac{n[2a_1+(n-1)\times d]}{2}$ 得

$$S_{12}=\frac{12[2\times3+(12-1)\times(-2)]}{2}$$

$$=\frac{12[6+11\times(-2)]}{2}=\frac{12\times(-16)}{2}=-96$$

故前 12 項的和為 −96。

隨堂練習

已知一個等差級數的首項為 7，公差為 3，求此等差級數前 20 項的和。

例4 求等差級數的項數與公差

自評 P45 第 5 題

大王遊戲場開發了新遊戲，遊戲方法如下：球池中有 100 個球（編號是連續正整數：1、2、3、……、100），任意取出 n 個球，若取出球的號碼由小排到大必須成等差數列，且最後總和是 800，則可以得到大獎。威利參加此遊戲得到大獎，他取出的球中，編號最小的是 2 號，最大的是 78 號，則威利共取出多少個球？這些球的號碼由小排到大的公差是多少？

解 設共取出 n 個球，所以項數為 n，公差為 d，

編號最小是 2，首項 $a_1=2$，編號最大是 78，末項 $a_n=78$

代入公式 $S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$ 得

$800=\dfrac{n(2+78)}{2}$

$80n=1600$

$n=20$

又 $a_n=a_1+(n-1)d$

所以 $78=2+(20-1)d$

$19d=76$

$d=4$

故共取出 20 個球，且這些球的號碼公差是 4。

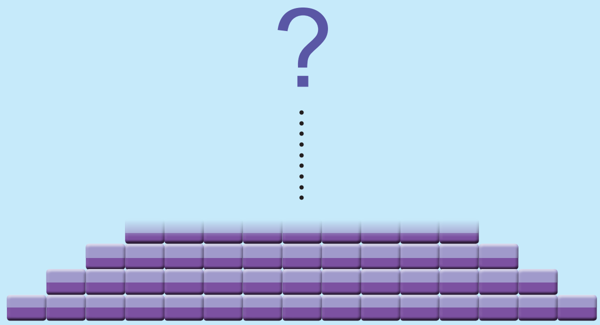
隨堂練習

已知一個等差級數的首項為 -4，末項為 26，和為 121，求其項數與公差。

例5 等差級數的應用

自評 P45 第 6 題

艾美參加創意骨牌大賽，她拿了 60 個骨牌做了一個可以讓骨牌爬樓梯的臺階。已知臺階最下層有 15 個骨牌，且相鄰的兩層骨牌中，上層會比下層少 2 個骨牌，則這個骨牌臺階共有幾層？臺階的最上層共有幾個骨牌？



解 設臺階共有 n 層，若最下層為第 1 層，則最上層為第 n 層，

因此可形成等差數列 $15 , 13 , 11 , \cdots\cdots , a_n$。

$15+13+11+\cdots\cdots+a_n=60$，其中首項 $a_1=15$，公差 $d=-2$，前 n 項的和 $S_n=60$

$60=\dfrac{n[2\times15+(n-1)\times(-2)]}{2} \longleftarrow S_n=\dfrac{n[2a_1+(n-1)\times d]}{2}$

$n^2-16n+60=0$

$(n-6)(n-10)=0$

$n=6$ 或 $n=10$

當(1) $n=6$ 時，$a_6=15+(6-1)\times(-2)=5$

(2) $n=10$ 時，$a_{10}=15+(10-1)\times(-2)=-3$（不合）

因此這個臺階共有 6 層，最上層有 5 個骨牌。

隨堂練習

走路是很好的運動，洛基在學校 400 公尺的操場，走完第 1 圈需耗時 6 分鐘；第 2 圈需耗時 6.5 分鐘；……，且之後每一圈所需要的時間均比他在前一圈所花的時間多 0.5 分鐘。若洛基今天共花了 62 分鐘，則共走了多少圈？

重點回顧

❶級數

將數列的各項用加號「＋」連接而成的式子稱為級數。

例 $1+3+(-1)+(-5)$ 是一個級數。

❷等差級數

當 $a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots, a_n$ 為等差數列時，$a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n$ 為等差級數。

例 $5+10+15+20+25+30$ 是一個等差級數。

❸等差級數和的公式

⑴如果一個等差級數的首項為 a_1，末項為 a_n，則此等差級數前 n 項的和為

$S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$，即等差級數的和為$\dfrac{項數\times(首項+末項)}{2}$。

⑵將 $a_n=a_1+(n-1)d$ 代入公式 $S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$，

可得 $S_n=\dfrac{n[2a_1+(n-1)\times d]}{2}$。

例 等差級數 $5+10+15+20+25+30$（$a_1=5$，$a_6=30$，$d=5$）的和為

⑴$S_6=\dfrac{6(a_1+a_6)}{2}=\dfrac{6(5+30)}{2}=105$

⑵$S_6=\dfrac{6[2a_1+(6-1)d]}{2}=\dfrac{6(2\times5+5\times5)}{2}=105$

1-2自我評量

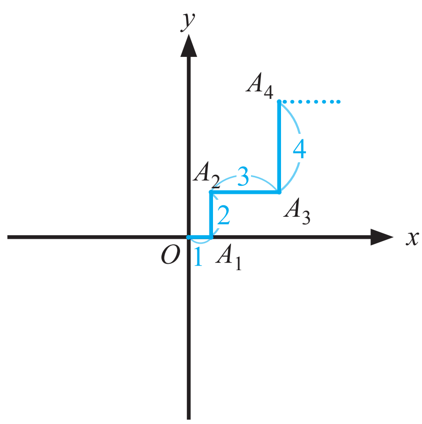
1 求 1 至 1000 的整數中，所有 4 的倍數的和。 課 P37 隨堂

2 求下列各等差級數的和： 課 P38 例 1

(1) $74+67+60+\cdots\cdots+(-10)$　　(2) $1.2+1.5+1.8+\cdots\cdots+5.4$

3 如右圖，有一個機器人從原點 $O(0,0)$ 出發，按以下規律行走： 課 P39 例 2

第 1 天向右方行走 1 個單位移動到 A_1；第 2 天向上方行走 2 個單位移動到 A_2；第 3 天向右方行走 3 個單位移動到 A_3；第 4 天向上方行走 4 個單位移動到 A_4；第 n 天走 n 個單位，其中第奇數天向正右方行走，第偶數天向上行走，按這樣的規律繼續行走，第 100 天這個機器人到達 A_{100}，則 A_{100} 的坐標是多少？



④某球場 E 區共有 25 排座位，此區每一排都比其前一排多 2 個座位，小明坐在正中間那一排（即第 13 排），發現此排共有 64 個座位，則此球場 E 區共有幾個座位？

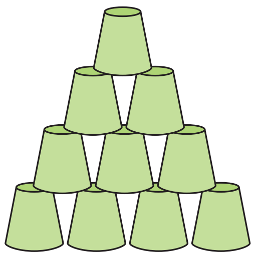
課 P40 例 3

⑤已知一個等差級數的首項為 5，末項為 138，和為 1430，求此等差級數的項數與公差。

課 P41 例 4

⑥同樂會結束後，小城負責洗現場所有的 120 個杯子，洗完後他想把杯子裡的水瀝乾，且為了美觀與節省空間，他將杯子倒著放並排成如右圖。排放的規律如下：由下往上每一層少一個杯子，最高層僅剩一個杯子。如果 120 個杯子剛好排完，最底層需要排幾個杯子？

課 P42 例 5



自我挑戰

本單元為統整課程，由學生自行挑戰，教師可視班級情況決定如何運用。

藍天游泳池有若干個出水量相同的水管，如果所有水管同時放水，那麼水池由乾至剛好滿池恰需要 13 小時。如果開始時全部水管齊開注水，經過 a_1 小時後關閉第 1 個水管，之後每隔相等的時間關閉一個水管，到最後一個水管關閉時，恰好注滿水池，而且最後一個水管放水的時間恰好是第一個水管放水時間的 12 倍。依據資料回答下列問題：

⑴設有 n 個水管，每個水管每小時可放水 x 公升，則游泳池滿池時為多少公升？（用 n，x 來表示）

⑵承⑴，第一個關閉的水管放水多少小時？最後一個關閉的水管放水多少小時？（提示：利用等差級數和的公式 $S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$）

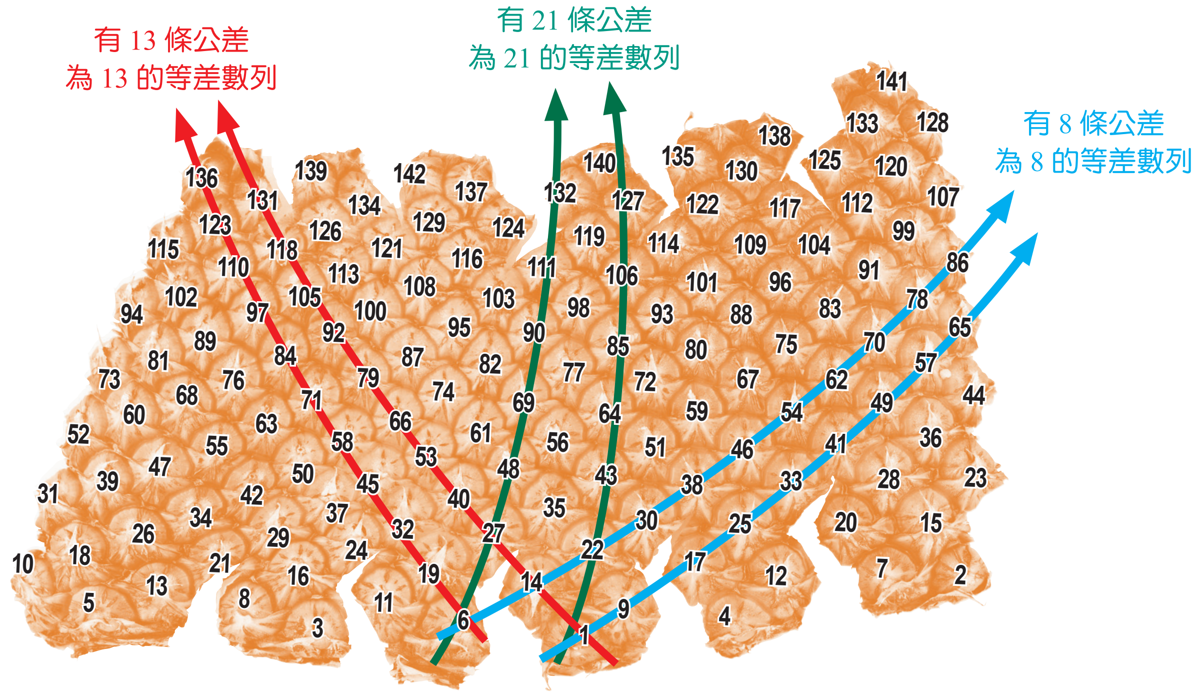
⑶若相隔時間皆為 d 小時，且 d 是大於 1 且小於 5 的整數，求 d、n 。

解答P215

數學萬花筒

鳳梨上的數學

觀察鳳梨表面一小塊一小塊的六角形鱗片，依生長出來的順序逐一標示號碼，從這些號碼可以找到一些等差數列，如下圖。



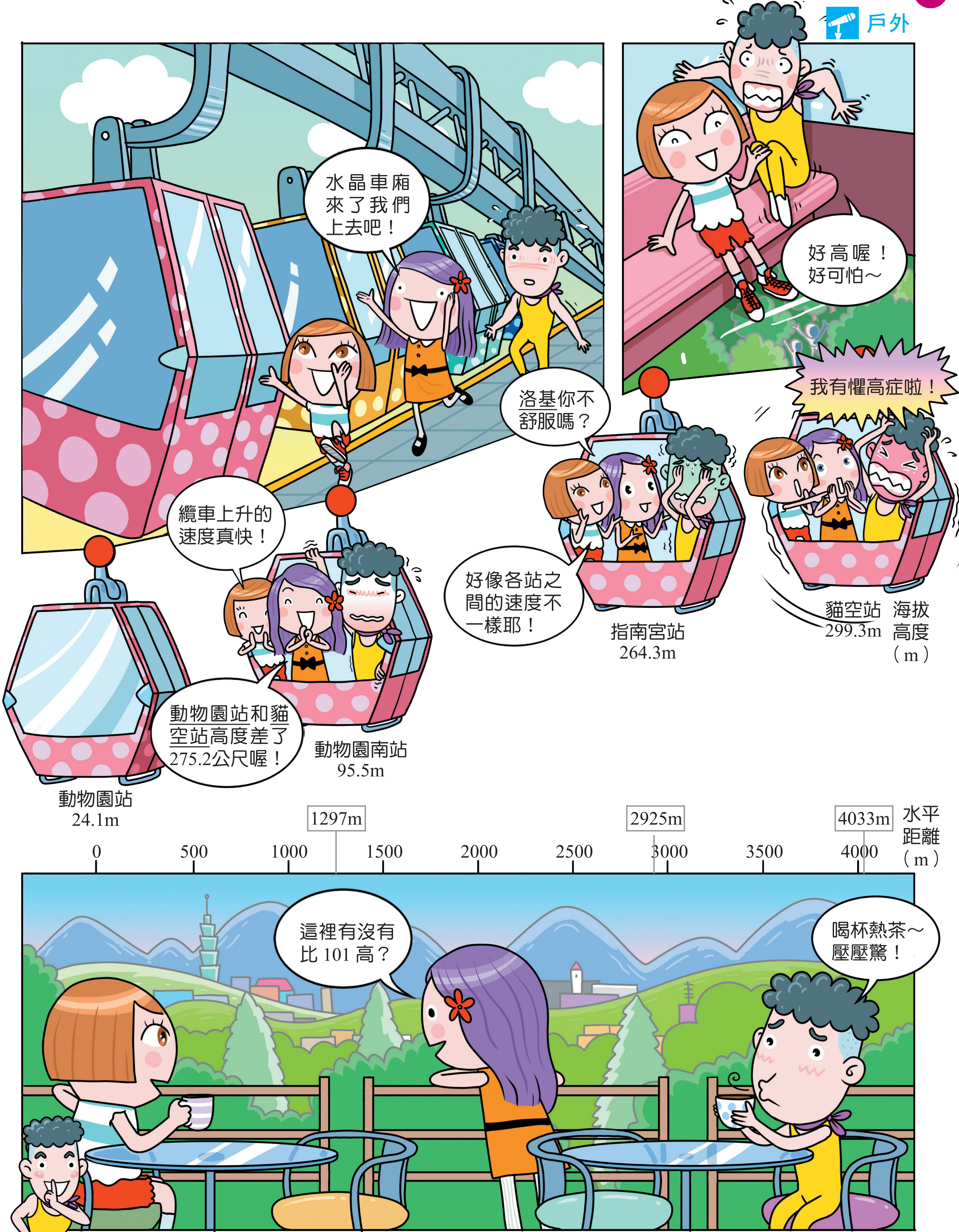
上述這些螺線的條數，以及每一條螺線中六角形鱗片的數字所形成的公差 8、13、21，都是費氏數列相鄰的數。在自然界還有許多的動植物都蘊含費氏數列，例如：可以從松果的蒂頭找到螺線（如下圖），這些都是費氏數列中的某些數。其他如向日葵、鸚鵡螺的外殼、雛菊花的花蕊排列等，也處處蘊含費氏數列的蹤跡，有興趣的人可以繼續進行探索之旅。

8 條螺線

13 條螺線

21 條螺線

2 線型函數



由上圖可以知道各站之間的海拔高度和水平距離關係，相關問題翻開至 P73 算算看吧！

學習前哨站

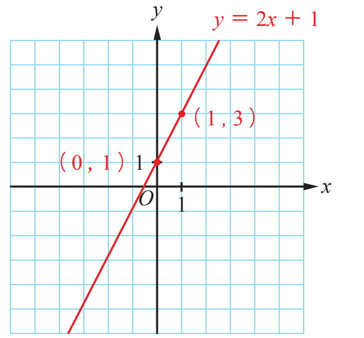
本單元為學生自我複習，
教師可視班級情況決定如何運用。

回顧 ① 直角坐標與二元一次方程式的圖形 7 下第 2 章

1. 在坐標平面上畫二元一次方程式 $y=2x+1$ 的圖形時，先選定兩個 x 的值，代入方程式後求得 y 值。

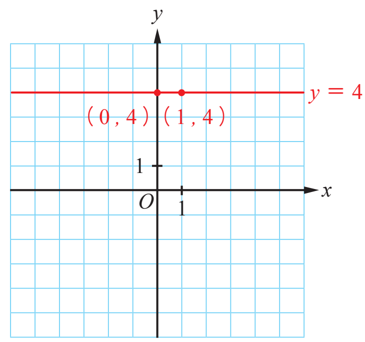
x	0	1
y	1	3

將表中的兩組解寫成數對 (x, y)，再畫出通過此兩點的直線。



2. 在坐標平面上畫 $y=4$ 的圖形時，可將 $y=4$ 看成二元一次方程式 $0x+y=4$。

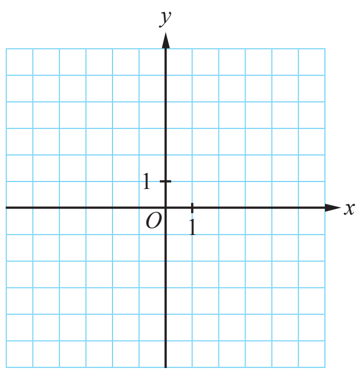
x	0	1
y	4	4



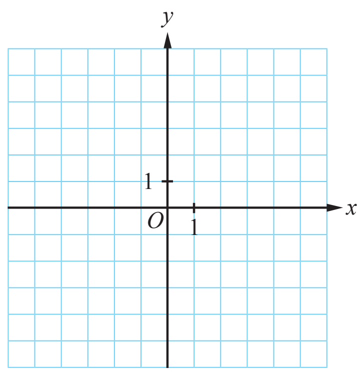
課前練習

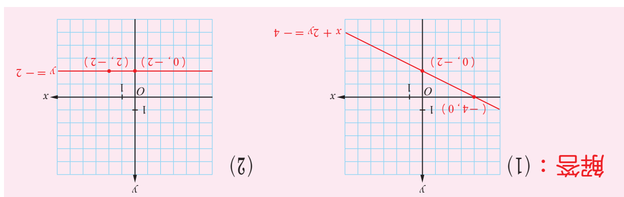
在坐標平面上畫出下列方程式的圖形：

(1) $x+2y=-4$



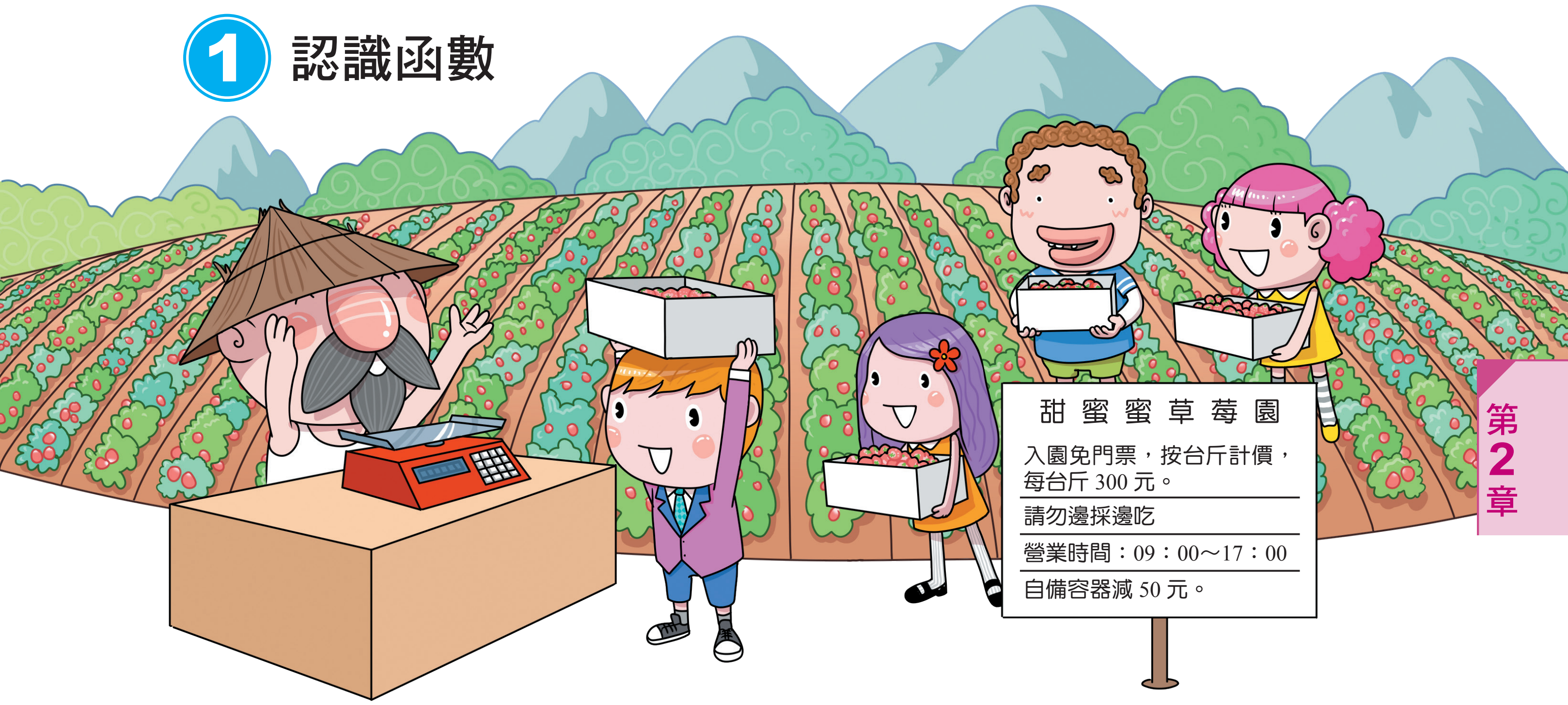
(2) $y=-2$





2-1 變數與函數

1 認識函數



探索活動 對應關係

1. 傑克、威利、安琪、艾美 4 人皆自備容器到甜蜜蜜草莓園採草莓。

傑克採了 1 台斤，共 250 元（＝ 1 ×300－50）

威利採了 1.5 台斤，共 ______ 元（＝ ______ ×300－50）

安琪採了 2.4 台斤，共 ______ 元（＝ ______ ×300－50）

艾美採了 3 台斤，共 ______ 元（＝ ______ ×300－50）

2. 將 4 人皆自備容器下所採的草莓重量（台斤）與總價（元）整理並完成右表：

重量（台斤）	1	1.5	2.4	3
總價（元）	250			

3. 在自備容器的情形下，當所採的草莓重量確定後，是否只有一個對應的總價？　□是　□否

隨堂練習

平年的二月有 28 天，其他月分有的是 30 天，有的是 31 天。

(1)寫出各月分中的天數以完成下表：

月分	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
天數	31			30			31		30			31

(2)由上表可知，當月分的值確定後，是否只有一個對應的天數？ □是 □否

自評 P59 第 2 題

志學到便利商店影印資料，已知每張 $A4$ 的影印費用為 3 元，若以 x 表示影印的張數，y 表示所需的費用，則可寫成關係式：$y=3x$（x 為正整數）。

每個人到便利商店影印的張數（x）可能不同，其中所需的費用（y）也會隨著影印張數不同而有所改變，其 x 所對應的 y 值如下表：

張數（x 張）	1	2	3	4	7	25	40	…
費用（y 元）	3	6	9	12	21	75	120	…

因此，當 x 的值確定後，只有一個 y 值與其對應。

在前面的 探索活動 與說明中，都有兩個變動的量，如果將兩個量分別用 x 及 y 表示，這兩個變動的量 x、y 稱為**變數**，則當 x 確定時，y 也隨著唯一確定，它們形成一種對應關係，由於 y 的值是隨著 x 值改變，所以稱 x 是**自變數**，y 是**應變數**。

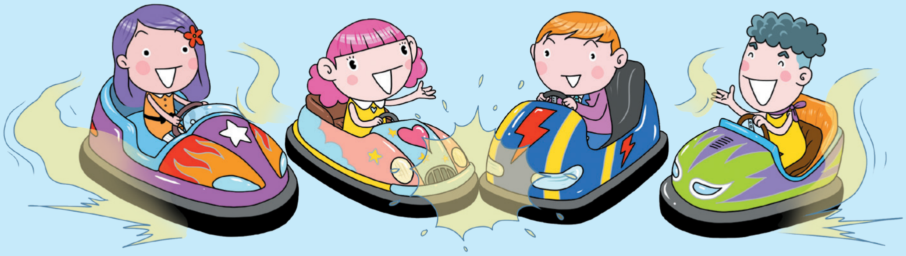
函數的意義

任意給定一個 x 時，都恰有一個 y 與它對應，這種 x 與 y 之間的關係稱為 y 是 x 的**函數（function）**。

例1 函數關係

自評 P59 第 1 題

傑克、洛基、安琪、艾美到遊樂園玩碰碰車，從下圖中可知每一個人坐一輛碰碰車。若用 x 表示傑克、洛基、安琪、艾美，y 表示他們所坐的碰碰車，判別 y 是否為 x 的函數。

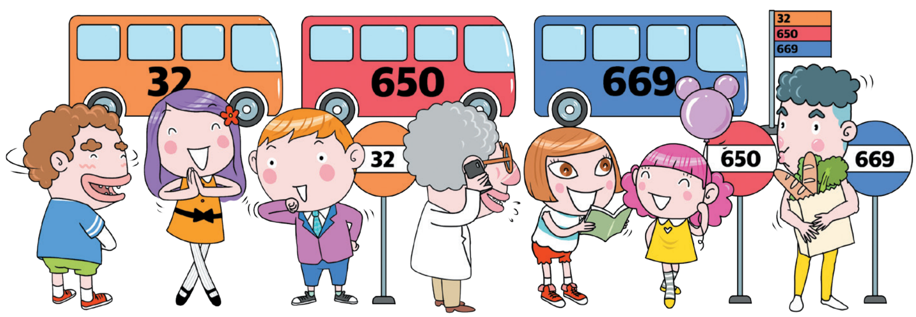


解 是。

因為當 x（某人）確定後，會有一個對應的 y（車）也跟著確定，所以 y 是 x 的函數。

隨堂練習

博士、洛基、安琪、⋯⋯ 等 7 個人在公車站等車，若有 3 輛公車同時間到達，由圖中可知每一個人都坐上其中一輛公車。若用 x 表示博士、洛基、安琪、⋯⋯ 等 7 個人，y 表示他們所選搭的公車，由每一個人是否都各自對應到一輛公車，判別 y 是否為 x 的函數。



觀察上列數字的關係，哪一個應該被拿走？ 3/31、7/31、8/31、9/31、12/31，

例2 函數的判別

大億汽機車停車場一天的收費標準如下：

汽車每小時 20 元，不足一小時的部分以一小時計；機車每次 30 元。

(1)設 x 表示一天內某次汽車停車的時間(小時)，y 表示汽車停車的費用(元)，判別 y 是否為 x 的函數。

(2)設 x 表示一天內某次機車停車的時間(小時)，y 表示機車停車的費用(元)，判別 y 是否為 x 的函數。

解 (1)

停車時間(x 小時)	1	1.7	2	2.8	3	…
汽車停車費用(y 元)	20	40	40	60	60	…

由上表可知，當 x 的值確定後，都恰有一個 y 值與它對應，所以 y 是 x 的函數。

(2)

停車時間(x 小時)	1	1.7	2	2.8	3	…
機車停車費用(y 元)	30	30	30	30	30	…

由上表可知，當 x 的值確定後，都恰有一個 y 值與它對應，所以 y 是 x 的函數。

隨堂練習

大坑柑橘園開放採果，只要繳交入園費 50 元，就可吃到飽。設 x 表示傑克入園後所吃的柑橘重量(百公克)，y 表示傑克吃柑橘所花的費用(元)，判別 y 是否為 x 的函數。

例3 函數的判別

自評 P60 第 3 題

華氏溫度與攝氏溫度的換算方式為「華氏溫度$=\frac{9}{5}\times$攝氏溫度$+32$」。

(1)若攝氏溫度以 x 度表示，其相對應的華氏溫度以 y 表示，寫出 x、y 的關係式。

(2)利用表格中給定的 x 值，計算相對應的 y 值，並將計算的結果填入表格。

x(°C)	-20	0	25	30	40	100
y(°F)						

(3)當 x 的值確定後是否只有一個對應的 y 值？

解 (1)以 x 表示攝氏溫度，y 表示華氏溫度，

因為華氏溫度$=\frac{9}{5}\times$攝氏溫度$+32$，所以 $y=\frac{9}{5}x+32$。

(2)

x(°C)	-20	0	25	30	40	100
y(°F)	-4	32	77	86	104	212

(3)由上表可知，當 x 的值確定後，都只有一個對應的 y 值。

隨堂練習

一輛汽車在高速公路上，以時速 90 公里的固定速率行駛，如果 x 小時可行駛 y 公里，已知「距離$=$速率$\times$時間」，將 x 與 y 的對應列成下表：

x(小時)	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4	……
y(公里)	$90\times\frac{1}{2}$	90×1	90×2	90×3	90×4	……

(1) y 與 x 的關係式為__________。　　(2) y 是否為 x 的函數？

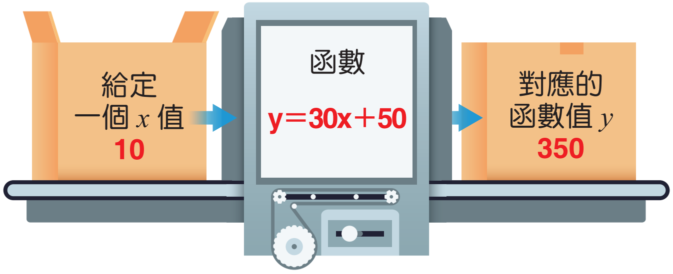
第2章

解答：9/31（9月沒有31日）。

2 函數值

有一自助柑橘園，入場費 50 元，每採摘 1 公斤，需費用 30 元。若入場採摘 x 公斤柑橘，花費 y 元，則 x、y 的函數關係為 $y=30x+50$。當 $x=10$ 時，對應的 y 值為 $y=30\times10+50=350$。其中 350 稱為此函數 $y=30x+50$ 在 $x=10$ 時的函數值。

也就是說，若 y 是 x 的函數，則 $x=a$ 時的 y 值稱為此函數在 $x=a$ 時的函數值。



例4 求函數值

求函數 $y=-3x+2$ 分別在 $x=5$ 及 $x=-2$ 時的函數值。

解 $x=5$ 時，函數值 $y=(-3)\times5+2=-13$

$x=-2$ 時，函數值 $y=(-3)\times(-2)+2=8$

隨堂練習

求函數 $y=2x-7$ 分別在 $x=7$，$x=0$ 及 $x=-3$ 時的函數值。

例5 函數值相等

自評 P60 第 4 題

若函數 $y=2x+3$ 與函數 $y=4x-7$，在 $x=k$ 時，兩函數值相等，求 k 的值。

解 當 $x=k$ 時，$y=2x+3$ 的函數值為 $2k+3$；$y=4x-7$ 的函數值為 $4k-7$，

因為函數值相等，可得 $2k+3=4k-7$，$k=5$。

隨堂練習

若函數 $y=-2x+1$ 與函數 $y=3x+16$，在 $x=a$ 時的函數值相等，求 a 的值。

例6 函數值的應用

自評 P60 第 5 題

東西桌遊店舉辦周年慶特賣會，優惠方案如右圖。

若桌遊商品的定價為 x 元，使用優惠方案後的售價為 y 元，回答下列問題：

(1) y 是否為 x 的函數？如果是，寫出 y 與 x 的關係式。

(2) 傑克於周年慶期間，購買原定價 1000 元的商品，結帳時付了多少元？

解 (1) 因為當 x 的值確定後，都恰有一個 y 值與它對應，所以 y 是 x 的函數。

y 與 x 的關係式為 $y=0.8x-200$。

(2) 將 $x=1000$ 代入得 $y=0.8\times1000-200=800-200=600$（元）。

隨堂練習

在 例6 中，若在春節特賣會時，優惠方案改成定價先減 200 元，再打八折，則：

(1) y 是否為 x 的函數？如果是，寫出 y 與 x 的關係式。

(2) 妙麗於春節特賣會期間，購買原定價 1000 元的商品，結帳時付了多少元？

第2章

觀察兩數相乘後與後面數字的規律，x 應填入多少？
1×1 1　3×5 2　6×8 2　7×15 3　4×19 x

重點回顧

❶ 函數

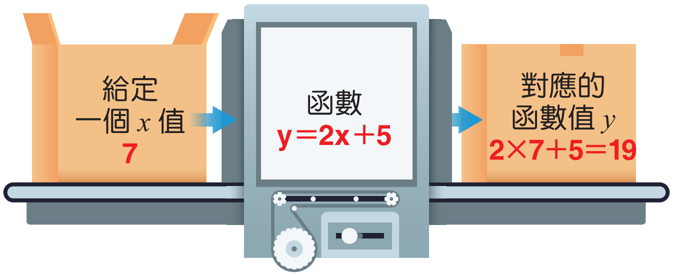
任意給定一個 x 時，都恰有一個 y 與它對應，這種 x 與 y 之間的關係稱為 y 是 x 的函數。

例 一輛汽車在高速公路上，以時速 100 公里的固定速率行駛，如果 x 小時可行駛 y 公里，已知「距離＝速率×時間」，則 $y=100x$，即在速率固定的情形下，距離是時間的函數。

❷ 函數值

若 y 是 x 的函數，則 $x=a$ 時的 y 值，稱為此函數在 $x=a$ 時的函數值。

例 函數 $y=2x+5$ 中，當 $x=7$ 時，對應的函數值為 $y=2\times7+5=19$。



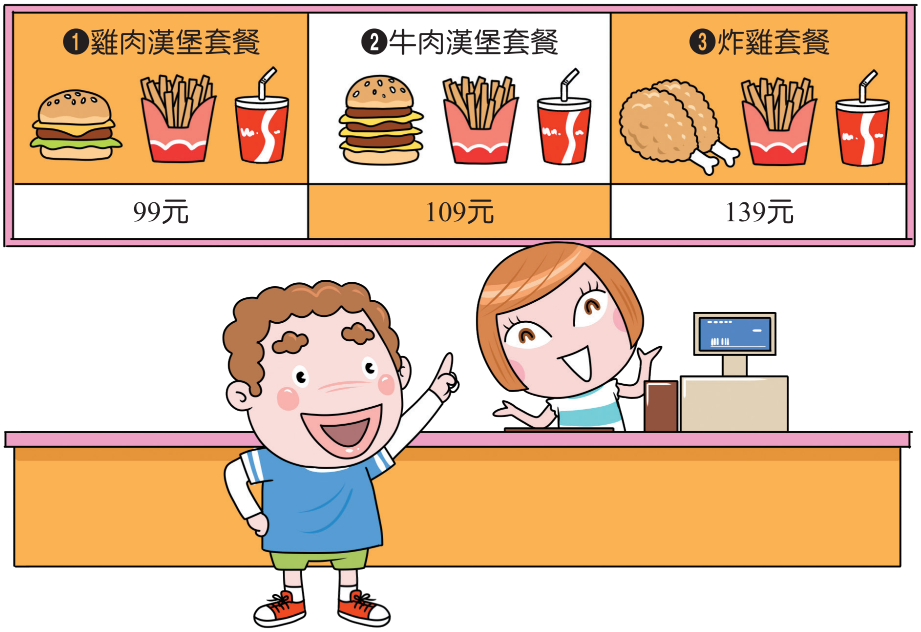
補給站 發燒的溫度

發燒意味著身體出現異常，在臺灣我們通常所用的溫度計是採用攝氏溫度，一般而言，額溫高於 37.5°C 或耳溫高於 38°C 可視為發燒。

而在美加地區，溫度計是採用華氏溫度，因為「華氏溫度＝攝氏溫度 $\times\frac{9}{5}+32$」，$38\times\frac{9}{5}+32=100.4$（°F），所以美加地區通常用華氏 100 度（°F）來判定是否發燒。

<table>
<tr><th>華氏（°F）</th><th>攝氏（°C）</th><th>額溫</th><th>耳溫</th></tr>
<tr><td>98.0</td><td>36.7</td><td rowspan="4">正常</td><td rowspan="5">正常</td></tr>
<tr><td>98.5</td><td>36.9</td></tr>
<tr><td>99.0</td><td>37.2</td></tr>
<tr><td>99.5</td><td>37.5</td></tr>
<tr><td>100.0</td><td>37.8</td><td rowspan="11">發燒</td></tr>
<tr><td>100.5</td><td>38.1</td><td rowspan="10">發燒</td></tr>
<tr><td>101.0</td><td>38.3</td></tr>
<tr><td>101.5</td><td>38.6</td></tr>
<tr><td>102.0</td><td>38.9</td></tr>
<tr><td>102.5</td><td>39.2</td></tr>
<tr><td>103.0</td><td>39.4</td></tr>
<tr><td>103.5</td><td>39.7</td></tr>
<tr><td>104.0</td><td>40.0</td></tr>
<tr><td>104.5</td><td>40.3</td></tr>
<tr><td>105.0</td><td>40.6</td></tr>
</table>

2-1 自我評量



① 上圖中，威利到速食店點餐，設 x 表示餐點的號碼，y 表示該套餐的價格，則 y 是否為 x 的函數？ 課 P53 例 1

② x、y 兩變數的關係如下，判別 y 是否為 x 的函數，在□中打「✓」。 課 P52 課文

(1)

x	0	0	0	0
y	1	2	3	4

□是　□否

(2)

x	0	1	2	3
y	1	1	1	1

□是　□否

(3)

x	0	1	2	3
y	0	1	2	3

□是　□否

(4)

x	0	1	2	0
y	0	1	2	3

□是　□否

解答：2。（4×19 的乘積是 76，是兩位數，所以 $x=2$）

3 姐弟共有 1200 元，若姐姐有 x 元，弟弟有 y 元，回答下列問題： 課 P55 例 3

(1) y 與 x 的關係式可寫成 $y=$____________。

(2) 當 $x=300$ 時，$y=$_________；當 $x=700$ 時，$y=$_________。

(3) 給定一個 x 的值時，是否都恰好只有一個對應的 y 值？
y 是 x 的函數嗎？

4 若函數 $y=2x-1$ 與函數 $y=-2x+7$，在 $x=k$ 的函數值相等，求 k 的值。

課 P56 例 5

5 若邊長為 x 的正六邊形，其周長為 y，則 y 是 x 的函數，回答下列問題：

(1) 寫出 x 與 y 的關係式。 課 P57 例 6

(2) 分別求此函數在 $x=5$ 及 $x=8$ 時的函數值。

2-2 線型函數與圖形

1 一次函數與常數函數

一次函數

自評 P75 第 1 題

在 2-1 中提到攝氏與華氏溫度的變換，若設攝氏溫度 x 度，華氏溫度 y 度，可得 y 與 x 的函數關係式是 $y=\frac{9}{5}x+32$，像這種形如 $y=ax+b$（$a\neq 0$），x 的次方是一次的函數，稱為**一次函數**。例如：$y=7x$ 與 $y=-x+3$ 都是一次函數。

在一次函數 $y=ax+b$ 中，ax 為**一次項**，b 為**常數項**，且稱 a 為一次項係數。

例 1　求一次項係數

自評 P75 第 2 題

一次函數 $y=ax+4$，在 $x=3$ 時的函數值為 -2，求 a 的值。

解　將 $x=3$ 代入 $y=ax+4$，得 $3a+4=-2$

$$3a=-6$$

$$a=-2$$

隨堂練習

一次函數 $y=3x-b$，在 $x=-2$ 時的函數值為 -8，求 b 的值。

例2 求一次函數

自評 P75 第 3 題

一次函數 $y=ax+b$，在 $x=2$ 時的函數值為 5，在 $x=3$ 時的函數值為 7，求此一次函數。

解 由 $x=2$ 時的函數值為 5，可得 $2a+b=5$……①

由 $x=3$ 時的函數值為 7，可得 $3a+b=7$……②

②式－①式可得 $a=2$

將 $a=2$ 代入①式可得 $4+b=5$

$b=1$

所以此一次函數為 $y=2x+1$。

隨堂練習

1. 一次函數 $y=ax+b$，在 $x=1$ 時的函數值為 4，在 $x=3$ 時的函數值為 10，求此一次函數。

2. 有一個一次函數，在 $x=1$ 時的函數值為 3，$x=-2$ 時的函數值為 1，求此一次函數。

常數函數

自評 P75 第 1 題

右圖中，機車停車一律 30 元，以 x（小時）表示機車的停車時間，y（元）表示機車停車費用：停車 2 小時（$x=2$），所需費用為 30 元（$y=30$）；停車 3.5 小時（$x=3.5$），所需費用仍為 30 元（$y=30$）。

不管停車多久，所需費用都是 30 元，我們可用 $y=30$ 來表示 x、y 的關係式。也就是說，當 $y=30$ 時，也可看成 $y=0x+30$，無論 x 的值是什麼數，所對應的 y 值皆為 30，其符合函數的意義「對每一個 x，都恰好只有一個 y 與它對應」，所以 $y=30$ 也是一個函數，這種形如 $y=b$ 的函數，稱為**常數函數**。

例 3 求常數函數

有一個常數函數 $y=b$，且當 $x=2$ 時的函數值為 -5，求此常數函數。

思路分析

常數函數 $y=b$，表示不論 x 的值是什麼數，其對應的函數值都是 b。

解 由在 $x=2$ 時的函數值為 -5，可得 $b=-5$

所以此常數函數為 $y=-5$。

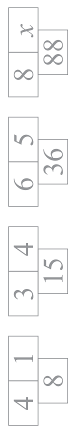
隨堂練習

1. 有一個常數函數 $y=c$，當 $x=100$ 時的函數值為 3，求此常數函數。

2. 有一個常數函數 $y=c$，當 $x=5$ 與 $x=-5$ 時，其函數值的和為 8，求此常數函數。

第 2 章

觀察每組數字的規律，x 應填入多少？



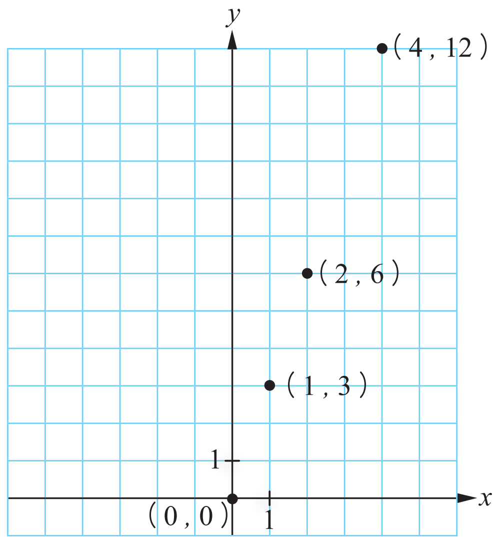
2 函數圖形

妙麗、艾美、威利三人到便利商店用 $A4$ 紙影印資料，每張的費用是 3 元。

妙麗印了 1 張 、艾美印了 2 張、威利印了 4 張，若以 x 表示張數，y 表示所需的費用，則 y 是 x 的函數。將變數 x、y 列表如右：

x（張）	0	1	2	4
y（元）	0	3	6	12

將上述中，變數 x 與所對應的函數值 y 以坐標形式 (x, y) 表示為 $(0, 0)$、$(1, 3)$、$(2, 6)$、$(4, 12)$。將這四點畫在坐標平面上，如右圖：

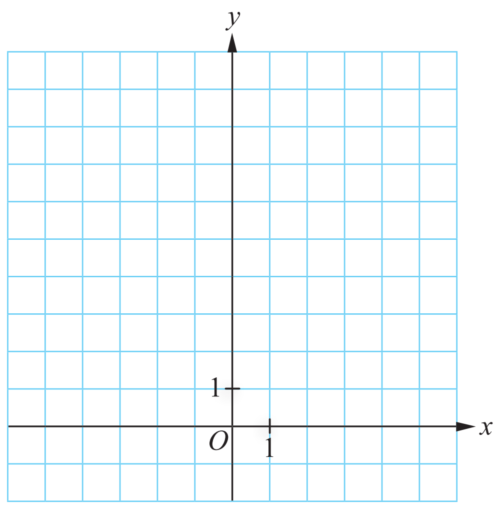


隨堂練習

1. 傑克、安琪、…… 等五人到加水站，分別買了 1 公升、2 公升、3 公升、4 公升、5 公升的水。設每公升的水售價 2 元，若 x 表示水的公升數，y 表示所需的費用（元），完成下表。

x	1	2	3	4	5
y					

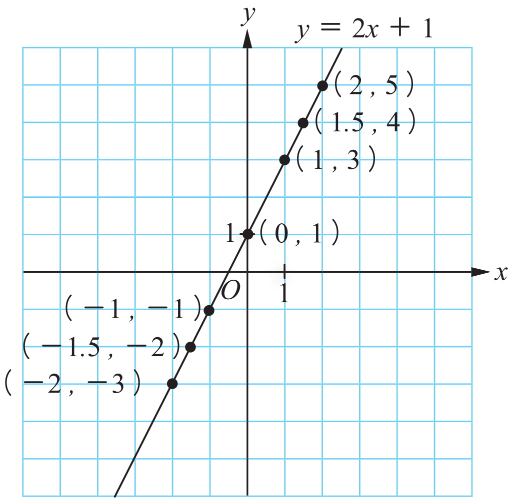
2. 在坐標平面上畫出左表中的五個點。



前面學過一次函數為 $y=ax+b\ (a\neq 0)$ 的形式，那麼其在坐標平面上的圖形會是什麼呢？以一次函數 $y=2x+1$ 為例，當變數 x 的值確定時，其所對應的 y 值如下：

x	-2	-1.5	-1	0	1	1.5	2
y	-3	-2	-1	1	3	4	5

將 $(-2,-3)$、$(-1.5,-2)$、$(-1,-1)$、$(0,1)$、$(1,3)$、$(1.5,4)$、$(2,5)$ 依序畫在坐標平面上，這些點都會在同一條直線上，如右圖。如果將更多合於條件的對應值列出，並將它們畫在坐標平面上，就會發現這些點會構成一條直線。也就是說，一次函數 $y=2x+1$ 的圖形，其實就是二元一次方程式 $2x-y+1=0$ 的圖形。



事實上，一次函數 $y=ax+b$，其中 x、y 的對應關係在坐標平面上的圖形為一條直線，同理常數函數 $y=b$ 也是一條直線。

例4 畫一次函數的圖形

自評 P76 第 4 題 (1)(2)(3)

在坐標平面上畫出一次函數 $y=3x-2$ 的圖形。

解

當 $x=0$ 時，所對應的函數值 $y=-2$，

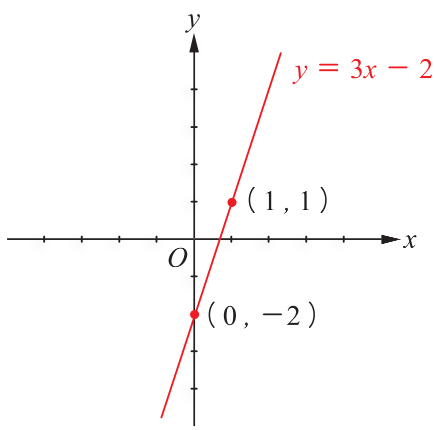
以 (x,y) 坐標表示為 $(0,-2)$；

當 $x=1$ 時，所對應的函數值 $y=1$，

以 (x,y) 坐標表示為 $(1,1)$；

在坐標平面上畫出通過這兩點的

直線，即是 $y=3x-2$ 的圖形。



解答：10。（下÷左−1=右，即 $x=88\div 8-1=10$）

隨堂練習

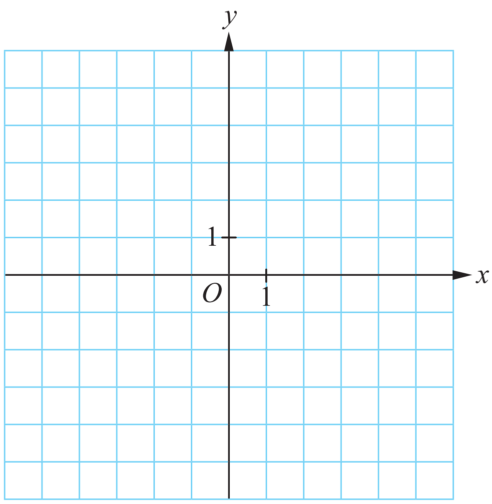
在坐標平面上畫出下列一次函數的圖形：

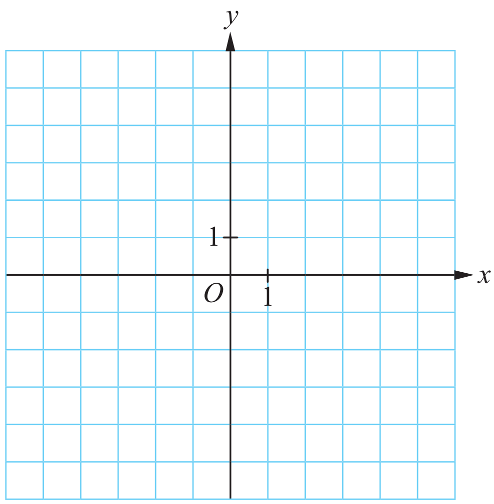
(1) $y=2x-1$

x	-1	1
y		

(2) $y=-x+3$

x		
y		





例5 畫常數函數的圖形

自評 P76 第 4 題 (4)

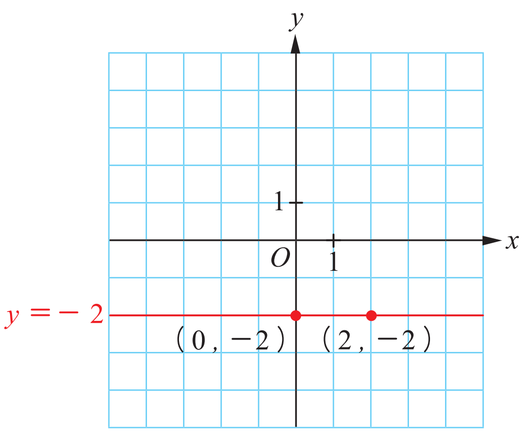
在坐標平面上畫出函數 $y=-2$ 的圖形。

思路分析 函數 $y=-2$ 表示不論 x 的值為何，對應的函數值都是 -2。

解 找出兩組對應的 x、y 值：

x	0	2
y	-2	-2

將 $(0,-2)$、$(2,-2)$ 標示在坐標平面上，再畫出通過此兩點的直線，此直線即為函數 $y=-2$ 的圖形。

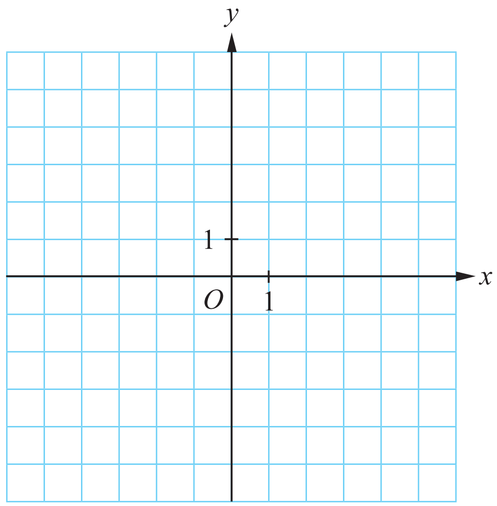


隨堂練習

在坐標平面上畫出下列各函數的圖形：

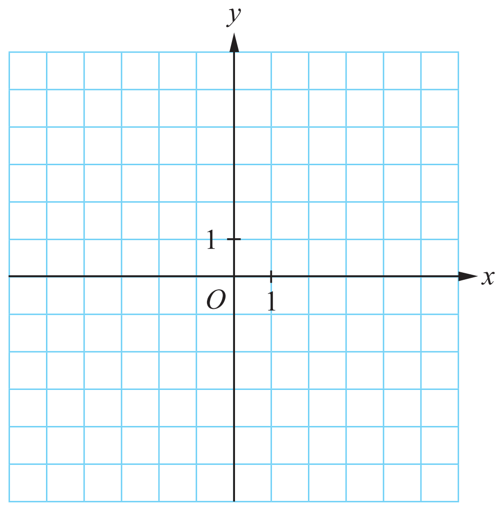
(1) $y=4$

x		
y		



(2) $y=0$

x		
y		



由 例5 與 隨堂練習 可知，像 $y=-2$、$y=0$、$y=4$ 這類常數函數的圖形為平行於 x 軸的直線，而常數函數 $y=0$ 的圖形就是 x 軸。

一次函數與常數函數的圖形都是一直線，這兩種函數都稱為**線型函數**。

線型函數

形如 $y=ax+b$ 的函數，稱為線型函數。其中，

(1) 當 $a\neq 0$ 時，$y=ax+b$ 稱為一次函數。

(2) 當 $a=0$ 時，$y=b$ 稱為常數函數。

例6 已知兩點，求線型函數

自評 P77 第 5 題

已知一個線型函數，其圖形通過 $(2,-4)$ 與 $(-1,5)$ 兩點，求：

(1)此線型函數。

(2)此圖形與 y 軸的交點坐標。

解 (1)設此線型函數為 $y=ax+b$，

因為函數圖形通過 $(2,-4)$ 與 $(-1,5)$ 兩點，

分別代入 $y=ax+b$，可得 $\begin{cases} 2a+b=-4 \cdots\cdots\text{①} \\ -a+b=5 \cdots\cdots\text{②} \end{cases}$

由①式－②式得 $3a=-9$，$a=-3$

將 $a=-3$ 代入①式得 $(-6)+b=-4$，$b=2$

所以此線型函數為 $y=-3x+2$。

(2)與 y 軸的交點坐標為 $x=0$ 所對應的函數值 $y=2$，即 $(0,2)$。

隨堂練習

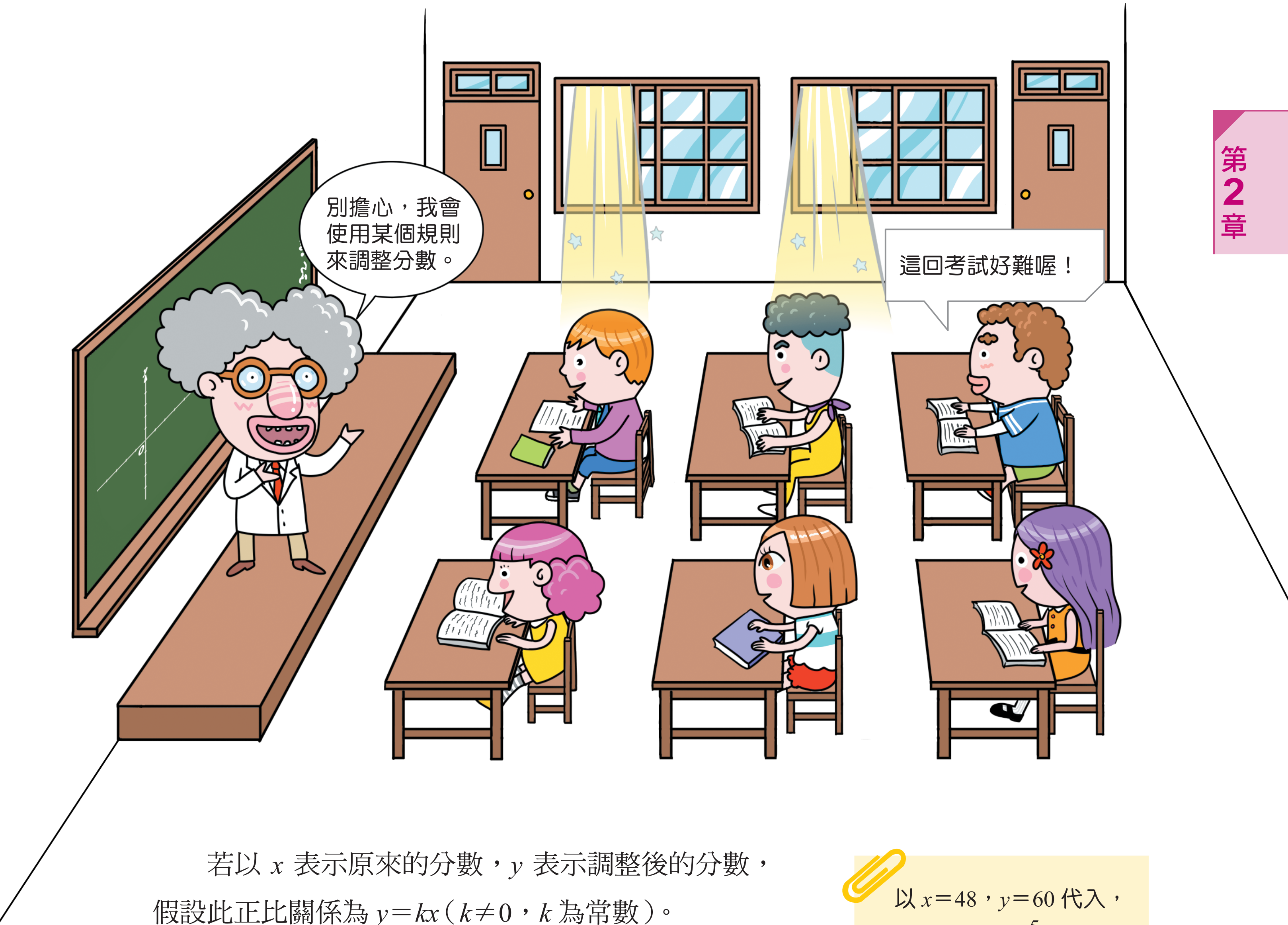
已知一個線型函數，其圖形通過 $(-1,-4)$ 與 $(3,4)$ 兩點，求：

(1)此線型函數。

(2)當 x 坐標為 5 時，所對應的 y 坐標為多少？

3 函數的應用

大智國中八年 3 班某次數學小考，全班分數偏低，博士想利用正比關係來調整分數，他計畫將全班最高分數 80 分調整成 100 分，原分數 48 分調整成 60 分，原來分數 0 分調整後還是 0 分。

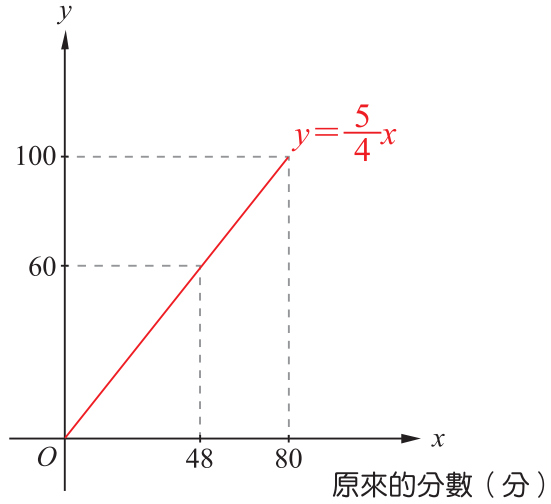


若以 x 表示原來的分數，y 表示調整後的分數，假設此正比關係為 $y=kx$（$k\neq 0$，k 為常數）。以 $x=80$，$y=100$ 代入得 $100=80k$，$k=\frac{5}{4}$。

以 $x=48$，$y=60$ 代入，也能得到 $k=\frac{5}{4}$。

所以博士是使用 $y=\frac{5}{4}x$ 的正比關係作為調整分數的依據，將 x 與 y 的關係畫在坐標平面上，如右圖。

由上可得：**當 y 與 x 成正比關係時，其圖形為通過原點的斜直線。**



隨堂練習

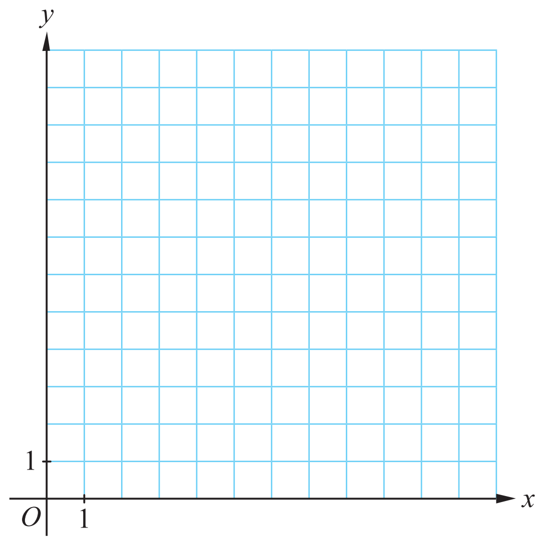
自評 P77 第 6 題

已知當 y 與 x 成正比關係時，可寫成 $y=kx$（$k\neq 0$，k 為常數）。某次考試，老師利用正比關係調整分數，並將全班最高的 75 分調整成 100 分，若以 x 表示原來的分數，y 表示調整後的分數，回答下列問題：

(1) 寫出此關係式。

(2) 畫出此正比關係的圖形。

(3) 若潔寧考 60 分，調整後為多少分？

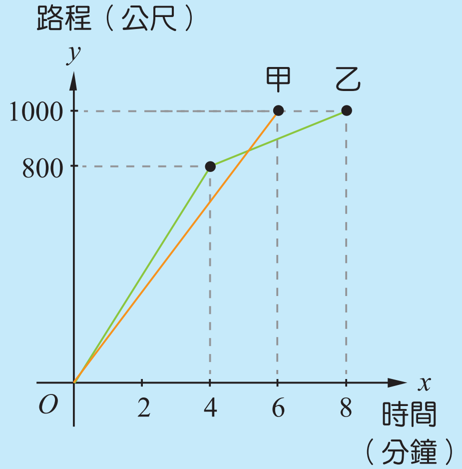


例7 函數的應用問題

端午節期間某地舉行 1000 公尺的龍舟競賽，甲、乙兩隊伍比賽的函數關係如圖所示，回答下列問題：

(1) 第 4 分鐘時，哪支隊伍領先？

(2) 乙隊在第 4 分鐘經減速後至抵達終點前，為通過 $(4, 800)$ 與 $(8, 1000)$ 的線型函數，求乙隊在 4 分鐘到 8 分鐘的函數關係式。



解 (1) 觀察圖形可知，4 分鐘時，乙隊划行 800 公尺，甲隊划行的路程少於 800 公尺，所以乙隊處於領先地位。

(2) 設乙隊在第 4 分鐘減速後至抵達終點前，路程 y（公尺）與時間 x（分鐘）的函數關係為 $y=ax+b$，因為點 $(4, 800)$ 和 $(8, 1000)$ 在直線上，

所以 $\begin{cases} 4a+b=800 \cdots\cdots\cdots ① \\ 8a+b=1000 \cdots\cdots\cdots ② \end{cases}$

②式－①式得 $4a=200$，$a=50$。

將 $a=50$ 代入②式得 $b=600$

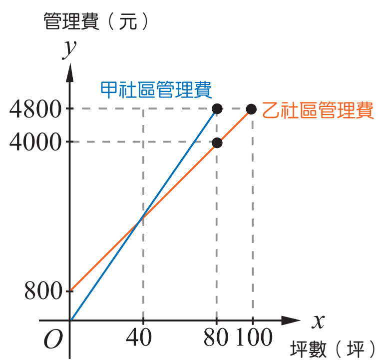
故所求的函數關係式為 $y=50x+600$。

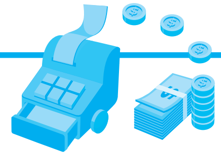
隨堂練習

甲、乙兩社區，甲社區與乙社區管理費與坪數的函數關係，如圖所示。回答下列問題：

(1) 在 80 坪時，甲社區的管理費比乙社區多幾元？

(2) 甲、乙兩社區管理費與坪數的函數關係式分別為何？





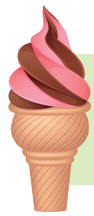
收支平衡分析 社會

生活中，一次函數常應用在商業上的收支平衡分析。以超商販賣霜淇淋為例：販賣霜淇淋會有成本與收入的問題，當總成本與總收入相等時，即為收支平衡。

總成本

❶ 一臺霜淇淋機的價格為 20 萬元
❷ 霜淇淋每支的製造成本為 15 元

設生產 x 支霜淇淋的總成本為 y 元，
關係式為：$y=15x+200000$



總收入

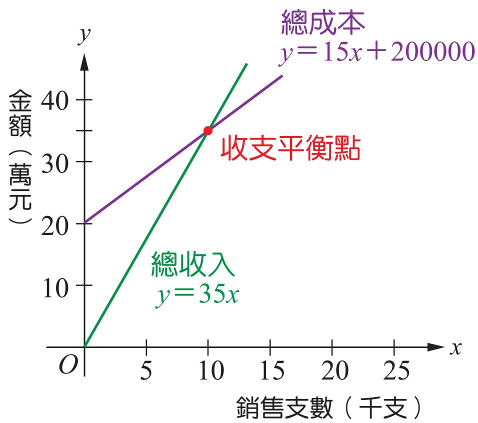
超商的霜淇淋每支定價 35 元

設銷售 x 支霜淇淋的總收入為 y 元，
關係式為：$y=35x$

當函數 $y=15x+200000$ 與函數 $y=35x$ 的函數值相等時所求出的 x 值，就是收支平衡時的銷售量。

即 $15x+200000=35x$，解得 $x=10000$。

也就是這家超商在售出 10000 支霜淇淋時，總收入為 350000 元，才可收支平衡，由右圖可看出結果。



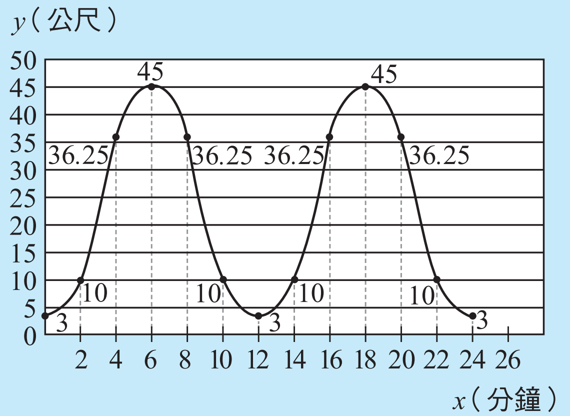
隨堂練習

已知超商的咖啡機價格為 10 萬元，且每杯咖啡的製造成本為 20 元，售價是 45 元，則當咖啡銷售幾杯時，可以達到收支平衡？

我們知道線型函數的圖形是一條直線，以下的圖形雖然不是直線，但它也是一種函數圖形。

例 8 非直線的函數圖形

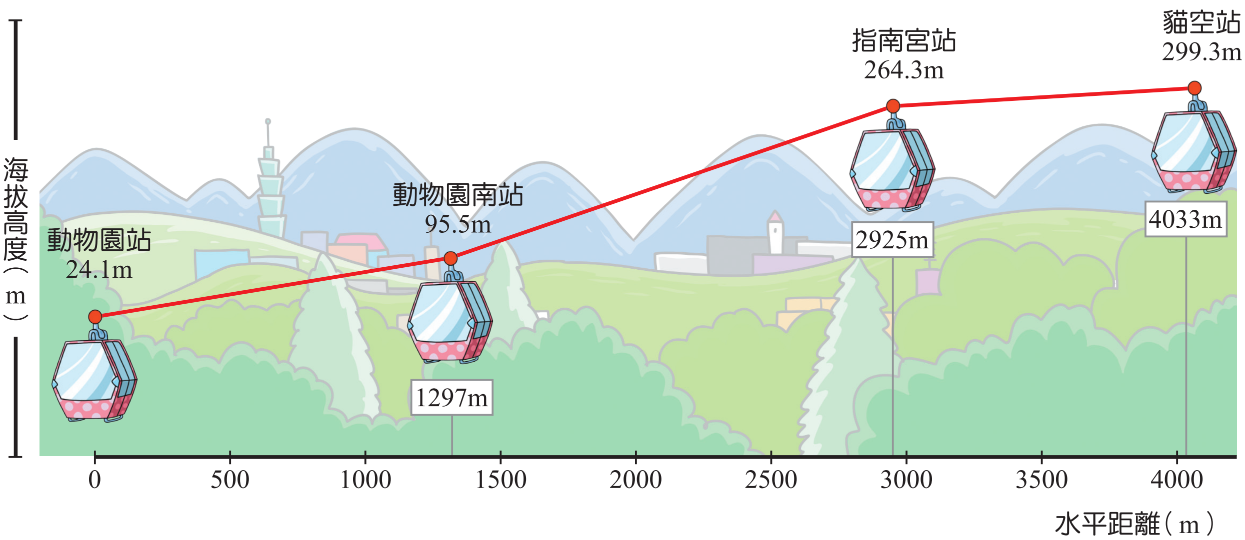
右圖是摩天輪的時間與高度之間的關係圖。每一個時間都對應到一個高度，因此它是函數的對應關係，如果以 x 表示時間，y 表示該時間點所對應的高度，分別求出 $x=0$、$x=6$、$x=22$ 時，所對應的 y 值。



解 $x=0$ 時，所對應的 $y=3$；$x=6$ 時，所對應的 $y=45$；$x=22$ 時，所對應的 $y=10$。

隨堂練習

下圖是貓空纜車的水平距離與海拔高度的示意圖，依據該圖回答下列問題：



(1) 設動物園站為起點，離動物園站 2925 公尺所對應的海拔高度是多少公尺？其站名為何？

(2) 貓空站和動物園站的海拔高度差多少公尺？

重點回顧

❶ 線型函數

形如 $y=ax+b$ 的函數，稱為線型函數。其中，

(1) 當 $a\neq 0$ 時，$y=ax+b$ 稱為一次函數。

例 $y=x+3$，$y=\frac{1}{2}x$ 皆是一次函數。

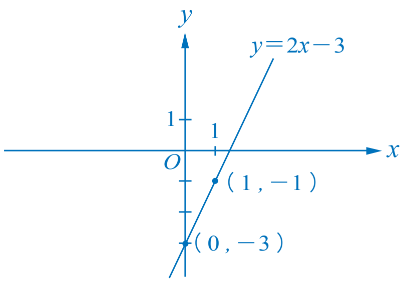
(2) 當 $a=0$ 時，$y=b$ 稱為常數函數。

例 $y=-2$，$y=5$ 皆是常數函數。

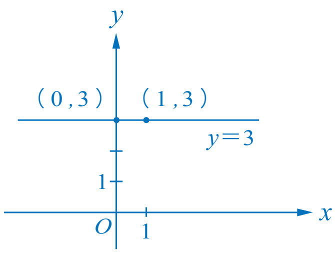
❷ 線型函數圖形

在坐標平面上，將 $y=ax+b$ 所有點 (x, y) 標示出來，所得到的圖形就是線型函數 $y=ax+b$ 的圖形。

例 (1) 一次函數 $y=2x-3$ 的圖形，如下圖所示：



(2) 常數函數 $y=3$ 的圖形，如下圖所示：



2-2自我評量

1 判別下列各函數為一次函數或常數函數，並在□中打「✓」。 課 P61、63 課文

(1) $y=2$ □一次函數 □常數函數

(2) $y=3x-5$ □一次函數 □常數函數

(3) $y=\frac{2}{5}$ □一次函數 □常數函數

(4) $y=6x$ □一次函數 □常數函數

(5) $y=2-x$ □一次函數 □常數函數

2 已知一次函數 $y=ax-7$，在 $x=2$ 時的函數值為 -1，求 a 的值。 課 P61 例 1

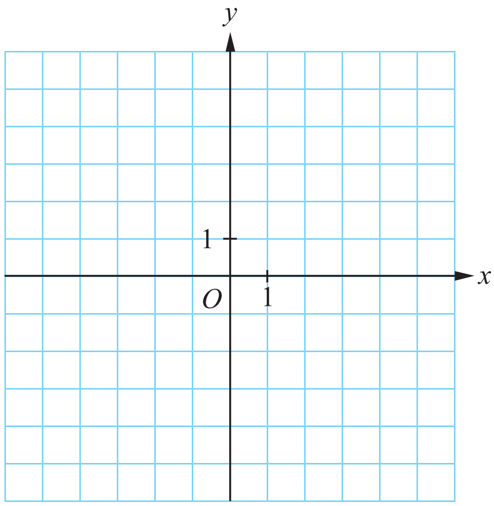
3 已知 $y=ax+b$ 為一次函數，當 $x=0$ 時的函數值為 5，當 $x=2$ 時的函數值為 -3，求： 課 P62 例 2

(1) 此一次函數。

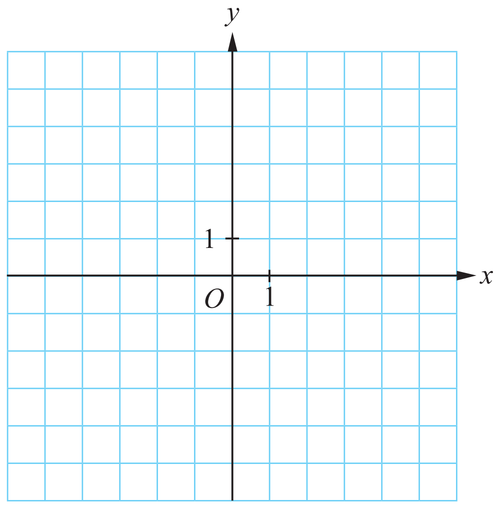
(2) 當 $x=5$ 時的函數值為何？

4 在坐標平面上畫出下列各函數的圖形：

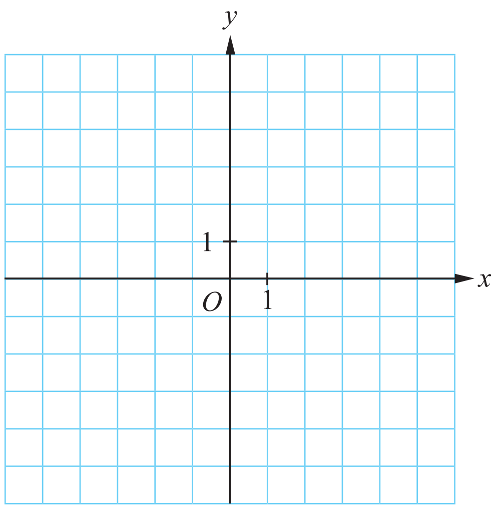
(1) $y=-x$ 課 P65 例 4



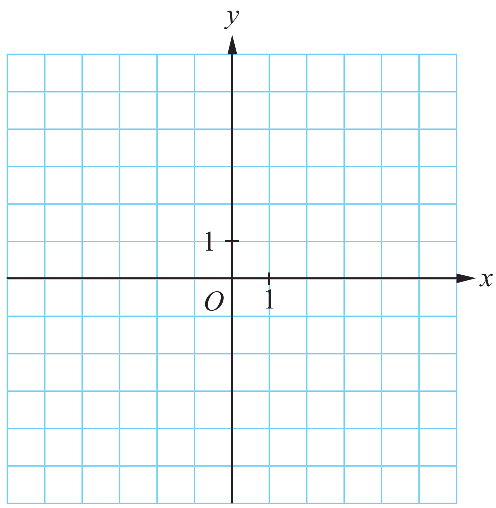
(2) $y=2x-4$ 課 P65 例 4



(3) $y=-2x+5$ 課 P65 例 4



(4) $y=-3$ 課 P66 例 5



5 已知一個線型函數，其圖形通過 $(-1, 2)$ 與 $(3, 10)$ 兩點，且分別與 x 軸、y 軸交於 A、B 兩點，求：⑴此一次函數。 ⑵A、B 兩點的坐標。 課 P68 例 6

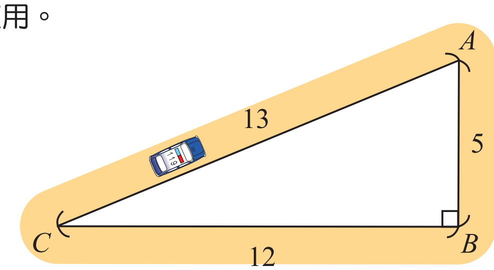
6 興東文具行舉辦周年慶促銷活動，已知促銷方式是將原來的價格用線型函數 $y=ax$ 調整成新的價格，使得原來 40 元的文具變成 28 元，則： 課 P70 隨堂

⑴原來價格 80 元的文具，調整後變成多少元？

⑵原來價格多少元的文具，調整後變成 140 元？

自我挑戰

本單元為統整課程，由學生自行挑戰，教師可視班級情況決定如何運用。



如圖，$\triangle ABC$ 為直角三角形的玩具車軌道，$\angle B$ 為直角，$\overline{AB}=5$，$\overline{BC}=12$，有一輛小汽車沿著 $A \to B \to C \to A$ 移動，回答下列問題：

(1)若小汽車從 A 點移動到 $\overline{AB}$ 邊上的某一點 P 時（不含 A、B 兩點），共移動了 x 個單位，此時$\triangle ACP$ 的面積為 y 平方單位，則：

①將 y 與 x 的關係式，寫成 $y=ax+b$ 的型式。　②當 $x=2$ 時，求 y 的值。

解

(2)若小汽車從 A 點移動到 $\overline{BC}$ 邊上的某一點 Q 時（不含 B、C 兩點），共移動了 x 個單位，此時$\triangle ACQ$ 的面積為 y 平方單位，則：

①將 y 與 x 的關係式，寫成 $y=ax+b$ 的型式。　②當 $x=11$ 時，求 y 的值。

解

解答P215、216

數學萬花筒

海拔高度與溫度的關係

日常生活中，從平地上到山上會感覺到溫度變低了，高度越高溫度越低。一般而言；對流層中溫度會隨高度增加而降低，通常乾空氣的環境下，每上升 100 公尺，溫度會減低約 0.98 度，而空氣濕度越高，下降的溫度會變少。

以下的例子說明高山上溫度的變化：

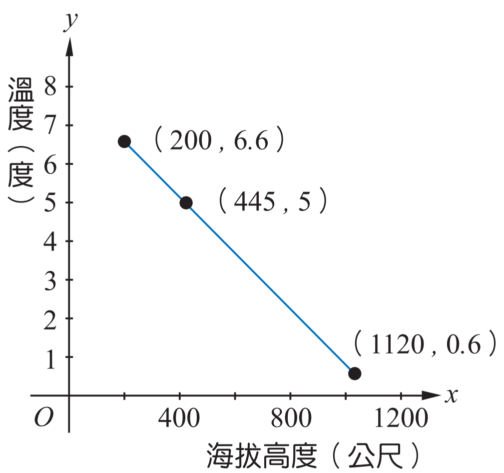
在 12 月的某一天陽明山花鐘附近的溫度是攝氏 5 度，不知道七星山的山頂會不會下雪？經查資料知道，陽明山花鐘的海拔高 445 公尺，而七星山的山頂海拔高 1120 公尺，且當天下著細雨應屬濕空氣，如果每上升 100 公尺溫度下降攝氏 0.65 度，我們可以推測此時七星山的山頂溫度如下：

$$5-0.65\times\frac{1120-445}{100}\fallingdotseq 0.6\text{（度）}$$

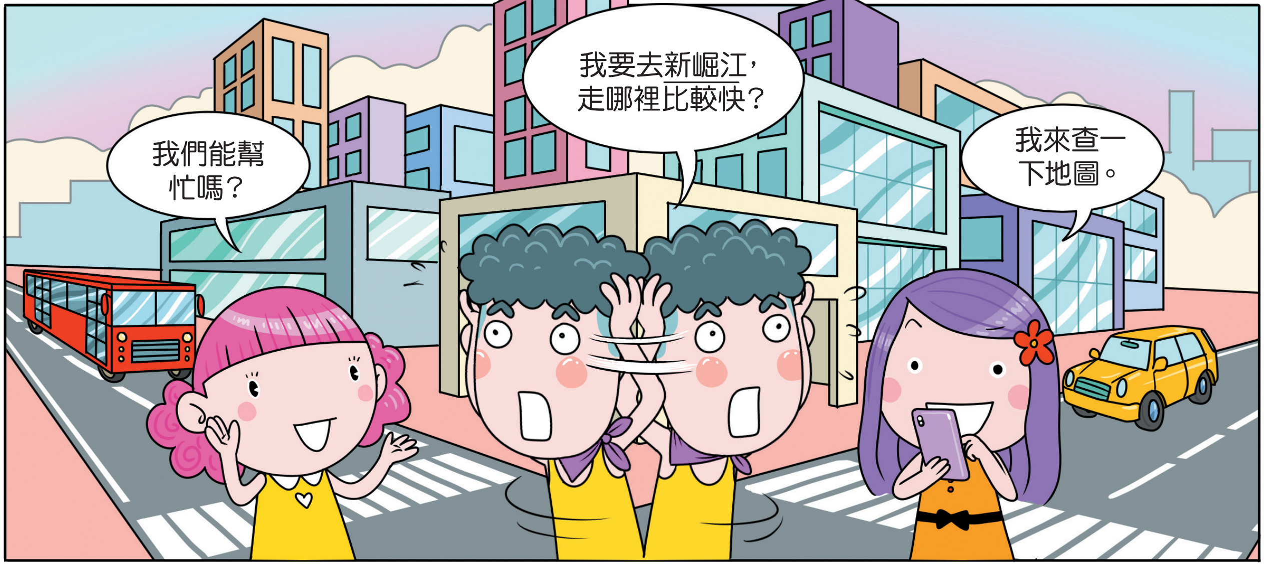
陽明山國家公園海拔高度在 200 公尺至 1120 公尺之間。

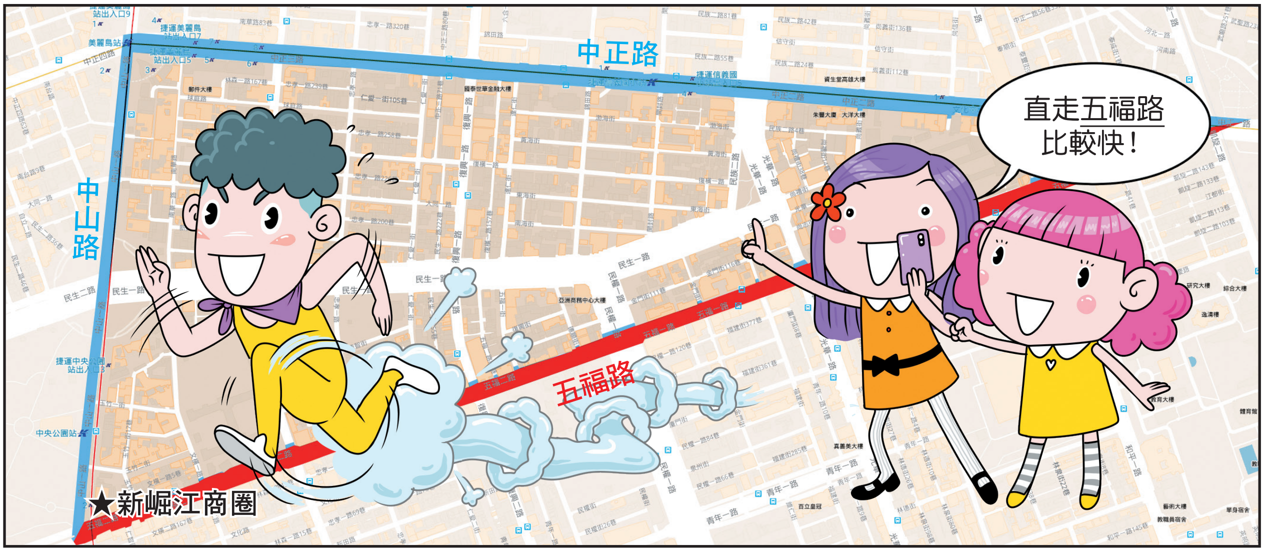
由此可知，在水氣充足的條件下，七星山可能下雪了。

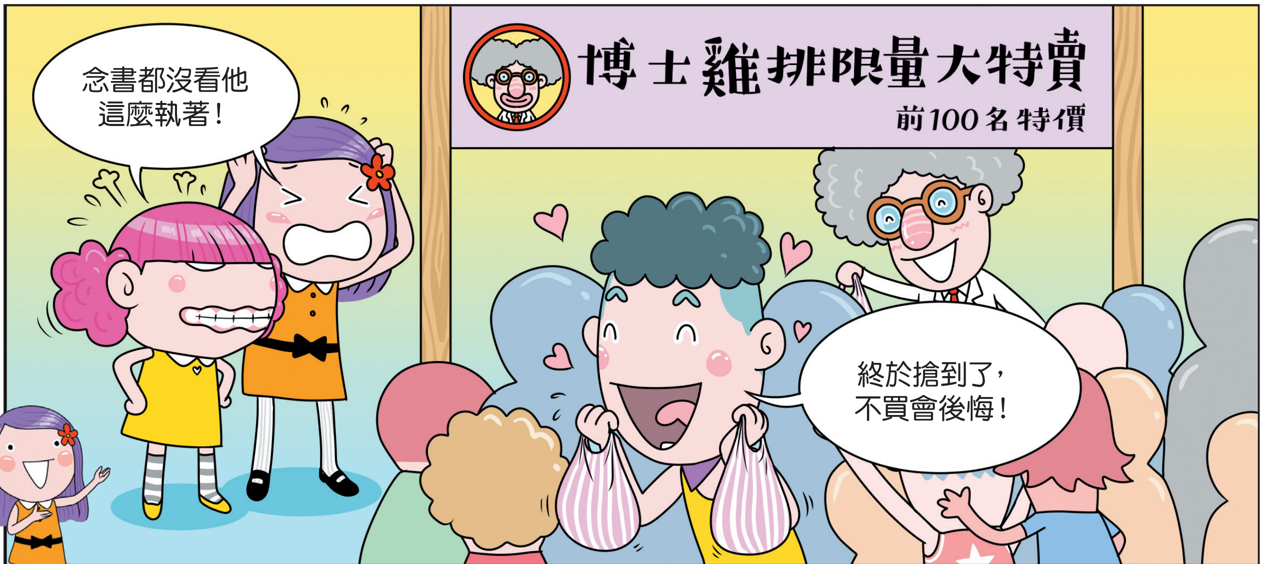
如果希望知道當時陽明山更多地方的溫度，可以利用函數圖形，在查知海拔高度後就可以求得大概的溫度。首先假設此時距離海平面 x 公尺高度的溫度是 $y^\circ\mathrm{C}$，則 x 與 y 的關係式可以寫成 $y=5-0.65\times\dfrac{x-445}{100}$，圖形如右。



3 三角形的基本性質







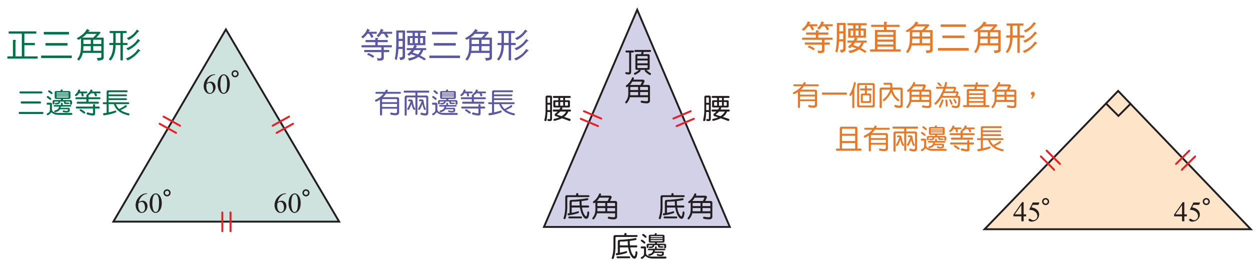
為什麼走五福路會比較快呢？翻開課本 P148 就知道囉！

學習前哨站

本單元為學生自我複習，
教師可視班級情況決定如何運用。

回顧 1 等腰三角形

國小 4 年級



課前練習

1. 如果等腰三角形的頂角為 50°，則它的一個底角是________度。
2. 如果等腰三角形的一個底角為 60°，則它的頂角是________度。

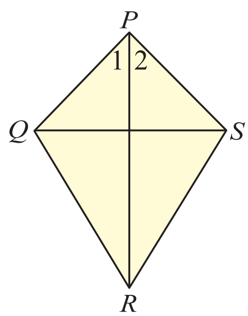
回顧 2 線對稱圖形

7 上第 4 章

如圖，四邊形 $PQRS$ 為線對稱圖形，其中 $\overline{PR}$ 為對稱軸，則：

(1) Q 點的對稱點為 S 點。 (2) $\overline{PQ}$ 的對稱邊為 $\overline{PS}$。

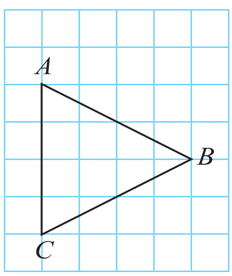
(3) $\angle 1$ 的對稱角為 $\angle 2$。 (4) $\overline{PR}$ 垂直平分 $\overline{QS}$。



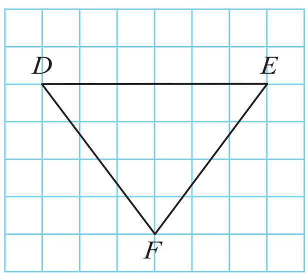
課前練習

畫出下列圖形的對稱軸：

(1) $\overline{AB}=\overline{BC}$

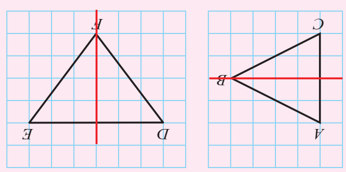


(2) $\overline{DF}=\overline{EF}$



解答：1. 65、60

2.



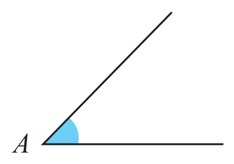
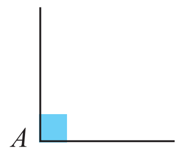
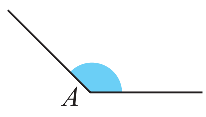
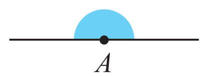
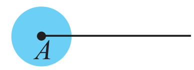
3-1 內角與外角

① 角

首先，我們複習角的種類，再學習兩個角的關係。

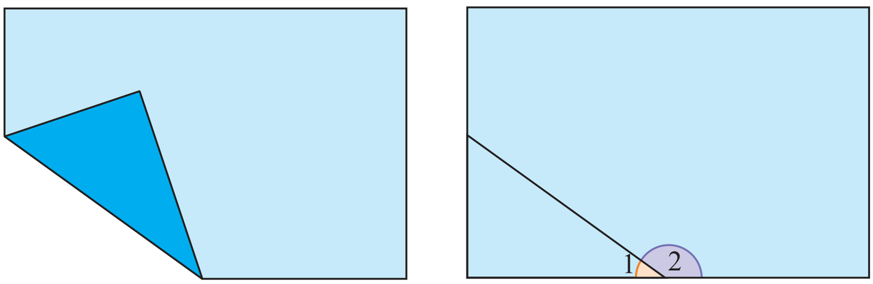
角的種類

依據角的度數可分類如下：

銳角	直角	鈍角	平角	周角
				
$0^\circ<\angle A<90^\circ$	$\angle A=90^\circ$	$90^\circ<\angle A<180^\circ$	$\angle A=180^\circ$	$\angle A=360^\circ$

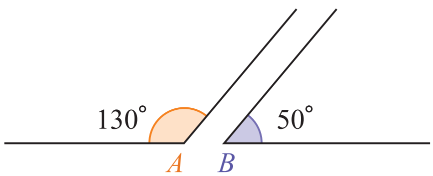
互補與互餘

拿出一張長方形的紙，在其中一個邊摺出兩個角，如下圖中的∠1 與∠2，則∠1＋∠2＝180°。



在上面的操作中，∠1 與∠2 這兩個角的度數和為 180°，此時稱其中一個角為另一角的**補角**，或是這兩個角互為補角，簡稱**互補**。

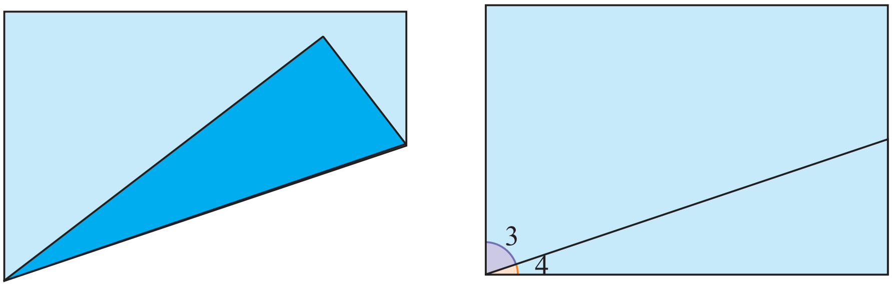
右圖中，∠A＝130°，∠B＝50°，因為∠A＋∠B＝180°，所以∠A 和∠B 互補。



第3章

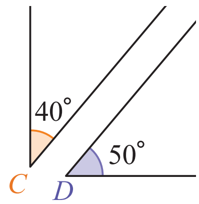
觀察上列英文字母的形狀，哪一個應該被拿走？

再拿出另一張長方形的紙，將長方形的其中一個內角摺成兩個角，如下圖中的 $\angle 3$ 與 $\angle 4$，則 $\angle 3+\angle 4=90^\circ$。



在上面的操作中，$\angle 3$ 與 $\angle 4$ 這兩個角的度數和為 90°，此時稱其中一個角為另一角的**餘角**，或是這兩個角互為餘角，簡稱**互餘**。

右圖中，$\angle C=40^\circ$，$\angle D=50^\circ$，因為 $\angle C+\angle D=90^\circ$，所以 $\angle C$ 和 $\angle D$ 互餘。



例1 補角與餘角

自評 P99 第 1 題

已知 $\angle A=125^\circ$，$\angle B$ 與 $\angle A$ 互補，且 $\angle B$ 與 $\angle C$ 互餘，求 $\angle B$、$\angle C$ 的度數。

解 $\angle B$ 與 $\angle A$ 互補，即 $\angle A+\angle B=180^\circ$，$\angle B=180^\circ-\angle A=180^\circ-125^\circ=55^\circ$。

$\angle B$ 與 $\angle C$ 互餘，即 $\angle B+\angle C=90^\circ$，$\angle C=90^\circ-\angle B=90^\circ-55^\circ=35^\circ$。

隨堂練習

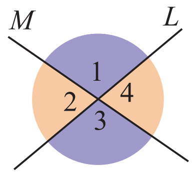
1. 已知 $\angle A$ 與 $\angle B$ 互餘，且 $\angle A$ 與 $\angle C$ 互餘。若 $\angle B=27^\circ$，求 $\angle C$。

2. 已知 $\angle A$ 與 $\angle B$ 互補，且 $\angle B$ 與 $\angle C$ 互補。若 $\angle A=100^\circ$，求 $\angle C$。

由 隨堂練習 可知，等角的餘角會相等，等角的補角也會相等。

對頂角

直線 L 與直線 M 相交於一點，形成$\angle 1$、$\angle 2$、$\angle 3$、$\angle 4$ 四個角，其中不相鄰的兩個角，稱為一組**對頂角**，如右圖。$\angle 1$ 和$\angle 3$ 為一組對頂角，$\angle 2$ 和$\angle 4$ 則是另一組對頂角。因為$\angle 1+\angle 2=180^\circ$且$\angle 2+\angle 3=180^\circ$，所以$\angle 1=\angle 3$。同理，$\angle 2=\angle 4$。

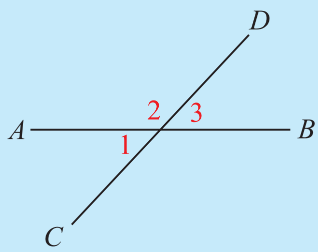


對頂角相等

兩直線相交於一點時，所形成的對頂角相等。

例2 對頂角的應用

如圖，$\overline{AB}$、$\overline{CD}$ 交於一點，且$\angle 1=(x+20)^\circ$，$\angle 3=(2x-7)^\circ$，求$\angle 1$、$\angle 2$ 的度數。



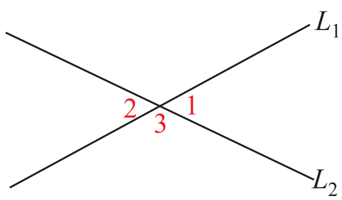
解 因為$\angle 1=\angle 3$（對頂角相等），所以 $x+20=2x-7$，$x=27$。

$\angle 1=(27+20)^\circ=47^\circ$

$\angle 2=180^\circ-\angle 1=180^\circ-47^\circ=133^\circ$

隨堂練習

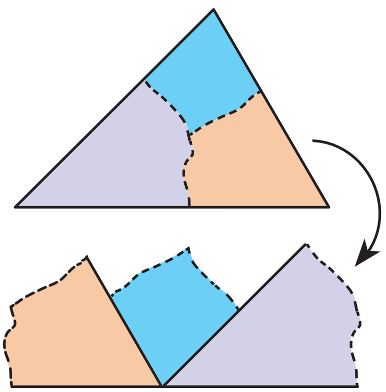
如圖，直線 L_1、L_2 相交於一點，若$\angle 1=(7x-2)^\circ$，$\angle 2=(5x+14)^\circ$，求$\angle 3$ 的度數。



解答：R。（剩餘的都是線對稱圖形）

2 三角形的內角和定理 可搭配附件 5

不論是哪一種三角形，我們以切割拼補的方式，可以得知它的三個內角可以拼成一個平角（180°），也就是任意三角形的內角和為 180°。

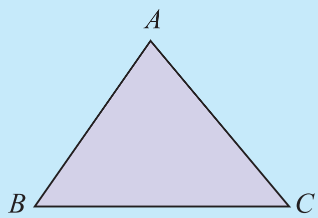


三角形的內角和定理

任意三角形的內角和為 180°。

例 3 三角形的內角和

如右圖，$\triangle ABC$ 中，$\angle A+\angle B=130^\circ$，求 $\angle C$ 的度數為何？



解 由三角形內角和為 180° 可得

$$\angle A+\angle B+\angle C=180^\circ$$
$$130^\circ+\angle C=180^\circ$$
$$\angle C=50^\circ$$

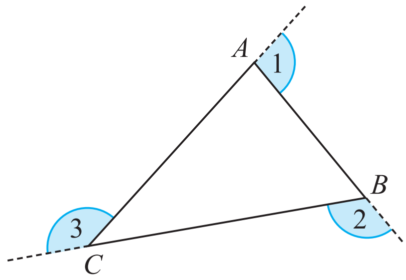
隨堂練習

直角三角形 ABC 中，$\angle B=90^\circ$，則 $\angle A+\angle C$ 的度數為何？

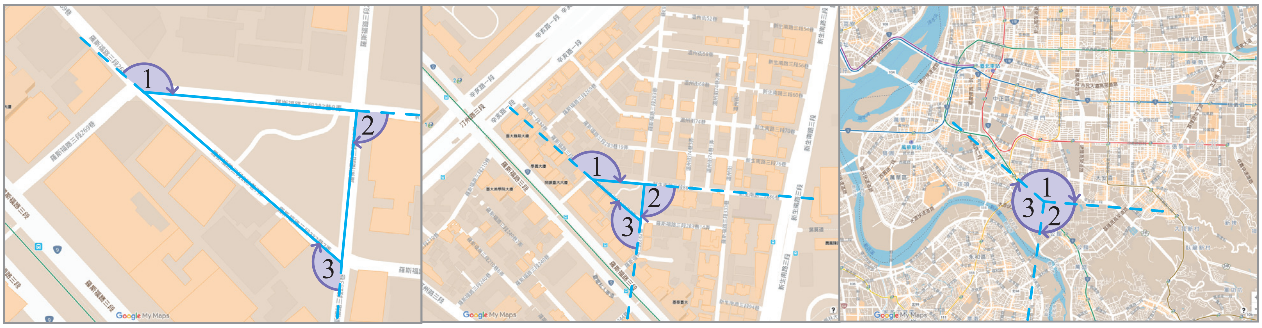
由 隨堂練習 可知，直角三角形的兩個銳角互餘。

③ 三角形的外角

三角形一內角的一邊和另一邊的延長線所夾的角，稱為這個內角的**外角**，所以每一個內角都與它的外角互補。在右圖的 $\triangle ABC$ 中，$\angle 1$ 是 $\angle BAC$ 的外角，$\angle 2$ 是 $\angle ABC$ 的外角，$\angle 3$ 是 $\angle ACB$ 的外角。

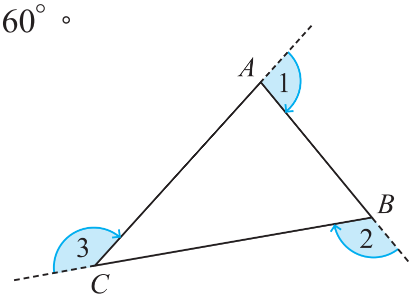


如下圖，臺北市的溫州公園是一座三角形公園，如果以順時針方向繞此公園行走，則在頂點旋轉的角度分別是 $\angle 1$、$\angle 2$、$\angle 3$。我們運用 *Google* 地圖中的縮放功能，來看看這組外角的總和是多少度呢？

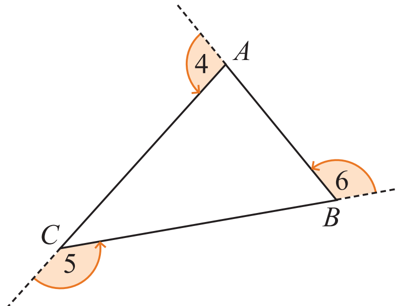


當我們一直按 *Google* 地圖中的 − ，三角形公園會漸漸縮小最後變成一個點，此時三角形這一組外角的和剛好形成一個周角，也就是 360°。

在右圖的 $\triangle ABC$ 中，順時針繞三角形一圈，在頂點旋轉的角度分別是 $\angle 1$、$\angle 2$、$\angle 3$，我們稱 $\angle 1$、$\angle 2$、$\angle 3$ 是 $\triangle ABC$ 的一組外角。

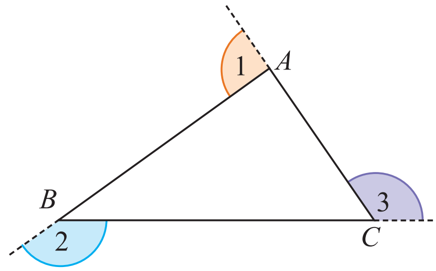


同理，逆時針繞三角形一圈，在頂點旋轉的角度分別是 $\angle 4$、$\angle 5$、$\angle 6$，我們稱 $\angle 4$、$\angle 5$、$\angle 6$ 是 $\triangle ABC$ 的另一組外角。



從上述可知，任意三角形的一組外角和剛好形成一個周角，也就是 360°。

我們也可以利用三角形的三個內角和為 180° 來推出三角形的外角和。



右圖中，$\angle BAC+\angle 1=180^\circ$ ⋯⋯⋯⋯⋯⋯ ①

$\angle ABC+\angle 2=180^\circ$ ⋯⋯⋯⋯⋯⋯ ②

$\angle ACB+\angle 3=180^\circ$ ⋯⋯⋯⋯⋯⋯ ③

由①＋②＋③得：$(\angle BAC+\angle ABC+\angle ACB)+(\angle 1+\angle 2+\angle 3)=180^\circ\times 3$，

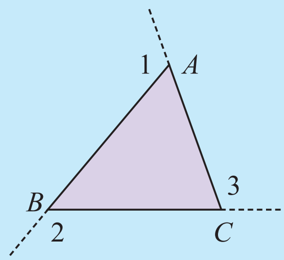
因為 $\angle BAC+\angle ABC+\angle ACB=180^\circ$（三角形內角和 180°），

所以 $\angle 1+\angle 2+\angle 3=540^\circ-180^\circ=360^\circ$。

例4 三角形的外角和

自評 P99 第 2 題

如圖，$\angle 1$、$\angle 2$、$\angle 3$ 分別為 $\angle BAC$、$\angle ABC$、$\angle ACB$ 的外角。若 $\angle 1=120^\circ$，$\angle 2=130^\circ$，求 $\angle 3$。



解 因為三角形外角和 360°，

所以 $\angle 1+\angle 2+\angle 3=360^\circ$

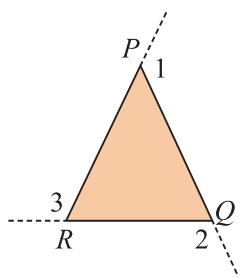
$120^\circ+130^\circ+\angle 3=360^\circ$

$\angle 3=110^\circ$

「因為」可用符號「∵」表示，
「所以」可用符號「∴」表示。

隨堂練習

如圖，$\angle 1$、$\angle 2$、$\angle 3$ 分別為 $\angle RPQ$、$\angle PQR$、$\angle PRQ$ 的外角。若 $\angle 1=130^\circ$，求 $\angle 2+\angle 3$。



4 三角形的外角定理

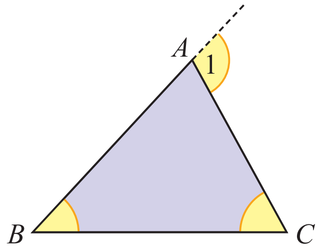
在三角形中，與一個外角不相鄰的兩個內角，都稱為這個外角的**內對角**。

如圖，$\angle 1$ 為 $\triangle ABC$ 中 $\angle BAC$ 的外角，$\angle 1$ 的兩個內對角為 $\angle B$ 和 $\angle C$。

由 $\begin{cases} \angle BAC + \angle 1 = 180^\circ \\ \angle BAC + \angle B + \angle C = 180^\circ \end{cases}$ ← 一個內角與它的外角互補 ← 三角形的內角和為 180°

可知 $\cancel{\angle BAC} + \angle 1 = \cancel{\angle BAC} + \angle B + \angle C$

因此 $\angle 1 = \angle B + \angle C$



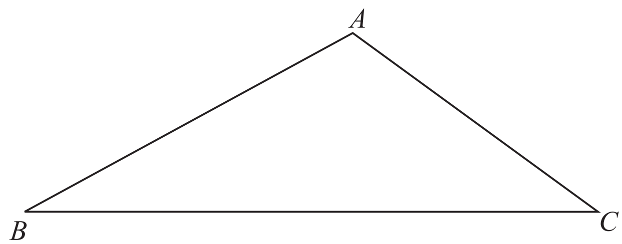
三角形的外角定理

三角形任一個外角等於兩個內對角的和。

隨堂練習

回答下列問題：

(1)如圖，在 $\triangle ABC$ 中，畫出 $\angle B$ 的一個外角，並將此外角標示為 $\angle 2$。

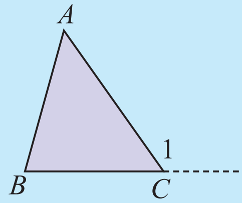


(2)承(1)，則 $\angle 2 = \angle A +$ ________。

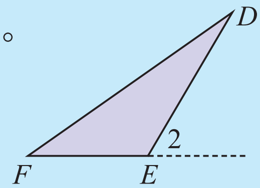
例5 三角形的外角定理

自評 P99 第 3 題

1. 如圖，$\triangle ABC$ 中，$\angle 1$ 是 $\angle ACB$ 的一個外角。若 $\angle A=50^\circ$，$\angle B=75^\circ$，求 $\angle 1$。



2. 如圖，$\triangle DEF$ 中，$\angle 2$ 是 $\angle DEF$ 的一個外角。若 $\angle D=25^\circ$，$\angle 2=60^\circ$，求 $\angle F$。



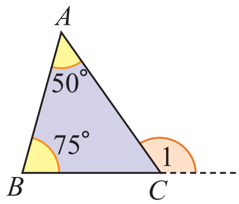
解

1. $\because \angle 1$ 為 $\angle ACB$ 的一個外角

$\therefore \angle 1=\angle A+\angle B$

$=50^\circ+75^\circ$

$=125^\circ$



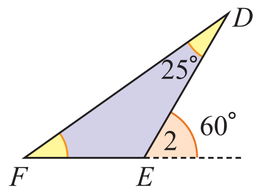
2. $\because \angle 2$ 為 $\angle DEF$ 的一個外角

$\therefore \angle 2=\angle D+\angle F$

$60^\circ=25^\circ+\angle F$

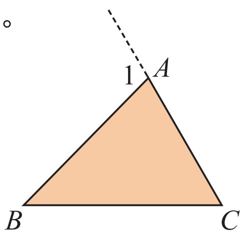
$\angle F=60^\circ-25^\circ$

$=35^\circ$

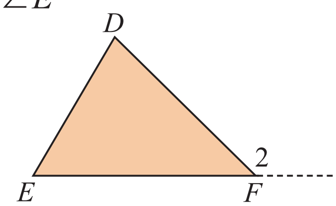


隨堂練習

1. 如圖，$\triangle ABC$ 中，$\angle 1$ 是 $\angle BAC$ 的一個外角。若 $\angle B=45^\circ$，$\angle C=60^\circ$，求 $\angle 1$。



2. 如圖，$\triangle DEF$ 中，$\angle 2$ 是 $\angle DFE$ 的一個外角。若 $\angle D=75^\circ$，$\angle 2=135^\circ$，求 $\angle E$。



例6 三角形的外角定理之應用

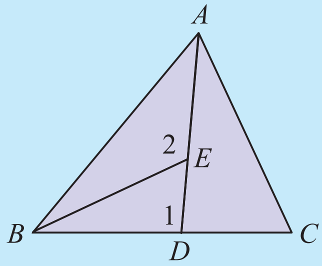
自評 P99 第 3 題

如右圖，$\triangle ABC$ 中，D 點在 $\overline{BC}$ 上，E 點在 $\overline{AD}$ 上。

若 $\angle CAD=30^\circ$，$\angle C=65^\circ$，$\angle DBE=25^\circ$，則：

(1) $\angle 1$ 是哪個三角形的一個外角？並求出 $\angle 1$ 的度數。

(2) $\angle 2$ 是哪個三角形的一個外角？並求出 $\angle 2$ 的度數。



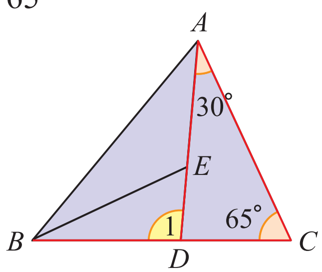
解

(1) $\because \angle 1$ 為 $\triangle ADC$ 的一個外角

$\therefore \angle 1=\angle CAD+\angle C$

$=30^\circ+65^\circ$

$=95^\circ$

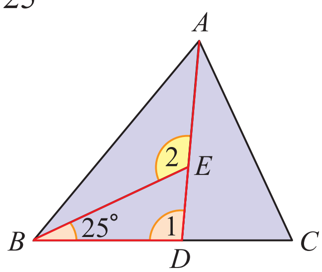


(2) $\because \angle 2$ 為 $\triangle BED$ 的一個外角

$\therefore \angle 2=\angle 1+\angle DBE$

$=95^\circ+25^\circ$

$=120^\circ$

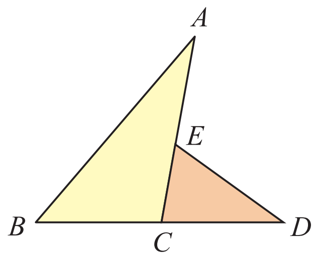


隨堂練習

如右圖，C 點在 $\overline{BD}$ 上，E 點在 $\overline{AC}$ 上。

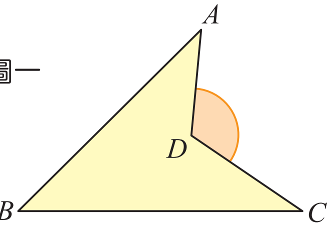
若 $\angle A=30^\circ$，$\angle B=50^\circ$，$\angle AED=115^\circ$，求：

(1) $\angle ACD$。　　(2) $\angle D$。



由前面的學習，你是否發現在圖一中，$\angle ADC$ 和 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 這三個角的關係呢？

圖一



我們作 $\overline{AD}$ 的延長線交 $\overline{BC}$ 於 E 點，如圖二。

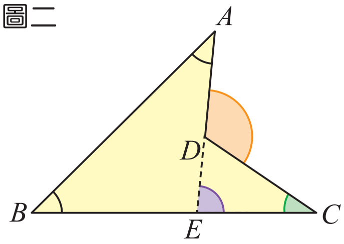
利用三角形的外角定理可知：

$\angle ADC = \angle AEC + \angle C$

$= (\angle A + \angle B) + \angle C$ ←$\angle AEC$ 為 $\triangle AEB$ 的一個外角

即 $\angle ADC = \angle A + \angle B + \angle C$。

圖二

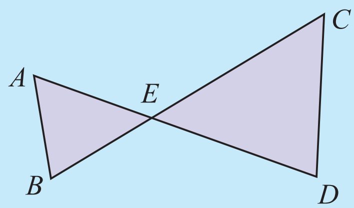


例 7 三角形外角定理的應用

自評 P100 第 4 題

如圖，$\overline{AD}$ 與 $\overline{BC}$ 相交於 E 點，

說明 $\angle A + \angle B = \angle C + \angle D$。



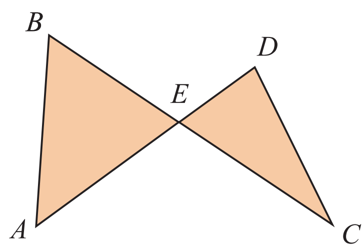
解 $\because \angle AEC$ 是 $\triangle AEB$ 與 $\triangle CED$ 的外角，

$\therefore \angle AEC = \angle A + \angle B$ 且 $\angle AEC = \angle C + \angle D$，故 $\angle A + \angle B = \angle C + \angle D$。

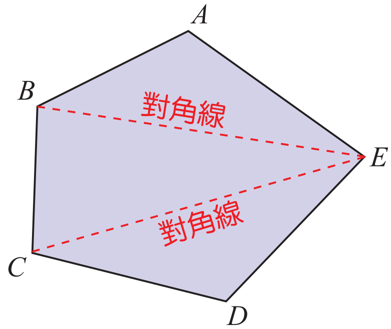
隨堂練習

如圖，$\overline{BC}$ 與 $\overline{AD}$ 相交於 E 點，

$\angle A = 50^\circ$，$\angle B = 60^\circ$，$\angle C = 30^\circ$，求 $\angle D$。

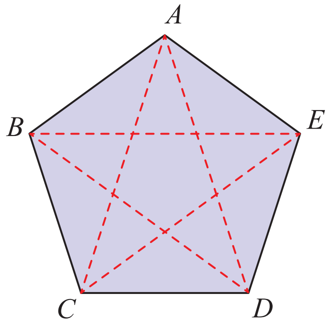


5 多邊形的內角和



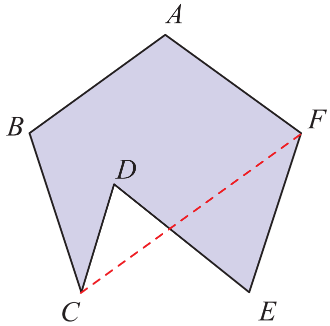
多邊形內任一頂點和不相鄰頂點的連線段稱為多邊形的**對角線**。如右圖，$\overline{BE}$ 與 $\overline{CE}$ 都是多邊形 $ABCDE$ 的對角線。

凸多邊形



如果一個多邊形所有的對角線都在圖形內部，這樣的多邊形稱為**凸多邊形**。如右圖，五邊形 $ABCDE$ 為凸多邊形。

凹多邊形



如果一個多邊形至少有一條對角線（或對角線的一部分）在圖形外部，這樣的多邊形稱為**凹多邊形**。

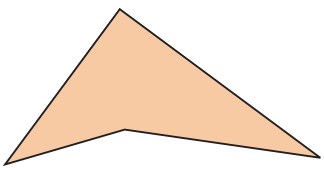
如右圖，$\overline{CF}$ 為多邊形 $ABCDEF$ 的一條對角線，但是 $\overline{CF}$ 有一部分在多邊形外部，所以此多邊形為凹多邊形。

在本教材中，如果沒有特別說明時，多邊形是指凸多邊形。

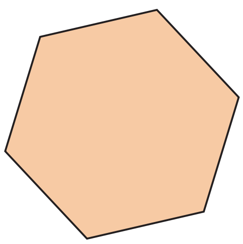
隨堂練習

判別下列圖形是否為凸多邊形，並在□中打「✓」。

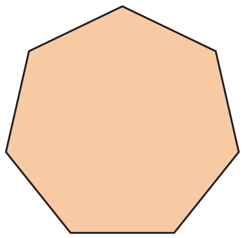
(1)□ 是　□ 否



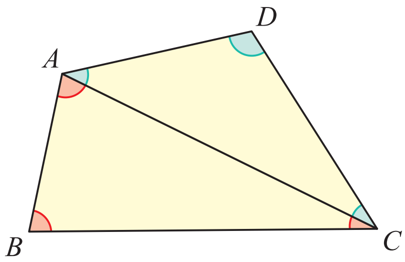
(2)□ 是　□ 否



(3)□ 是　□ 否

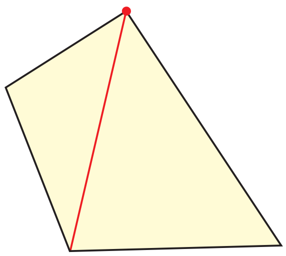
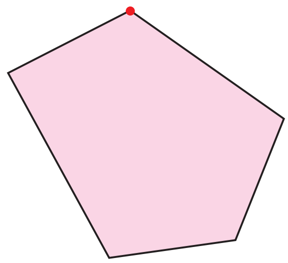
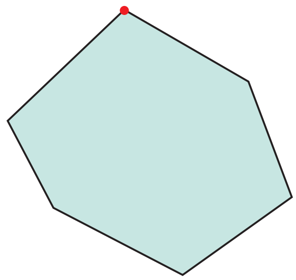


如右圖，自四邊形 $ABCD$ 的頂點 A 作對角線 $\overline{AC}$，可得兩個三角形。因此四邊形 $ABCD$ 的內角和等於兩個三角形的內角和，即四邊形 $ABCD$ 的內角和為 $2\times180^\circ=360^\circ$。



探索活動 多邊形的內角和

1. 從多邊形的一個頂點畫出所有的對角線，並完成下表。

邊數	4	5	6
圖形			
三角形個數	2		
內角和	$2\times180^\circ=360^\circ$		

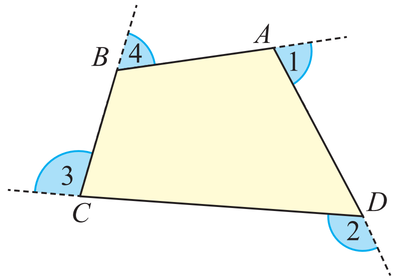
2. 從十二邊形的一個頂點畫出所有的對角線，可得到 ＿＿＿＿ 個三角形，其內角和為 ＿＿＿＿ 度。

3. 從 n 邊形的一個頂點畫出所有的對角線，可得到 ＿＿＿＿＿＿ 個三角形，其內角和為 ＿＿＿＿＿＿ 度。

n 邊形的內角和

n 邊形的內角和為 $(n-2)\times180^\circ$。

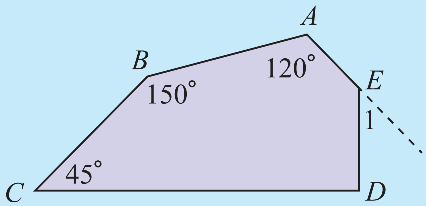
多邊形的一個外角與三角形的外角一樣，是由一內角的一邊與另一邊的延長線所形成的角。如右圖的四邊形 $ABCD$，$\angle 1$ 是 $\angle BAD$ 的外角，且 $\angle 1+\angle BAD=180^\circ$。同樣地，$\angle 2$ 是 $\angle ADC$ 的外角，$\angle 3$ 是 $\angle BCD$ 的外角，$\angle 4$ 是 $\angle CBA$ 的外角。



例8 多邊形的內角和與外角

自評 P100 第 6 題

五邊形 $ABCDE$ 中，$\angle A=120^\circ$，$\angle B=150^\circ$，$\angle C=45^\circ$，設 $\angle D:\angle AED=2:3$，$\angle 1$ 為 $\angle AED$ 的外角，求 $\angle 1$。



解 設 $\angle D=2k^\circ$，$\angle AED=3k^\circ$，其中 $k\neq 0$，

五邊形的內角和為 $(5-2)\times 180^\circ=540^\circ$

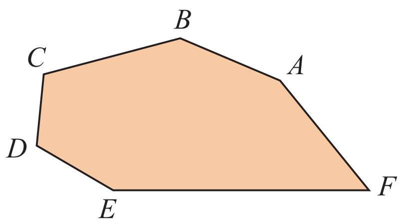
因此 $120+150+45+2k+3k=540$，$5k=225$，$k=45$

故 $\angle AED=45^\circ\times 3=135^\circ$，

則 $\angle 1=180^\circ-\angle AED=180^\circ-135^\circ=45^\circ$。

隨堂練習

六邊形 $ABCDEF$ 中，$\angle A+\angle B+\angle C+\angle D=520^\circ$，若 $\angle E=3\angle F$，畫出 $\angle F$ 的一個外角，並求出此外角的度數。



在 n 邊形中，如果它的**每一個內角都相等，且每一個邊長也都相等，就稱它為正 n 邊形**。由於正 n 邊形的內角和為 $(n-2)\times180^\circ$，故它的每一個內角皆為 $\dfrac{(n-2)\times180^\circ}{n}$。而 n 邊形的每個內角與它的一個外角互補，因此正 n 邊形的每一個外角也都相等。

正 n 邊形的內角

正 n 邊形的每一個內角皆為 $\dfrac{(n-2)\times180^\circ}{n}$。

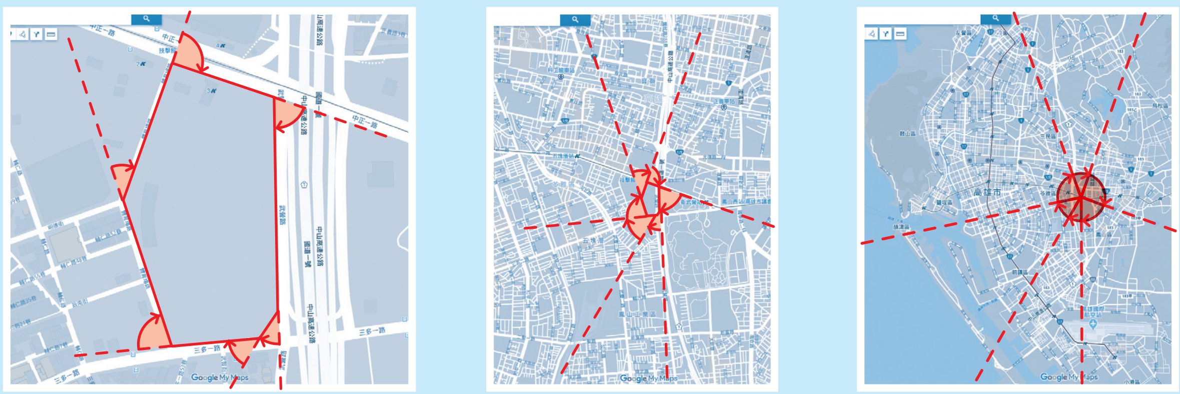
隨堂練習

自評 P100 第 5、6 題

分別求正九邊形每一個內角與每一個外角的度數。

補給站 多邊形的外角和

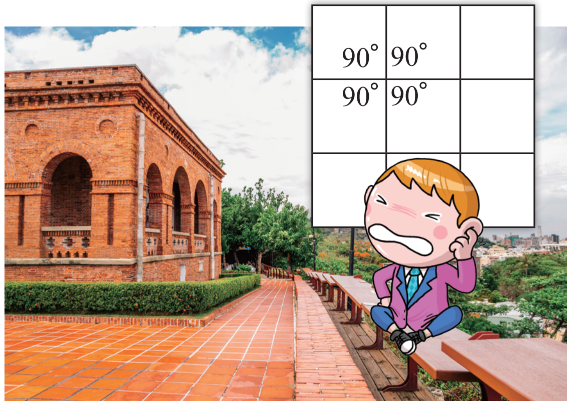
由 *Google* 地圖可發現，高雄中正運動場的周圍是一個六邊形，如果依順時針繞著周圍走一圈，則圖中所轉的 6 個紅色的角是此六邊形的一組外角。



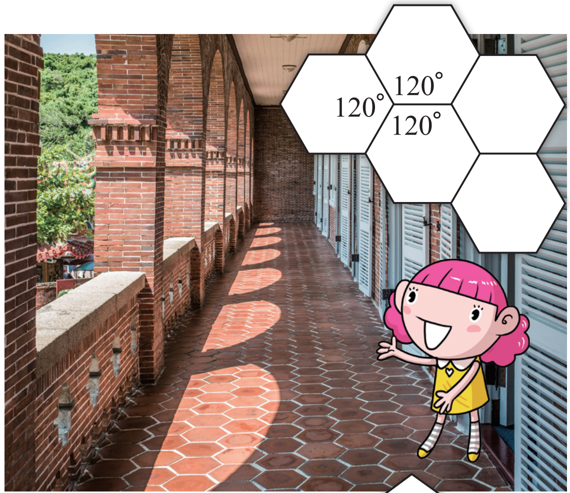
當我們一直按 *Google* 地圖中的 [−]，此六邊形會漸漸縮小最後變成一個點，此時六邊形的這一組外角和剛好形成一個周角，也就是 360°。

造訪打狗英國領事館 社會

打狗英國領事館是高雄的熱門觀光景點，位於西子灣上的一座英式建築。

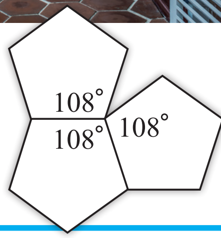


走進領事館庭院，可以看到大小相同的正方形地磚，如右圖。因為正方形的每一個內角都是 90°，所以在相同頂點的四個正方形，其四個內角恰好形成 360°。因此，可用 4 個正方形地磚無縫隙的方式鋪設在地面上。



如果繼續走進領事館內，可以看到其地板是由正六邊形的地磚鑲嵌而成，如右圖。由於正六邊形的每一個內角都是 120°，所以在相同頂點的三個正六邊形，其三個內角恰好形成 360°。因此，只用正六邊形的地磚，也可以無縫隙的鋪設在地面上。

但是正五邊形的每一個內角為 108°，由於 $360 \div 108$ 無法整除，表示無法將相同頂點的數個正五邊形組合成 360°，所以只用正五邊形的地磚無法緊密的鋪設在地面上。



Thinking

1. 是否能將大小相同的正三角形地磚緊密地鋪設在地上？

2. 是否能將大小相同的正八邊形地磚緊密地鋪設在地上？

第3章

觀察上列角度與多邊形的關係，哪一個應該被拿走？ 90°，72°，50°，40°，36°，

重點回顧

❶互補與互餘

若$\angle A+\angle B=180^\circ$，稱$\angle A$和$\angle B$互補。

若$\angle A+\angle B=90^\circ$，稱$\angle A$和$\angle B$互餘。

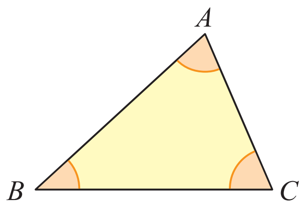
❷對頂角相等

兩直線相交於一點時，所形成的對頂角相等。

❸三角形的內角和

任意三角形的內角和為 180°。

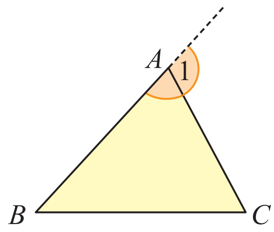
例 如下圖，$\angle A+\angle B+\angle C=180^\circ$。



❹三角形的內角與外角度數

任意三角形的每一個內角都與它的一個外角互補。

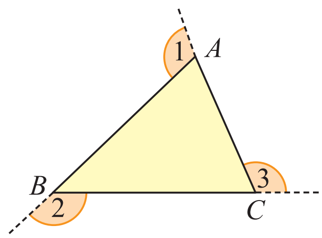
例 如下圖，$\angle BAC+\angle 1=180^\circ$。



❺三角形的外角和

任意三角形的一組外角和為 360°。

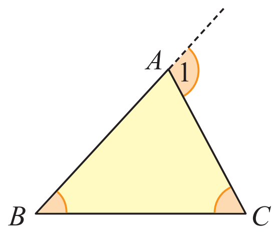
例 如下圖，$\angle 1+\angle 2+\angle 3=360^\circ$。



❻三角形的外角定理

三角形任一外角等於兩個內對角的和。

例 如下圖，$\angle 1=\angle B+\angle C$。



❼n 邊形的內角和

n 邊形的內角和為$(n-2)\times 180^\circ$。

例 八邊形的內角和為

$(8-2)\times 180^\circ=1080^\circ$。

❽正 n 邊形的內角度數

正 n 邊形的每一個內角皆為

$\dfrac{(n-2)\times 180^\circ}{n}$。

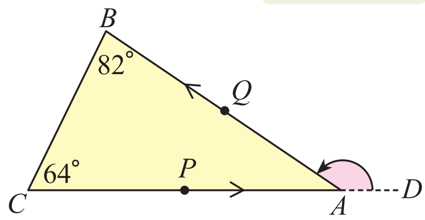
例 正六邊形的每一個內角皆為

$\dfrac{(6-2)\times 180^\circ}{6}=120^\circ$。

3-1 自我評量

①已知$\angle A=108^\circ$，若$\angle A$的補角和$\angle B$的餘角度數相同，求$\angle B$。 課 P84 例 1

②如圖，鈺凱依逆時針方向繞著三角形公園跑步。當他自 P 點出發，沿著 $\overrightarrow{PA}$ 前進至 A 點時，其行進方向從面對 D 點的方向逆時針旋轉一個角度，變成面對 B 點的方向後，再繼續走到 Q 點，則鈺凱在 A 點旋轉了多少角度？ 課 P88 例 4



③右圖為五角星形 $ABCDE$，利用「外角等於兩個內對角的和」，以含有$\angle 1$、$\angle 2$的算式完成下面的空格。 課 P90、91 例 5、6

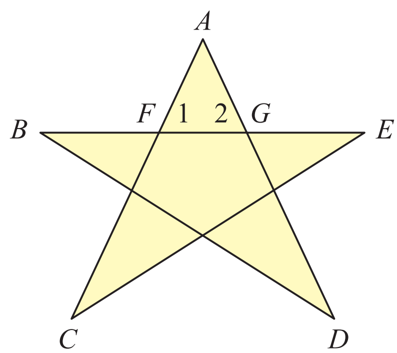
(1) $\angle 1=\angle C+$ ________

(2) $\angle 2=\angle B+$ ________

(3) $\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E$

$=\angle A+$ ________ $+$ ________

$=$ ________ 度

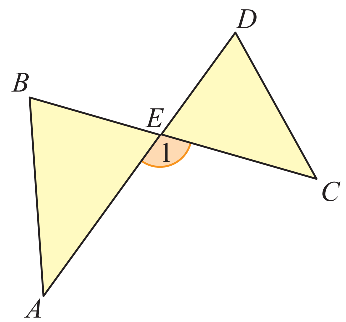


第3章

解答：50°。（剩餘都是正多邊形一個外角角度）

4 如圖，$\overline{BC}$ 與 $\overline{AD}$ 相交於 E 點，$\angle A=40^\circ$，$\angle B=70^\circ$，$\angle C=45^\circ$，求 $\angle 1$、$\angle D$。

課 P92 例 7



5 分別求正十二邊形的一個內角與一個外角的度數。

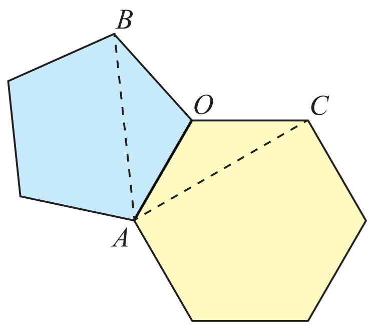
課 P96 隨堂

6 嘌呤是構成人體基因的重要物質，它的化學結構式主要是由一個正五邊形與一個正六邊形構成的平面圖形，如右圖，求：

課 P95 例 8、P96 隨堂

(1) $\angle BAO$ 的度數。

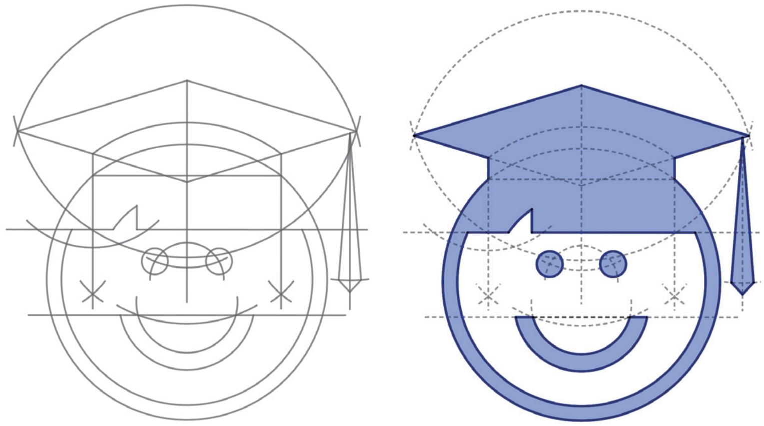
(2) $\angle BAC$ 的度數。



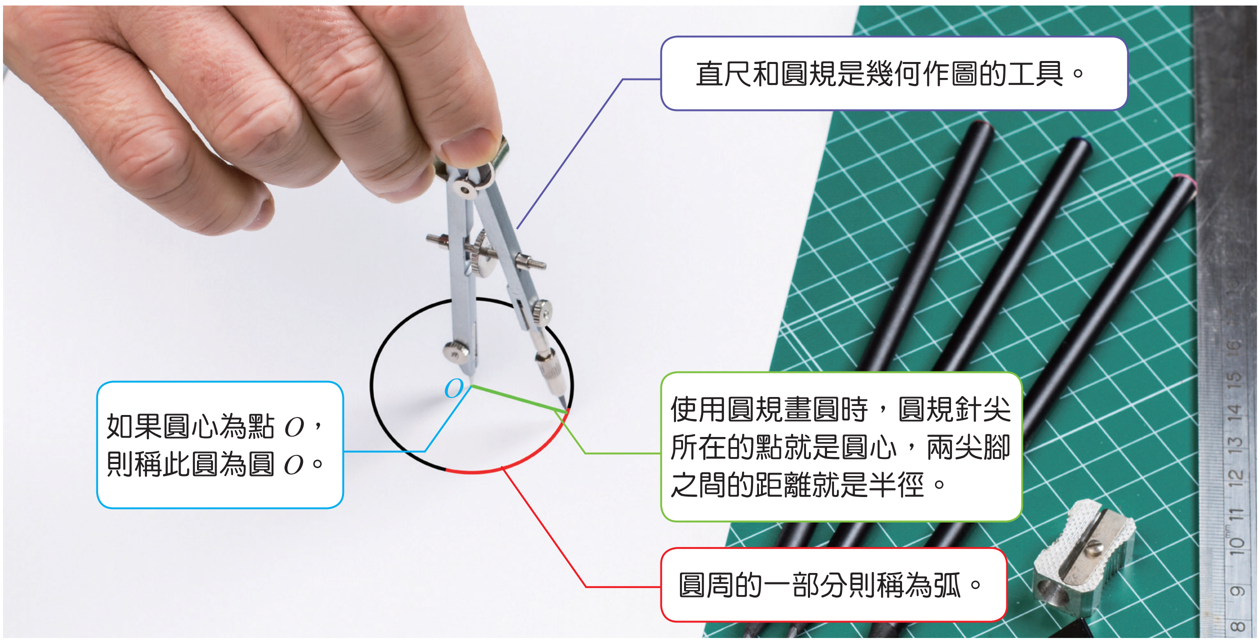
3-2 尺規作圖與三角形的全等

1 尺規作圖

企業品牌或各項體育競賽為了宣傳產品活動，常會設計一些 *logo* 來協助宣傳。製作 *logo* 的方法非常多種，其中一種最基本的方法就是利用圓規和直尺，來設計一些由線段和圓所組成的圖形，如右圖。



要畫一條直線，我們必須使用直尺，若要複製某個線段的長度，理論上使用圓規會比直接用有刻度的直尺來得精準，因為測量所得到的長度通常只是一個近似值。



接下來，我們將介紹幾個基本的尺規作圖。

等線段作圖

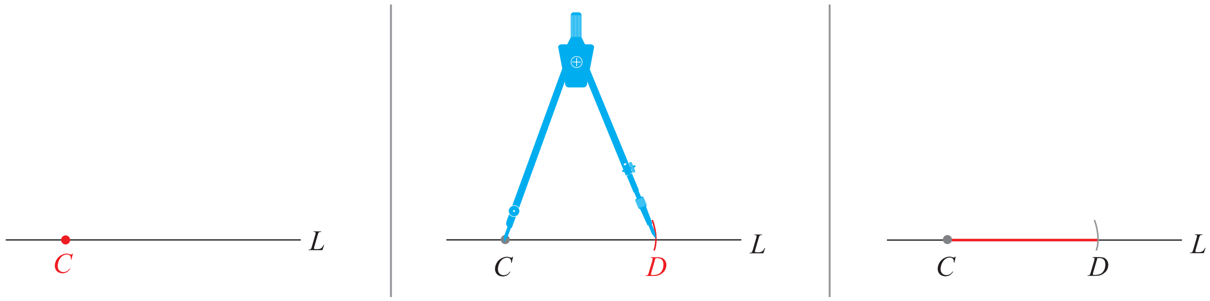
給定一線段 $\overline{AB}$，如右圖。那麼我們要如何利用尺規作圖，畫出另一條與 $\overline{AB}$ 等長度的線段呢？

作法

❶ 畫一直線 L，在 L 上取一點 C。

❷ 以 C 點為圓心，$\overline{AB}$ 長為半徑畫弧，交 L 於一點 D。

❸ $\overline{CD}$ 即為所求的線段。



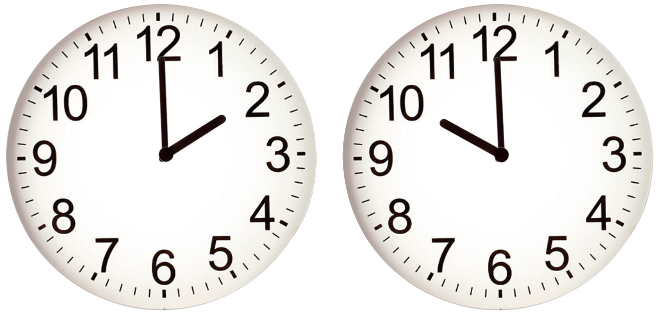
一般而言，尺規作圖的痕跡必須保留，才能呈現作圖的過程，當作圖完成後，會將結論寫出來。以上例來說，作法❸的圖已隱含了畫圖的所有痕跡，所以這個圖即為完成圖。在本書中，為了方便學習，我們在每一個作圖的步驟中，都會加上作法。

隨堂練習

如圖，已知 $\overline{AB}$，用尺規作圖畫出另一條線段，使它的長度是 $\overline{AB}$ 的 2 倍。

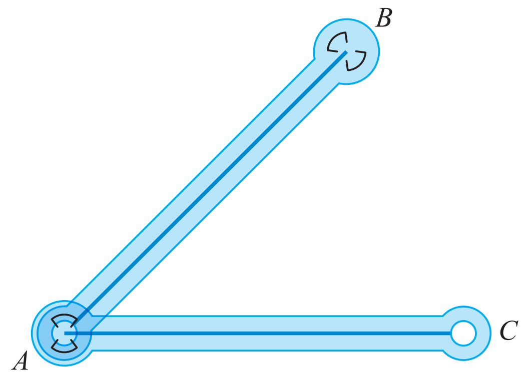
等角作圖

右圖中，兩點和十點的時針和分針所形成的角其度數會相等嗎？若兩個角的度數相等，就稱此兩角為等角。接下來，我們將學習等角作圖，在此之前，先來探索如何固定一個角。

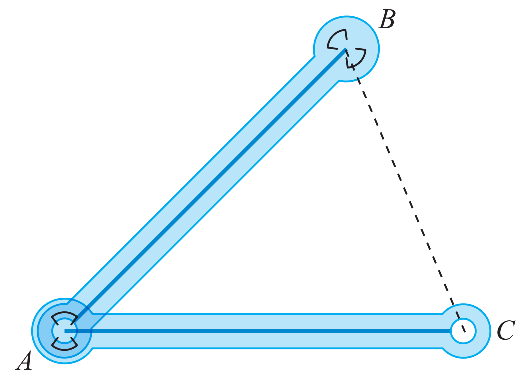


探索活動 固定一個角

1. 拿出附件 12-1 中的兩根等長扣條，將此兩扣條的一端扣起來，使它形成一個 $\angle A$，則這個角的大小可以任意改變嗎？



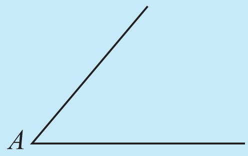
2. 承 1. ，拿出第三根扣條扣住 B、C 兩點，此時 $\overline{BC}$ 的長度固定，則 $\angle A$ 的角度是否也跟著固定？



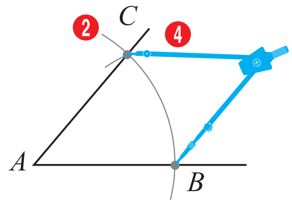
由 探索活動 可知，利用 $\overline{AB}$、$\overline{AC}$ 的扣條形成 $\angle BAC$，此時還需要再加上 $\overline{BC}$ 的扣條，才能使得 $\angle BAC$ 固定。現在我們將利用這個想法以尺規作出一個角，使這個角的度數等於一個已知角 $\angle A$ 的度數。

例1 作等角

已知∠A，利用尺規作圖畫出一角等於∠A。



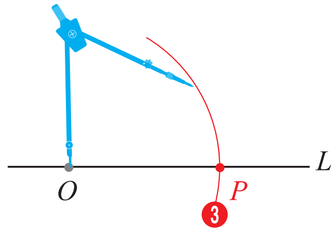
原題目的作圖痕跡



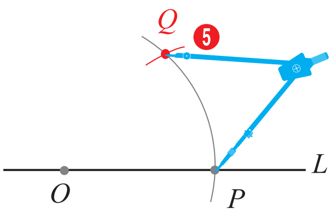
作法

❶ 畫一直線 L，在 L 上取一點 O。

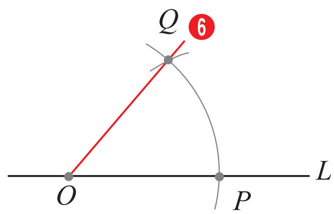
❷ 以 A 點為圓心，取一適當長為半徑畫弧，交∠A 的兩邊於 B、C 兩點。再以 O 點為圓心，$\overline{AB}$ 長為半徑畫弧，交直線 L 於 P 點。



❸ 以 P 點為圓心，$\overline{BC}$ 長為半徑畫弧，交前弧於 Q 點。



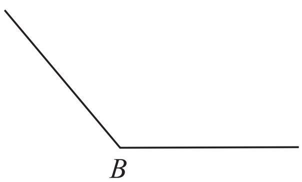
❹ 連接 $\overrightarrow{OQ}$，則∠POQ 即為所求。



隨堂練習

1. 用量角器量量看，在 例1 的尺規作圖中，∠A 與 ∠POQ 的度數是否相同？

2. 已知∠B，利用尺規作圖畫出一角等於∠B。

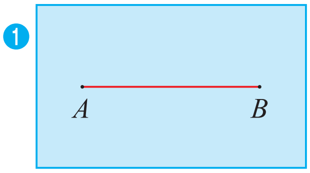


中垂線作圖

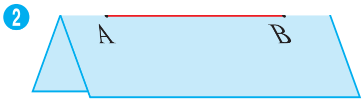
我們常用對摺的方法來平分東西，例如：要將一條繩子平分為兩段時，可以把繩子對摺使兩端疊合後拉直剪開。

探索活動 線段的垂直與平分

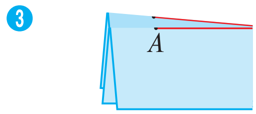
依照以下步驟操作，並回答問題：



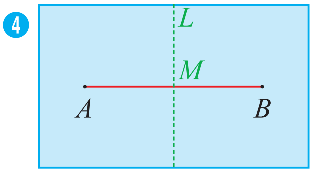
拿出附件 7



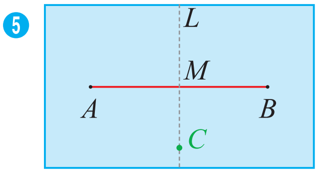
沿 $\overline{AB}$ 將附件上下對摺。



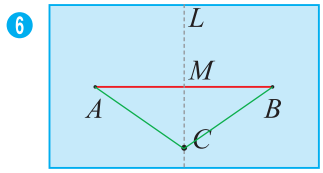
再左右對摺使 A、B 點重疊。



將 $\overline{AB}$ 中點標上 M，並畫出摺痕 L。



在直線 L 上任取一點 C。



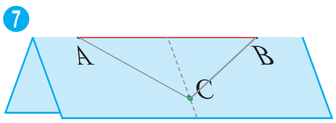
連接 $\overline{CA}$ 和 $\overline{CB}$。

問題 1：直線 L 除了平分 $\overline{AB}$，是否垂直 $\overline{AB}$？

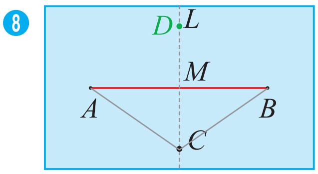
答：______。

問題 2：$\overline{CA}$ 與 $\overline{CB}$ 是否等長？

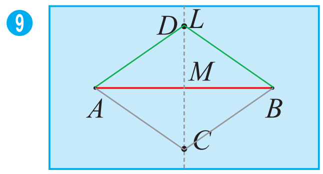
答：______。



把紙沿 $\overline{AB}$ 對摺，接著在 C 點刺一個小洞。



再把紙打開，將另一個洞標示為 D 點。



連接 $\overline{DA}$ 和 $\overline{DB}$。

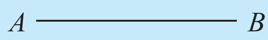
問題 3：$\overline{DA}$、$\overline{DB}$ 是否等長？

答：______。

由 探索活動 可知，如果給定一線段 $\overline{AB}$，只要作出 C、D 兩點後，再用直尺畫出 $\overleftrightarrow{CD}$，這條直線就會平分 $\overline{AB}$，也會與 $\overline{AB}$ 垂直，因此這條 $\overleftrightarrow{CD}$ 就是 $\overline{AB}$ 的中垂線。而我們又知道 $\overline{CA}$、$\overline{CB}$、$\overline{DA}$、$\overline{DB}$ 四線段等長，因此使用這個想法來作為已知線段中垂線的尺規作圖方法。

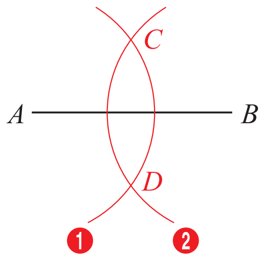
例2 作線段的中垂線

已知 $\overline{AB}$，利用尺規作圖畫出 $\overline{AB}$ 的中垂線。

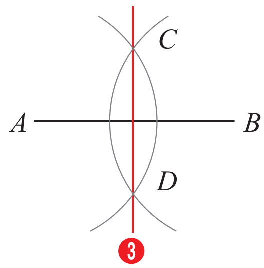


作法

❶ 分別以 A、B 兩點為圓心，大於 $\frac{1}{2}\overline{AB}$ 的相同長度為半徑畫兩弧，兩弧相交於 C、D 兩點。



❷ 連接 $\overleftrightarrow{CD}$，則 $\overleftrightarrow{CD}$ 即為所求。



Thinking

在作線段中垂線的尺規作圖時，為什麼要以大於 $\frac{1}{2}\overline{AB}$ 的長度為半徑？
（提示：可用各種不同的長度為半徑畫畫看）

隨堂練習

自評 P130 第 1 題

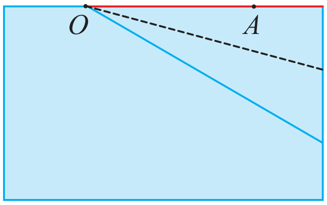
如圖，已知 $\overline{AB}$，利用尺規作圖找出 $\overline{AB}$ 的中點。

角平分線作圖

探索活動 角的平分線

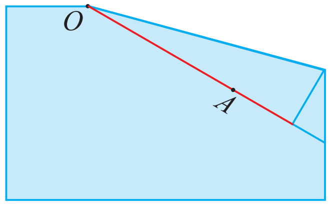
依照以下步驟操作，並回答問題：

❶



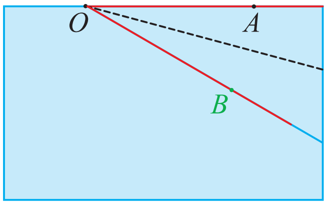
拿出附件 8，有一 $\angle O$ 與 $\angle O$ 其中一邊上異於 O 點的點 A。

❷



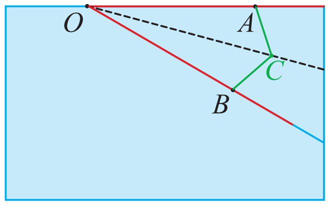
用摺紙的方法將 $\overrightarrow{OA}$ 疊到 $\angle O$ 的另一邊上，並壓出摺痕。

❸



在 ❷ 中，於 A 點刺一個小洞後將紙打開，並將另一個洞標示為 B 點。

❹



在摺痕上取一點 C，連接 $\overline{CA}$ 與 $\overline{CB}$。

問題 1：$\overline{OA}$ 與 $\overline{OB}$ 有什麼關係？

答：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿。

問題 2：$\overline{CA}$ 與 $\overline{CB}$ 有什麼關係？

答：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿。

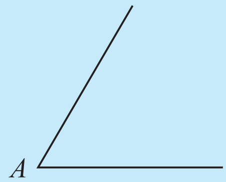
由 探索活動 可知，將 $\overline{OA}$ 疊到 $\overline{OB}$ 上，則 $\angle AOC$ 和 $\angle BOC$ 這兩個角會完全疊合，所以 $\angle AOC=\angle BOC$，即 $\overrightarrow{OC}$ 將 $\angle AOB$ 平分成相等的兩個角，我們稱 $\overrightarrow{OC}$ 為 $\angle AOB$ 的**角平分線**，又稱為**分角線**。

利用尺規作圖作 $\angle O$ 的角平分線，只要找到 C 點，然後把 O、C 兩點連起來，則 $\overrightarrow{OC}$ 就是 $\angle AOB$ 的角平分線。從 探索活動 ，我們知道 $\overline{OA}=\overline{OB}$ 且 $\overline{CA}=\overline{CB}$，因此使用這個想法來作已知角的角平分線的尺規作圖。

例3 角平分線作圖

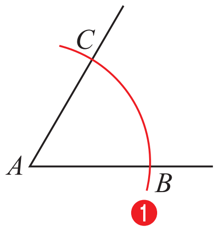
自評 P130 第 2 題

已知∠A，利用尺規作圖畫出∠A 的角平分線。

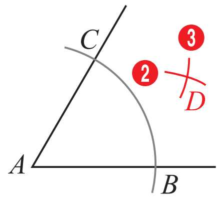


作法

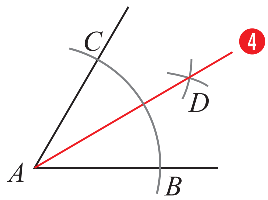
❶ 以 A 點為圓心，取一適當長為半徑畫弧，交∠A 的兩邊於 B、C 兩點。



❷ 分別以 B、C 兩點為圓心，大於 $\frac{1}{2}\overline{BC}$ 的相同長度為半徑畫弧，兩弧交於 D 點。

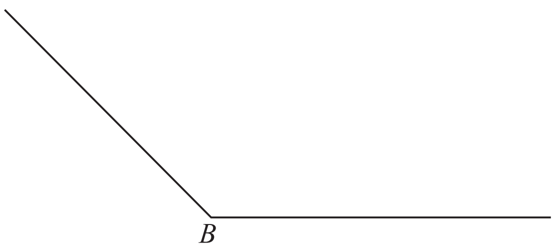


❸ 連接 $\overrightarrow{AD}$，則 $\overrightarrow{AD}$ 即為所求。

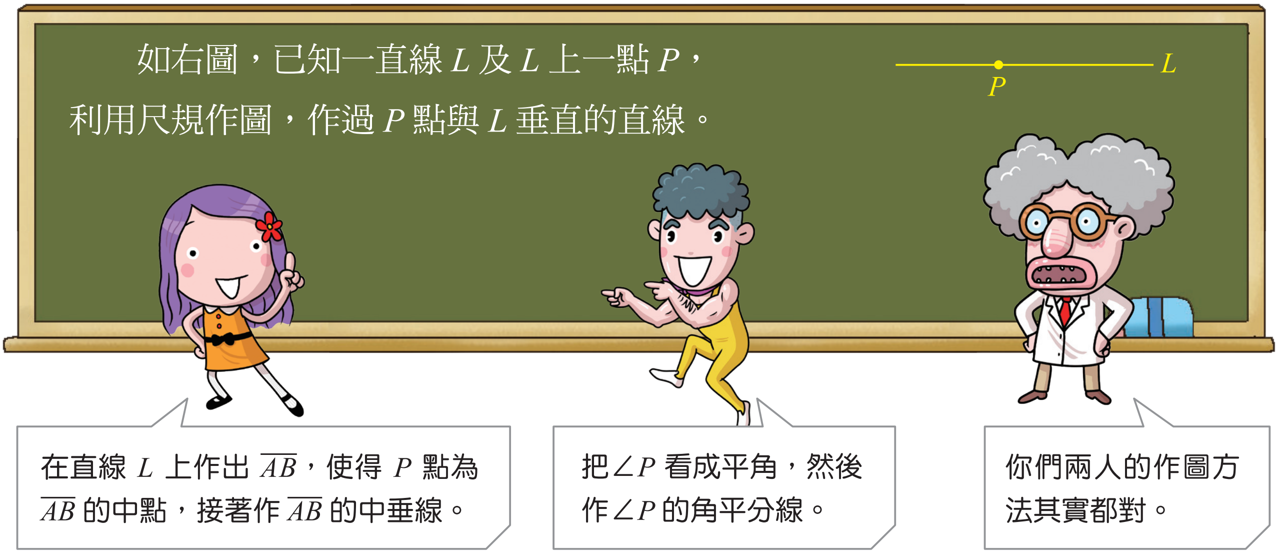


隨堂練習

已知∠B，利用尺規作圖畫出∠B 的角平分線。



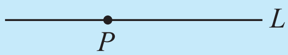
過線上一點作垂線



用摺紙的方式也可以摺出直角，只要將平角（180°）平分，就可以得到直角，所以用尺規過線上一點作垂線，可以看成是作平角的角平分線。

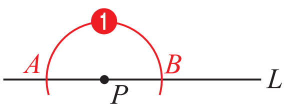
例4 過線上一點作垂線

已知直線 L 及 L 上一點 P，求作過 P 點與 L 垂直的直線。

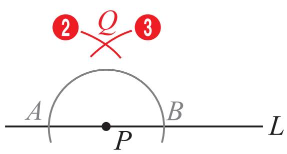


作法

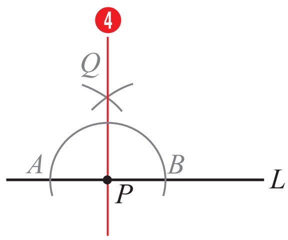
1. 以 P 點為圓心，取一適當長為半徑畫弧，交直線 L 於 A、B 兩點。



2. 分別以 A、B 兩點為圓心，大於 $\frac{1}{2}\overline{AB}$ 的相同長度為半徑畫弧，兩弧交於 Q 點。



3. 連接 $\overleftrightarrow{PQ}$，則 $\overleftrightarrow{PQ}$ 即為所求。



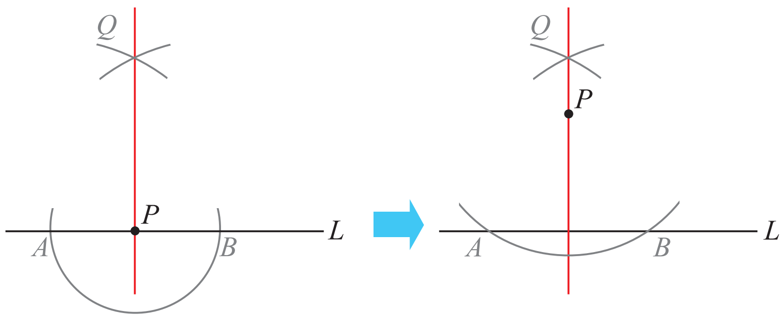
在 例4 中，以 P 點為圓心，取一適當長為半徑畫弧，交直線 L 於 A、B 兩點。此時，P 點即為 $\overline{AB}$ 的中點。因此，漫畫中艾美先在直線 L 上作出 $\overline{AB}$，使得 P 點為 $\overline{AB}$ 的中點，接著再作 $\overline{AB}$ 中垂線的作圖方法也是正確的。

第3章

過線外一點作垂線

在 例4 我們學到，如果 P 點在直線 L 上，可用尺規作圖作出「過 P 點與 L 垂直的直線」，那麼，若 P 點不在直線 L 上呢？

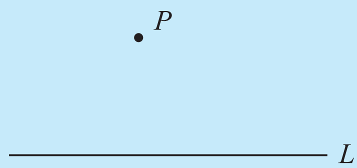
如圖，只要能仿 例4 找出圖中類似 A、B、Q 三點，然後用直尺將 Q、P 兩點連接起來，就可以得到此垂線。



例5 過線外一點作垂線

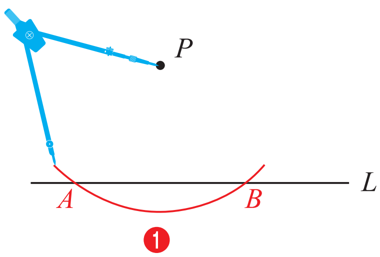
自評 P130 第 3 題

已知直線 L 及 L 外一點 P，利用尺規作圖求作過 P 點與 L 垂直的直線。

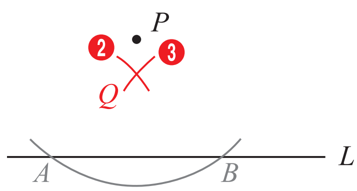


作法

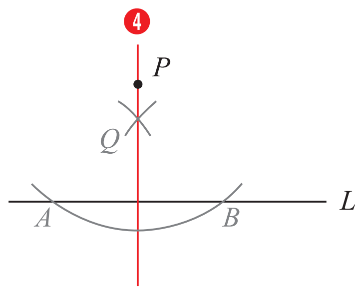
❶ 以 P 點為圓心，取一適當長度為半徑畫弧，交直線 L 於 A、B 兩點。



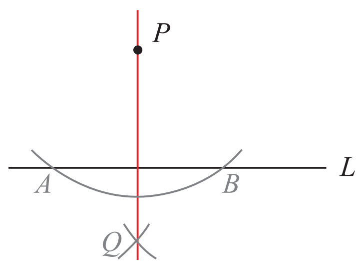
❷ 分別以 A、B 兩點為圓心，大於 $\frac{1}{2}$ $\overline{AB}$ 的相同長度為半徑畫弧，兩弧交於 Q 點。



❸ 連接 $\overleftrightarrow{PQ}$，則 $\overleftrightarrow{PQ}$ 即為所求。



為了避免 P、Q 兩點擠在一起，也可以畫成右圖。



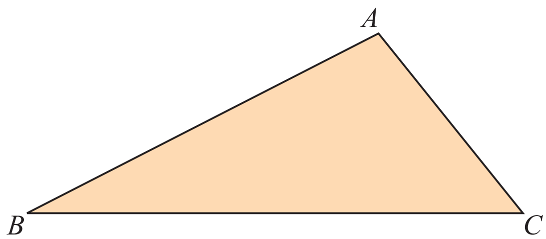
隨堂練習

1. 利用尺規作圖，畫出一個 90° 的角。

2. 已知△ABC，求作 $\overline{BC}$ 邊上的高。

思路分析

若要作 $\overline{BC}$ 邊上的高 $\overline{AD}$，只要過 A 點作 $\overleftrightarrow{BC}$ 垂線即可得。



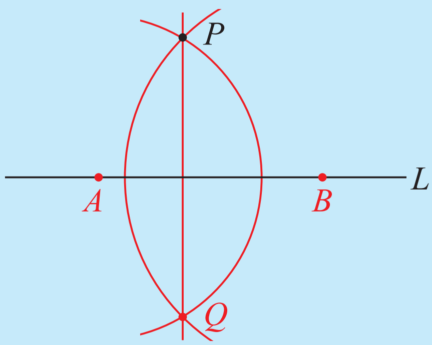
補給站 用對稱作垂線

利用以下的作法畫「通過直線 L 外一點 P，且與 L 垂直的直線」:

(1) 在直線 L 上任取 A、B 兩點。

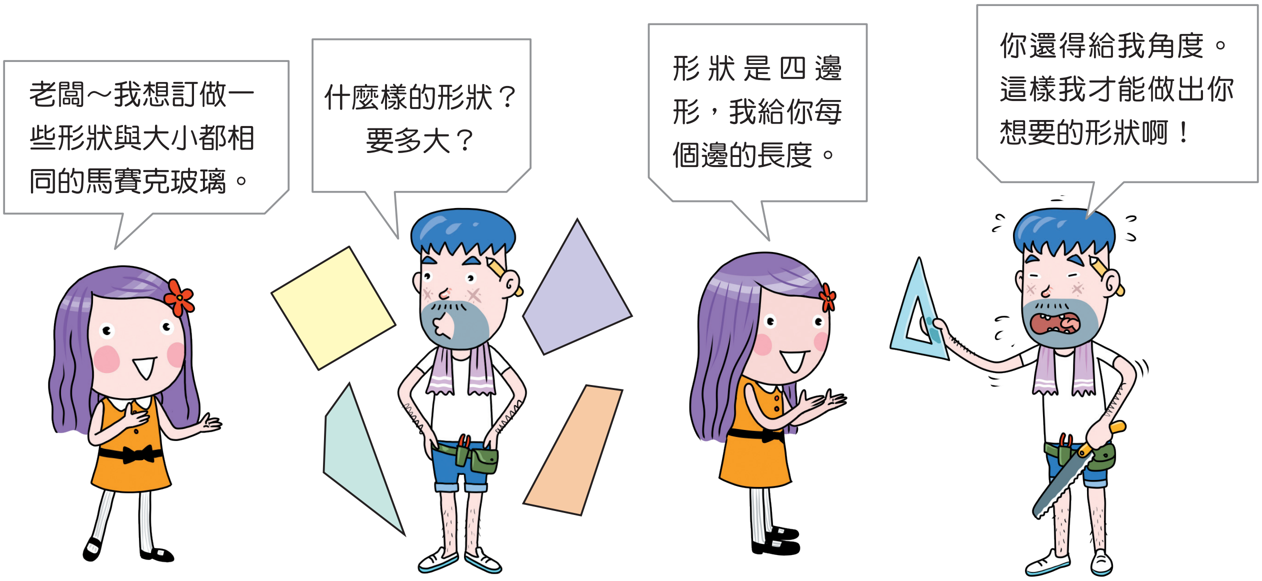
(2) 分別以 A、B 兩點為圓心，$\overline{AP}$ 長及 $\overline{BP}$ 長為半徑畫弧，兩弧交於 Q 點。

(3) 連接 $\overleftrightarrow{PQ}$，則 $\overleftrightarrow{PQ}$ 即為所求，如圖所示。



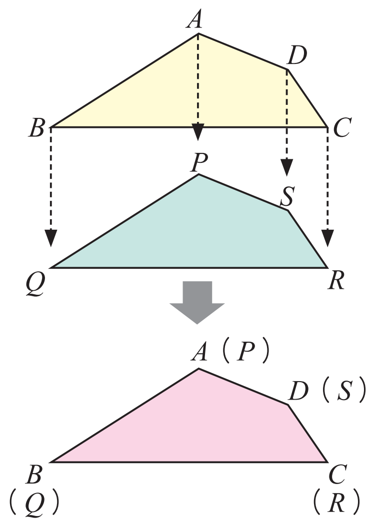
這個作法是否正確呢？拿出附件 6，我們以直線 L 為摺線對摺，可以發現 P、Q 兩點會重合，也就是直線 L 為 $\overline{PQ}$ 的中垂線，因此 $\overleftrightarrow{PQ} \perp L$。

2 全等多邊形



如果兩個平面圖形經過平移、旋轉或翻轉可以完全疊合在一起，它們就是兩個形狀與大小都相同的圖形，稱它們是全等圖形，即這兩個圖形**全等**。

如圖，四邊形 $ABCD$ 與四邊形 $PQRS$ 是全等四邊形，表示它們可以完全疊合在一起，其中 A、B、C、D 的對應頂點分別是 P、Q、R、S。



(1)疊合在一起的邊稱為**對應邊**，對應邊等長，即「$\overline{AB}=\overline{PQ}$」、「$\overline{BC}=\overline{QR}$」、「$\overline{CD}=\overline{RS}$」、「$\overline{DA}=\overline{SP}$」。

(2)疊合在一起的角稱為**對應角**，對應角相等，即「$\angle A=\angle P$」、「$\angle B=\angle Q$」、「$\angle C=\angle R$」、「$\angle D=\angle S$」。

反過來說，如果四邊形 $ABCD$ 與四邊形 $PQRS$ 的四組邊分別對應相等且四組角分別對應相等，表示可以將它們完全疊合，因此它們是全等四邊形。

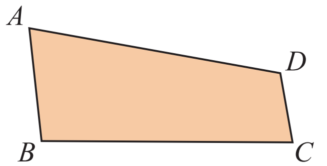
全等多邊形

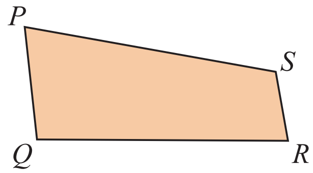
1. 若兩個多邊形全等，則對應邊相等，對應角也相等。
2. 若兩個多邊形的邊都對應相等，角也都對應相等，則這兩個多邊形全等。

隨堂練習

自評 P131 第 4 題

如圖，四邊形 $ABCD$ 與四邊形 $PQRS$ 全等，且 A、B、C、D 的對應頂點分別是 P、Q、R、S。若 $\angle A=73^\circ$，$\angle B=97^\circ$，$\angle C=80^\circ$，$\overline{QR}=4$，求：





(1) $\angle P$。

(2) $\angle S$。

(3) $\overline{BC}$ 的長。

Thinking

若兩個四邊形的四組對應邊分別等長，且其中三組對應角分別相等，則此兩個四邊形是否一定全等？

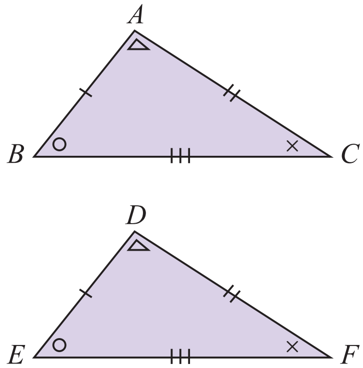
$\triangle S \cong \triangle H \cong \triangle A \cong \triangle R \cong \triangle E$，觀察左列英文字母與全等性質的關係，哪一個應該被拿走？

3 三角形的全等性質

三角形也是多邊形的一種，若$\triangle ABC$與$\triangle DEF$可以完全疊合在一起，就稱$\triangle ABC$與$\triangle DEF$為全等三角形，將它們記為「$\triangle ABC \cong \triangle DEF$」，其中符號「$\cong$」表示全等，讀作「全等於」。

自評 P131 第 5 題

如右圖，利用相同的記號標示對應邊與對應角，可以更清楚觀察到對應的關係。



當$\triangle ABC \cong \triangle DEF$且$A$、$B$、$C$的對應頂點分別是$D$、$E$、$F$，表示$\triangle ABC$和$\triangle DEF$可以完全疊合在一起，因此：

(1)對應邊等長：$\overline{AB}=\overline{DE}$，$\overline{BC}=\overline{EF}$，$\overline{AC}=\overline{DF}$。

(2)對應角相等：$\angle A=\angle D$，$\angle B=\angle E$，$\angle C=\angle F$。

全等三角形的對應關係

若兩個三角形全等，則對應邊相等，對應角也相等。

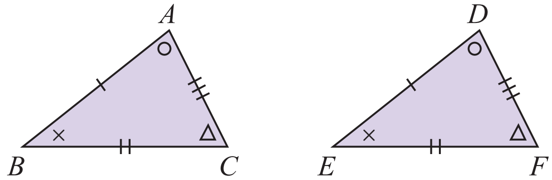
「$\triangle ABC \cong \triangle DEF$」只表示$\triangle ABC$和$\triangle DEF$全等，不一定表示頂點$A$的對應頂點是$D$，頂點$B$的對應頂點是$E$，頂點$C$的對應頂點是$F$。但本教材中，若未特別說明時，則「$\triangle ABC \cong \triangle DEF$」即表示「$A$和$D$」、「$B$和$E$」、「$C$和$F$」是三組對應頂點。

隨堂練習

如果$\triangle ABC \cong \triangle PQR$，且$A$、$B$、$C$的對應頂點分別是$P$、$Q$、$R$。其中$\angle A=90^\circ$，$\overline{QR}=10$，$\overline{PQ}=6$，求：(1)$\triangle ABC$的周長。(2)$\triangle PQR$的面積。

當兩個三角形的三組邊對應相等與三組角對應相等，那麼這兩個三角形就能完全疊合在一起，此時這兩個三角形一定全等。

如圖，在$\triangle ABC$ 和$\triangle DEF$ 中，若$\angle A=\angle D$、$\angle B=\angle E$、$\angle C=\angle F$，且 $\overline{AB}=\overline{DE}$、$\overline{BC}=\overline{EF}$、$\overline{AC}=\overline{DF}$，則$\triangle ABC\cong\triangle DEF$。



一定要知道「三組邊對應相等且三組角對應相等」才能判別兩個三角形全等嗎？以下是兩位顧客與玻璃店老闆的通訊對話。

在上述對話中，為什麼洛基只提供三角形三個邊的長度，老闆馬上就可以知道要裁出怎樣的玻璃，但是妙麗只提供三個內角的度數，老闆還再要求她提供 100° 對邊的長度呢？接下來，我們就來學習全等三角形的判別法，以便了解這個問題。

解答：E。（三角形全等性質不會有英文字母 E）

SSS 全等性質

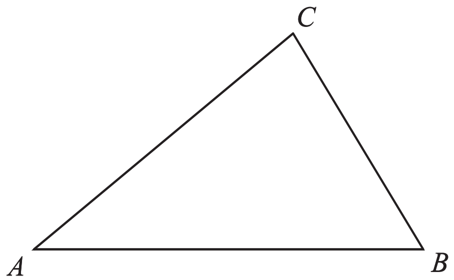
自評 P132 第 6 題 (4)

由玻璃店老闆與洛基的對話可知，當一個三角形的三個邊長都確定，此時這個三角形的大小與形狀都會固定，讓我們來看看下面的 探索活動 。

為了方便討論全等三角形的判別方法，我們用符號「S」代表「邊」($side$)，用符號「A」代表「角」($angle$)。

探索活動 SSS 全等性質

1. 如右圖，已知一個$\triangle ABC$，利用以下尺規作圖的作法，在 作圖區 畫出$\triangle PQR$，使得$\triangle PQR$的三邊長分別與$\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{AC}$等長。



作法

① 畫一條直線 L，並在 L 上取 P、Q 兩點，使得$\overline{PQ}=\overline{AB}$。

② 分別以 P、Q 為圓心，$\overline{AC}$、$\overline{BC}$長為半徑，在 L 的同側畫弧。設兩弧相交於 R 點。

③ 連接$\overline{PR}$、$\overline{QR}$，則$\triangle PQR$ 就是所求的三角形。

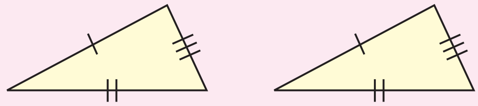
作圖區

2. 取出附件 13 的$\triangle ABC$透明片，以疊合的方式，將它疊合到$\triangle PQR$上，則$\triangle PQR$是否與$\triangle ABC$全等？□是　□否

由 探索活動 可知，透明片$\triangle ABC$疊合到$\triangle PQR$上，可使這兩個三角形完全疊合，所以$\triangle PQR \cong \triangle ABC$。因此，當兩個三角形的三組邊對應相等，則這兩個三角形一定會全等，這個性質稱為 **SSS 全等性質**。

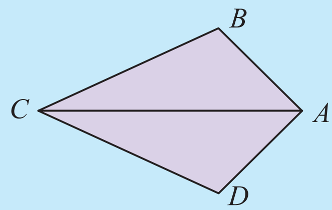
SSS 全等性質

若兩個三角形的三組邊對應相等，
則這兩個三角形全等。



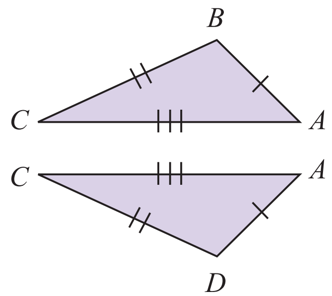
例6 SSS 全等性質

如圖，$\triangle ABC$ 與 $\triangle ADC$ 中，$\overline{AB}=\overline{AD}$，$\overline{BC}=\overline{DC}$，
說明 $\triangle ABC \cong \triangle ADC$。



說明

在 $\triangle ABC$ 與 $\triangle ADC$ 中，
$\because \overline{AB}=\overline{AD}$（已知），$\overline{BC}=\overline{DC}$（已知），
$\overline{AC}=\overline{AC}$（公用邊），
$\therefore \triangle ABC \cong \triangle ADC$（$SSS$ 全等性質）。



Thinking

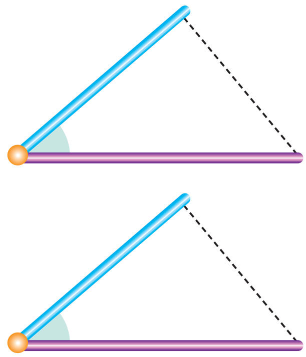
在 $\triangle ABC$ 與 $\triangle DEF$ 中，如果只知道 $\overline{AB}=\overline{DE}$ 及 $\overline{BC}=\overline{EF}$ 這兩組邊對應相等，那麼 $\triangle ABC$ 與 $\triangle DEF$ 是否全等？如果全等請說明理由；如果不全等，請舉一個不全等的例子。

由 Thinking 可知：任意兩個三角形，如果只知道其中兩組邊對應相等，仍然無法得知這兩個三角形一定會全等。

SAS 全等性質

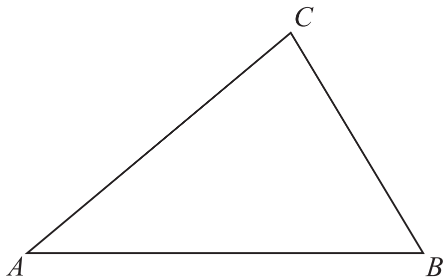
自評 P132 第 6 題 (3)

接下來，我們來討論知道其中兩組邊對應相等時，再增加「一組角對應相等」的條件，則這兩個三角形是不是一定會全等呢？如果此對應相等的角是兩組已知對應相等邊的夾角，如右圖，我們以符號 *SAS* 表示這種情況，其中**把 *A* 寫在兩個 *S* 中間，表示這個角是兩個邊的夾角**。那麼，在 *SAS* 的條件下，兩個三角形是否一定會全等呢？



探索活動 *SAS* 全等性質

1. 如右圖，已知 $\triangle ABC$，在 作圖區 中已有一個與 $\angle A$ 相等的角 $\angle D$。利用以下尺規作圖的作法，在 作圖區 畫出 $\triangle DEF$，使得 $\overline{DE}=\overline{AB}$、$\overline{DF}=\overline{AC}$、$\angle D=\angle A$。



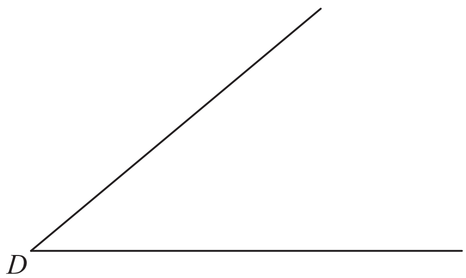
作法

❶ 在 $\angle D$ 的一邊取一點 E，使得 $\overline{DE}=\overline{AB}$。

❷ 在 $\angle D$ 的另一邊取一點 F，使得 $\overline{DF}=\overline{AC}$。

❸ 連接 $\overline{EF}$，則 $\triangle DEF$ 就是所求的三角形。

作圖區

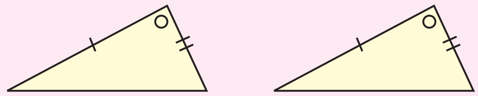


2. 取出附件 14 的 $\triangle ABC$ 透明片，以疊合的方式，將它疊合到 $\triangle DEF$ 上，則 $\triangle DEF$ 是否與 $\triangle ABC$ 全等？□是　□否

由 探索活動 可知，透明片 $\triangle ABC$ 可與 $\triangle DEF$ 疊合，所以 $\triangle DEF \cong \triangle ABC$。因此，當兩個三角形的兩組邊對應相等，且這兩組對應邊的夾角也相等，則這兩個三角形會全等，這個性質稱為 ***SAS* 全等性質**。

SAS 全等性質

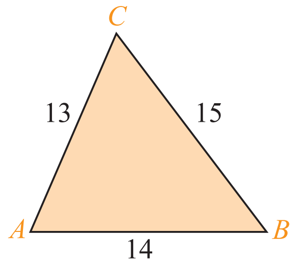
若兩個三角形有兩邊及它們的夾角皆對應相等，則這兩個三角形全等。

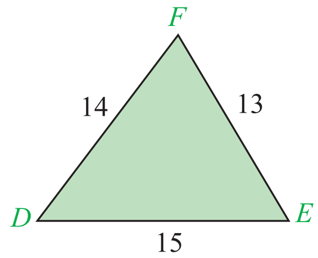


隨堂練習

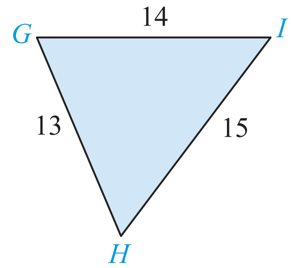
判別下列各三角形是否與 $\triangle ABC$ 全等？如果是，寫出它們所依據的全等性質。

(1)



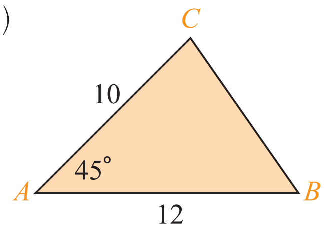


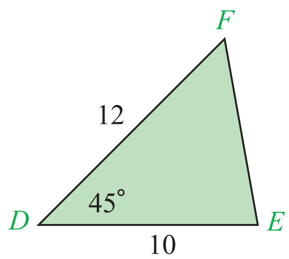
□是（______ 全等性質）
□否



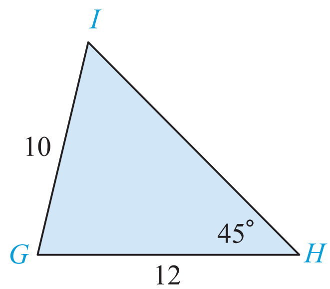
□是（______ 全等性質）
□否

(2)





□是（______ 全等性質）
□否



□是（______ 全等性質）
□否

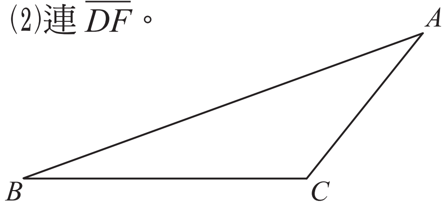
接下來，我們將討論增加「一組角對應相等」時，如果對應相等的角不是兩組已知對應相等邊的夾角，則以符號 *SSA* 表示這種情況，其中**把 *A* 寫在兩個 *S* 後面，表示這個角不是兩個邊的夾角**。那麼，在 *SSA* 的條件下，這兩個三角形是否會全等？

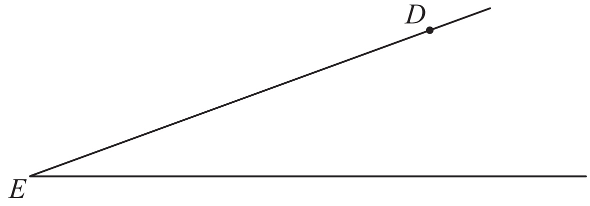
探索活動 *SSA* 不一定全等

1. 如圖，已知 $\triangle ABC$ 及 $\angle E$，且 $\angle E=\angle B$，若在 $\angle E$ 的一邊取一點 D，使得 $\overline{DE}=\overline{AB}$，依下列步驟完成作圖：

   (1)以 D 點為圓心，$\overline{AC}$ 長為半徑畫弧，交 $\angle E$ 的另一邊於 F 點。

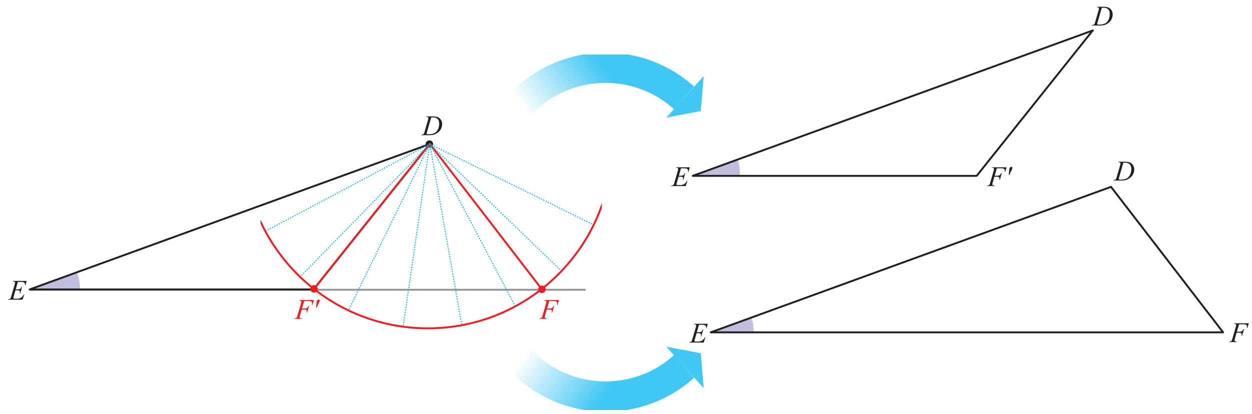
   (2)連 $\overline{DF}$。





2. 其他同學所畫的三角形與你畫的三角形是否都全等呢？

在 探索活動 中，已知$\triangle ABC$，滿足 $\overline{DE}=\overline{AB}$，$\overline{DF}=\overline{AC}$，$\angle E=\angle B$ 這樣條件的$\triangle DEF$ 有兩個，如下圖。



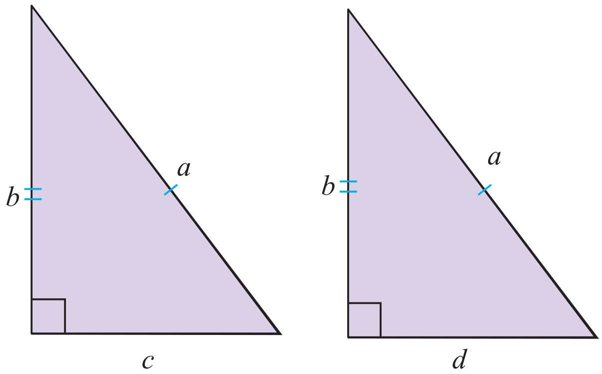
由上可知，當兩個三角形對應相等的角不是兩組已知對應相等邊的夾角時，這兩個三角形不一定會全等，所以 ***SSA* 不能作為全等的判別性質**。

如果 *SSA* 中的 *A* 是直角，那麼這兩個三角形是否一定全等呢？

RHS 全等性質

自評 P132 第 6 題(5)

如下圖，兩個直角三角形的斜邊長都是 a，且各有一股長是 b；第一個三角形的另一股是 c，第二個三角形的另一股是 d。



由畢氏定理可得 $\begin{cases} b^2+c^2=a^2 \\ b^2+d^2=a^2 \end{cases}$，

所以 $b^2+c^2=b^2+d^2$，得 $c^2=d^2$。

因為 c、d 皆為正數，所以 $c=d$。

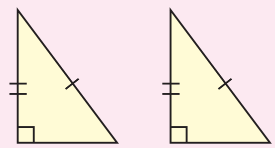
根據 *SSS* 全等性質可知，

這兩個三角形會全等。

由上可知，當兩個直角三角形的斜邊對應相等，且其中一股對應相等，則這兩個直角三角形會全等，這個性質稱為 ***RHS* 全等性質**。其中 *RHS* 中的 *R* 代表直角（*right angle*），*H* 代表斜邊（*hypotenuse*），*S* 指其中一股（*side*）。

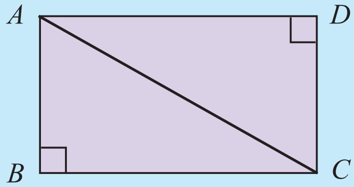
RHS 全等性質

若兩個直角三角形的斜邊及一股對應相等，則這兩個三角形全等。



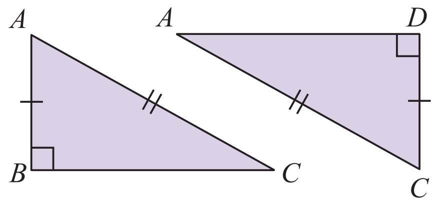
例 7 *RHS* 全等性質

如圖，$\triangle ABC$ 與 $\triangle CDA$ 中，$\overline{AB}=\overline{CD}$，
$\angle B=\angle D=90^\circ$，說明 $\triangle ABC \cong \triangle CDA$。



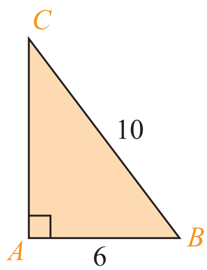
說明

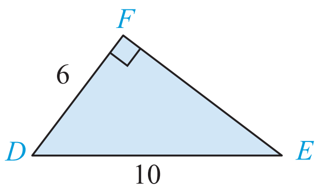
在 $\triangle ABC$ 與 $\triangle CDA$ 中，
$\because \overline{AB}=\overline{CD}$（已知），
　$\angle B=\angle D=90^\circ$（已知），
　$\overline{AC}=\overline{AC}$（公用邊），
$\therefore \triangle ABC \cong \triangle CDA$（*RHS* 全等性質）。

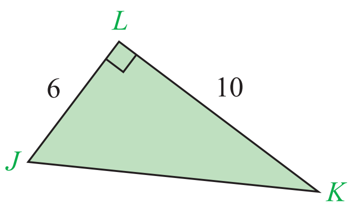


隨堂練習

利用 *RHS* 全等性質，判別下列各三角形是否與 $\triangle ABC$ 全等？
如果全等，寫出該全等的三角形中，$\angle C$ 的對應角為何？







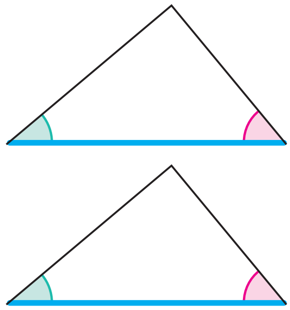
□是
　$\angle C$ 的對應角為 ______
□否

□是
　$\angle C$ 的對應角為 ______
□否

ASA 全等性質

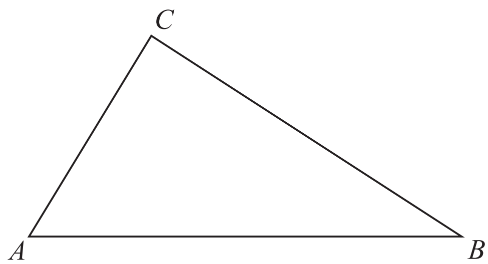
自評 P132 第 6 題 (2)

已知兩個三角形的兩組角對應相等，如果再增加「一組邊對應相等」的條件，這兩個三角形會全等嗎？如果此對應相等的邊是兩組已知對應相等角的夾邊，如右圖，以符號 ASA 表示這種情況。其中把 S 寫在兩個 A 中間，表示這個邊是兩個角的夾邊。那麼，在 ASA 的條件下，兩個三角形是否一定會全等？



探索活動 ASA 全等性質

1. 如右圖，已知 $\triangle ABC$，在 作圖區 中已有一個與 $\overline{AB}$ 等長度的 $\overline{DE}$。利用以下尺規作圖的作法，在 作圖區 畫出 $\triangle DEF$，使得 $\angle D=\angle A$、$\angle E=\angle B$、$\overline{DE}=\overline{AB}$。



作法

❶ 以 D 點為頂點，$\overline{DE}$ 為一邊，作 $\angle D=\angle A$。

❷ 以 E 點為頂點，$\overline{DE}$ 為一邊，作 $\angle E=\angle B$。

❸ 令 $\angle D$ 和 $\angle E$ 另一邊相交的點為 F，則 $\triangle DEF$ 就是所求的三角形。

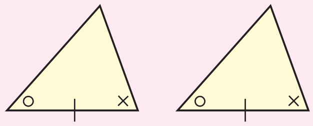
作圖區

2. 取出附件 15 的透明片，以疊合的方式，將它疊合到 $\triangle DEF$ 上，則 $\triangle DEF$ 是否與$\triangle ABC$ 全等？□是　□否

由 探索活動 可以發現，如果對應相等的邊是兩組已知對應相等角的夾邊時，則這兩個三角形會全等，這個性質稱為 ***ASA* 全等性質**。

ASA 全等性質

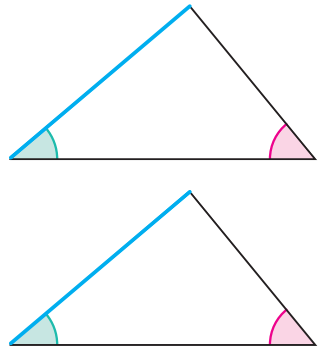
若兩個三角形有兩個內角及它們的夾邊皆對應相等，則這兩個三角形全等。



自評 P132 第 6 題(1)

AAS 全等性質

如圖，當對應相等的邊不是兩組已知對應相等角的夾邊，而是其中一個已知角的對邊，我們以符號 AAS 表示這種情況，其中把 S 寫在兩個 A 後面，表示這個邊不是兩個角的夾邊。那麼，在 AAS 的條件下，兩個三角形是否一定會全等呢？



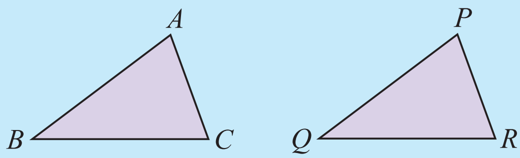
例8 AAS 與 ASA

自評 P132 第 6(2)、7 題

如圖，$\triangle ABC$ 與 $\triangle PQR$ 中，

$\angle A=\angle P$，$\angle B=\angle Q$，$\overline{BC}=\overline{QR}$。

說明 $\triangle ABC\cong\triangle PQR$。



解

(1) $\because$ 三角形內角和是 180°，且 $\angle A=\angle P$，$\angle B=\angle Q$，

$\therefore \angle C=180^\circ-\angle A-\angle B=180^\circ-\angle P-\angle Q=\angle R$。

(2) $\triangle ABC$ 與 $\triangle PQR$ 中，

$\because \angle B=\angle Q$（已知），$\overline{BC}=\overline{QR}$（已知），

$\angle C=\angle R$（由(1)可知），

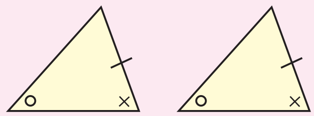
$\therefore \triangle ABC\cong\triangle PQR$（$ASA$ 全等性質）。

（　）內的文字為該步驟所依據的原理說明。

由例8可知，兩個三角形的兩個內角及其中一個內角的對邊對應相等時，則這兩個三角形會全等，這個性質稱為 **AAS 全等性質**。

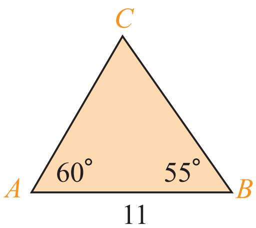
AAS 全等性質

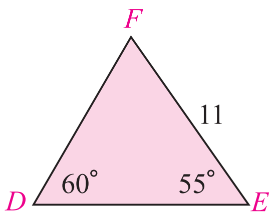
若兩個三角形有兩個內角及其中一個內角的對邊對應相等，則這兩個三角形全等。



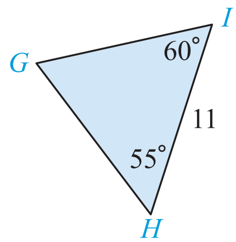
隨堂練習

1. 利用 ASA 全等性質，判別下列各三角形是否與$\triangle ABC$ 全等？
   如果全等，寫出該全等的三角形中，$\overline{BC}$ 的對應邊為何？



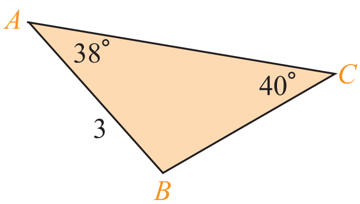


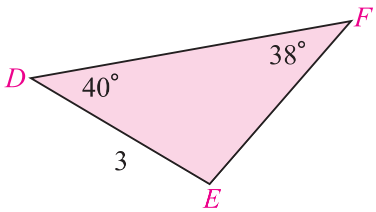
□是
$\overline{BC}$ 的對應邊為 ______
□否



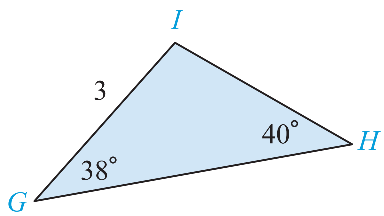
□是
$\overline{BC}$ 的對應邊為 ______
□否

2. 利用 AAS 全等性質，判別下列各三角形是否與$\triangle ABC$ 全等？
   如果全等，寫出該全等的三角形中，$\overline{BC}$ 的對應邊為何？





□是
$\overline{BC}$ 的對應邊為 ______
□否

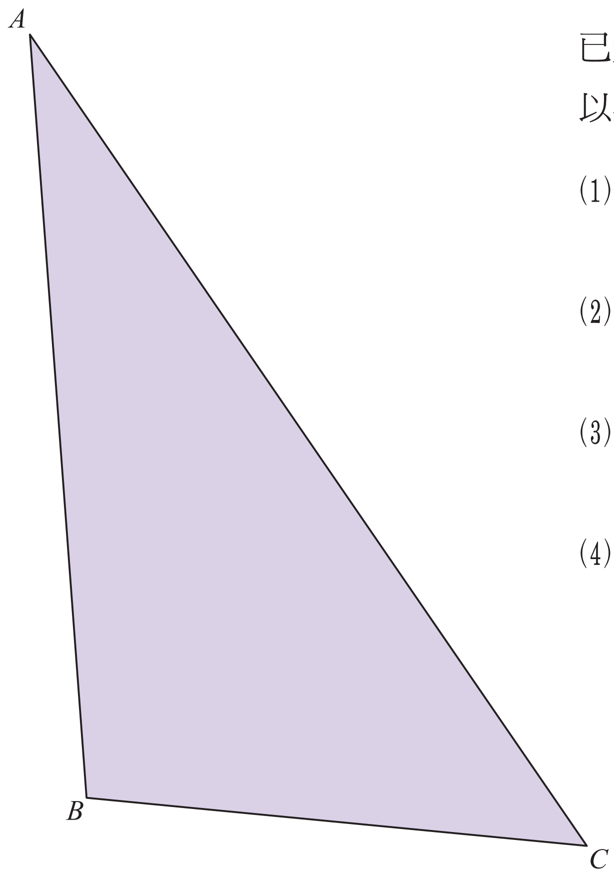


□是
$\overline{BC}$ 的對應邊為 ______
□否

XII 此為羅馬數字的 12，它的一半是多少？

如果兩個三角形的三組對應角相等時，這兩個三角形會全等嗎？

探索活動 *AAA* 不一定全等



已知 $\triangle ABC$，拿出附件 16 的 $\triangle DEF$，以疊合的方式，並回答下列問題：

(1) $\angle D$ 與 $\angle A$ 的度數是否相等？

(2) $\angle E$ 與 $\angle B$ 的度數是否相等？

(3) $\angle F$ 與 $\angle C$ 的度數是否相等？

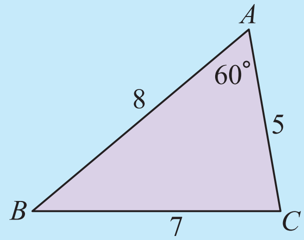
(4) $\triangle DEF$ 與 $\triangle ABC$ 是否全等？

由 探索活動 可知，當這兩個三角形的三組角都對應相等，但是它們的三組邊不一定對應相等，所以這兩個三角形不會全等，亦即 ***AAA* 不能作為全等的判別性質**。這也就是為什麼在 P115 玻璃店老闆與妙麗的對話中，老闆要求她提供 100° 對邊的長度，因為知道一個邊的長度後，就可依據 *ASA* 或 *AAS* 的全等性質作出與原三角形全等的玻璃。

兩個三角形若可完全疊合，則這兩個三角形全等。然而，要證明兩個三角形全等時，不必用到三組邊及三組角都對應相等這六個條件，它們只要符合 *SSS*、*SAS*、*RHS*、*ASA* 或 *AAS* 中的任何一種判別方法，就可以知道兩個三角形全等。

例9 三角形的全等性質

如圖，$\triangle ABC$ 中，$\angle A=60^\circ$，$\overline{AC}=5$，$\overline{AB}=8$，$\overline{BC}=7$。安琪和傑克各自選擇三個條件作出一個與 $\triangle ABC$ 全等的 $\triangle DEF$，已知兩人所用的條件如下，寫出他們是根據哪一個全等的判別方法？



安琪：$\overline{DE}=8$，$\overline{DF}=5$，$\overline{EF}=7$。 傑克：$\overline{DE}=8$，$\overline{DF}=5$，$\angle D=60^\circ$。

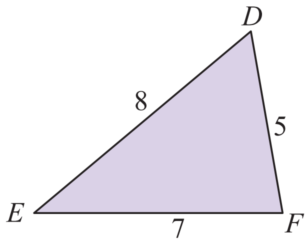
解 安琪選擇的三個條件

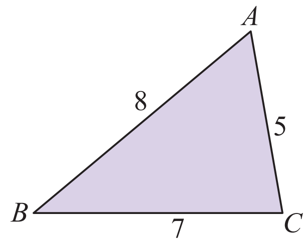
$\overline{DE}=\overline{AB}=8$，

$\overline{DF}=\overline{AC}=5$，

$\overline{EF}=\overline{BC}=7$，

$\therefore$根據 SSS 全等性質可得 $\triangle DEF\cong\triangle ABC$。





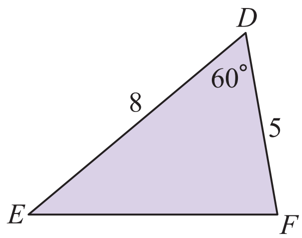
傑克選擇的三個條件

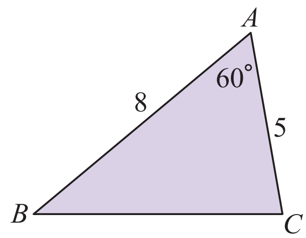
$\overline{DE}=\overline{AB}=8$，

$\overline{DF}=\overline{AC}=5$，

$\angle D=\angle A=60^\circ$，

$\therefore$根據 SAS 全等性質可得 $\triangle DEF\cong\triangle ABC$。





隨堂練習

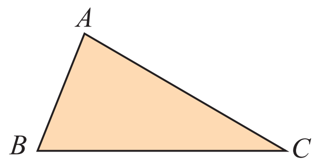
如圖，$\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 是兩個三角形，完成下列空格：

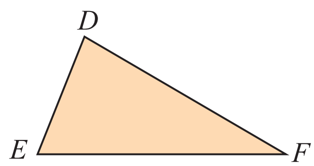
(1)如果 $\angle B=\angle E$，$\angle C=\angle F$，$\overline{BC}=\overline{EF}$，

則根據 ______ 全等性質可得，$\triangle ABC\cong\triangle DEF$。

(2)如果 $\angle B=\angle E$，$\angle C=\angle F$，$\overline{AC}=\overline{DF}$，

則根據 ______ 全等性質可得，$\triangle ABC\cong\triangle DEF$。





第3章

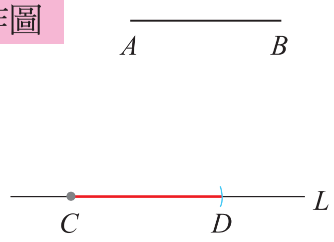
解答：7。（上下一半為 VII，即羅馬數字 7）

重點回顧

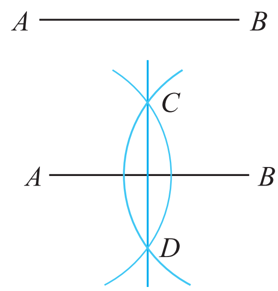
❶尺規作圖

尺規作圖是指用直尺和圓規畫圖，而且直尺只用於畫直線或線段，不利用上面的刻度。基本尺規作圖包含以下 6 種：

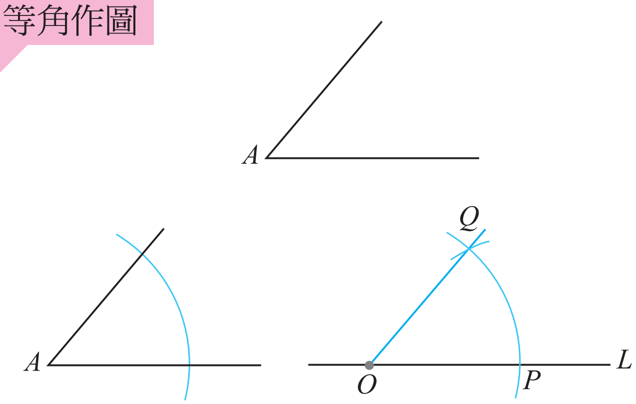
等線段作圖



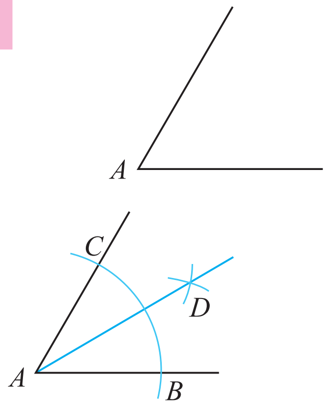
中垂線作圖



等角作圖

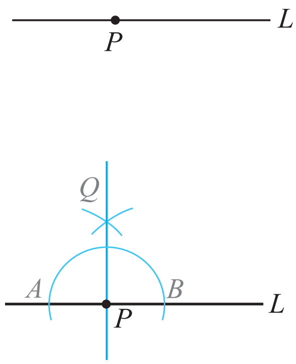


角平分線作圖

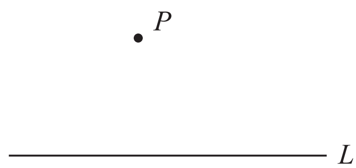


垂線作圖

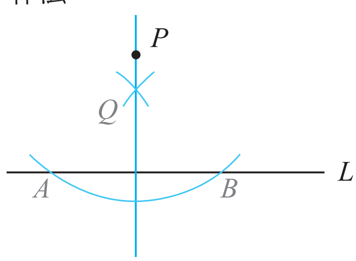
過線上一點



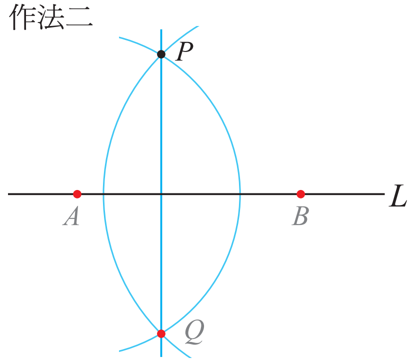
過線外一點



作法一



作法二

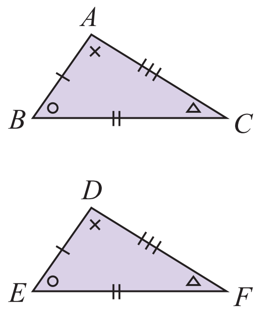


❷多邊形的全等

(1)若兩個多邊形全等，則對應邊相等，對應角也相等。

(2)若兩個多邊形的邊都對應相等，角也都對應相等，則這兩個多邊形全等。

❸全等三角形

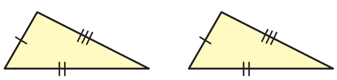


兩個全等三角形的對應邊相等，對應角也相等。

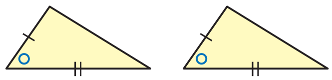
例 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$，$A$、$B$、$C$ 三點的對應頂點分別為 D、E、F 三點，則 $\overline{AB}=\overline{DE}$，$\overline{BC}=\overline{EF}$，$\overline{AC}=\overline{DF}$，$\angle A=\angle D$，$\angle B=\angle E$，$\angle C=\angle F$。

❹三角形全等的判別方法

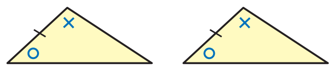
SSS 全等性質



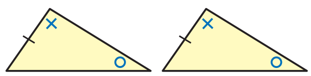
SAS 全等性質



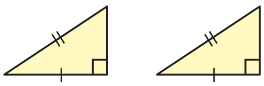
ASA 全等性質



AAS 全等性質



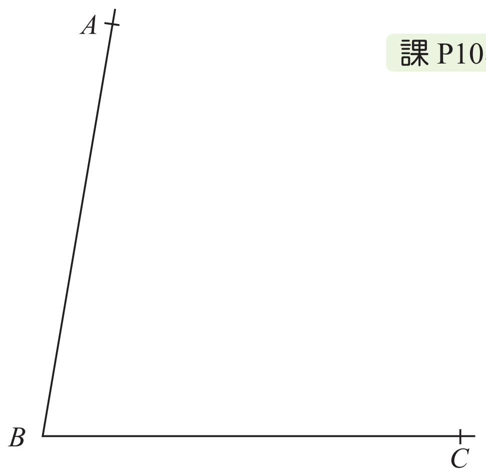
RHS 全等性質



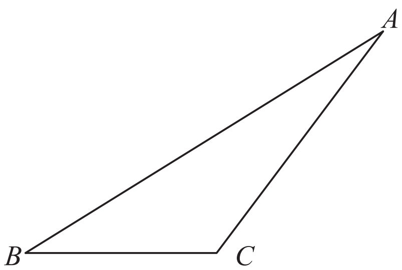
3-2自我評量

1 如圖，利用尺規作圖在 $\overline{AB}$ 上作一點 P，使得 $\overline{AP}:\overline{PB}=1:3$。 課 P106 隨堂

2 如圖，$\angle ABC=80^\circ$，利用尺規作圖在 $\angle ABC$ 上畫出 $\angle ABP=20^\circ$。 課 P108 例 3

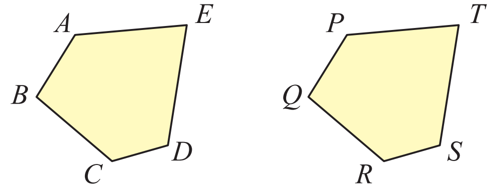


3 如圖，$\triangle ABC$ 為鈍角三角形，利用尺規作圖畫出 $\overline{BC}$ 上的高。 課 P110 例 5



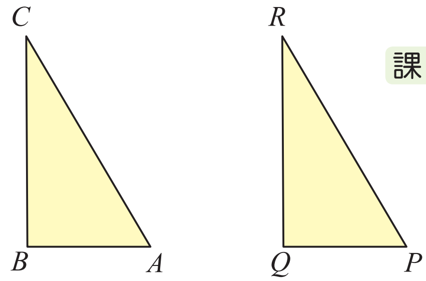
④如圖，五邊形 $ABCDE$ 與五邊形 $PQRST$ 全等，且 A、B、C、D、E 的對應頂點分別是 P、Q、R、S、T。若 $\angle A=130^\circ$，$\angle B=98^\circ$，$\angle C=122^\circ$，$\overline{RS}=13$，求：

課 P113 隨堂



(1) $\angle S+\angle T$ 的度數。　　(2) $\overline{CD}$ 的長。

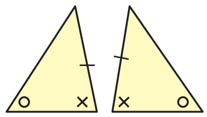
⑤如圖，$\triangle ABC \cong \triangle PQR$，且頂點 A、B、C 的對應點分別是頂點 P、Q、R。若 $\angle C=30^\circ$，$\angle P=60^\circ$，$\overline{PR}=2\sqrt{3}$。求：(1) $\angle B$。　　(2) $\overline{AC}$ 的長。



課 P114 課文

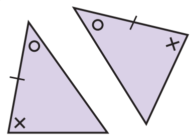
6 下列各組圖形中，有一些線段或角有標示符號，相同的符號表示長度或角度相等。對照圖中每一組全等的三角形，寫出適合的全等性質。 課 P116 ～124 課文

(1)



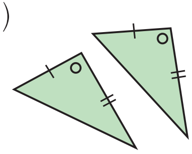
__________全等性質

(2)



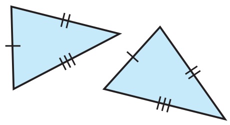
__________全等性質

(3)



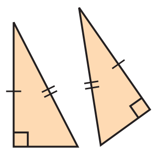
__________全等性質

(4)



__________全等性質

(5)



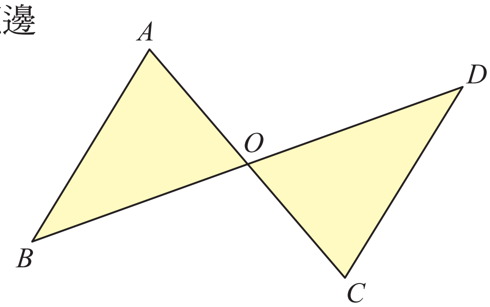
__________全等性質

7 如圖，$\overline{AC}$ 和 $\overline{BD}$ 交於 O 點，$\angle A=\angle C$，$\overline{BO}=\overline{DO}$。 課 P124 例 8

(1)在右圖的兩個三角形中，以相同的記號標示對應邊或對應角，來說明$\triangle ABO\cong\triangle CDO$。

(2)哪一個全等性質可以說明$\triangle ABO\cong\triangle CDO$？
（在□中打「✓」）

□SSS　□SAS　□AAS　□RHS



3-3 全等三角形的應用

1 全等三角形性質的應用

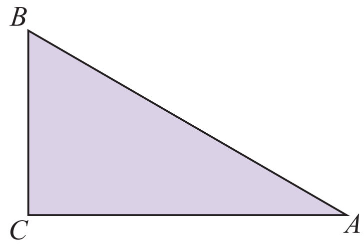
如果有一個三角形，其最長邊的邊長平方等於另兩邊長的平方和，則此三角形會是直角三角形嗎？

探索活動 由邊長判別直角三角形

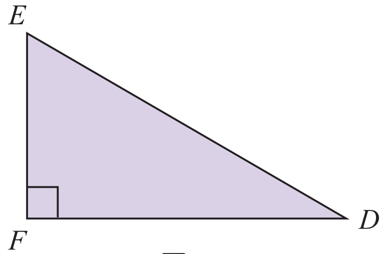
如圖一，$\triangle ABC$ 中，$\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2$。

如圖二，$\triangle DEF$ 中，$\angle F=90^\circ$，且 $\overline{DF}=\overline{AC}$，$\overline{EF}=\overline{BC}$。

依據上述條件，回答下列問題：



圖一



圖二

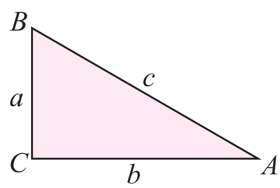
(1) $\overline{AB}$ 和 $\overline{DE}$ 是否相等？為什麼？

(2) $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 是否全等？為什麼？

(3) $\angle C$ 為多少度？

由邊長判別直角三角形

已知 a、b、c 為 $\triangle ABC$ 的三邊長，若 $a^2+b^2=c^2$，則 $\triangle ABC$ 為直角三角形，且 $\angle C=90^\circ$。



隨堂練習

判別下列各組數是否可以作為直角三角形的三邊長，在□中打「✓」。

(1) $\sqrt{2}$、$\sqrt{3}$、$\sqrt{5}$ □是 □否　　(2) 5、12、13 □是 □否

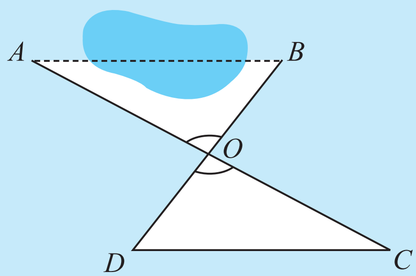
(3) 6、8、10 □是 □否　　(4) 13、14、15 □是 □否

補給站 利用全等性質測量

泰利斯（*Thales*，西元前 624 年～西元前 546 年）是古希臘時期的哲學家和科學家，後人稱為「科學和哲學之祖」。泰利斯曾遊歷古埃及，跟當地祭司學習數學知識，並運用金字塔的陰影計算其高度，他也曾準確預言西元前 585 年 5 月 28 日有日全蝕，並計算尼羅河氾濫的時間，因而獲得當時國王阿馬西斯（*Amasis*）的賞識。

現代的幾何學知識發源於希臘，泰利斯則首開希臘幾何研究之先河，他發現兩個三角形中，若有一角及夾此角的兩邊分別對應相等，則這兩個三角形全等，並利用此性質計算出因為隔著山或池塘而無法直接測量的兩個地點之距離。

如圖，泰利斯的方法是分別在 $\overrightarrow{AO}$、$\overrightarrow{BO}$ 上找到 C、D 兩點，使得 $\overline{AO}=\overline{OC}$、$\overline{BO}=\overline{OD}$，又 $\angle AOB=\angle COD$（對頂角相等），根據 SAS 全等性質，可得$\triangle AOB\cong\triangle COD$，最後實際測量 $\overline{CD}$ 的長度，便可以得到 $\overline{AB}$ 的長度。

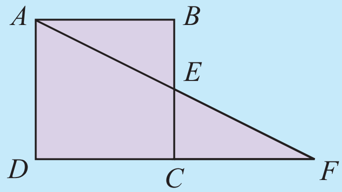


接著，我們利用三角形全等性質的判別方法，探討幾何圖形中的一些對應關係。

例1 全等三角形性質的應用

自評 P146 第 1、2 題

如圖，正方形 $ABCD$ 中，E 是 $\overline{BC}$ 的中點，延長 $\overline{AE}$ 交 $\overline{DC}$ 的延長線於 F 點。若 $\overline{AB}=6$，則 $\overline{AF}$ 的長是多少？



解 在△ABE 與△FCE 中，

∵ $\angle ABE=\angle FCE=90^\circ$（$ABCD$ 是正方形），

$\overline{BE}=\overline{EC}$（$E$ 是 $\overline{BC}$ 的中點），

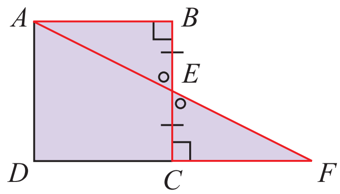
$\angle AEB=\angle CEF$（對頂角），

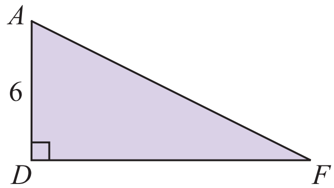
∴△$ABE\cong$△FCE（ASA 全等性質）。

故 $\overline{AB}=\overline{CF}=6$（對應邊相等）。

在直角三角形 ADF 中，由畢氏定理可知

$\overline{AF}=\sqrt{6^2+(6+6)^2}=\sqrt{180}=6\sqrt{5}$。





隨堂練習

如圖，△ABC 與△BDE 為正三角形，E 點在 $\overline{BC}$上。

(1)完成下列空格，說明△$ABE\cong$△CBD。

在△ABE 與△CBD 中，

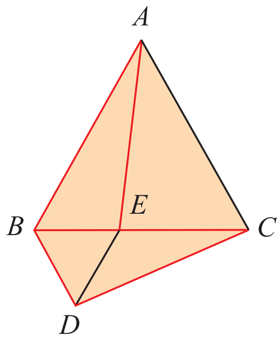
∵ $\overline{AB}=\overline{CB}$（________ 為正三角形），

$\overline{BE}=\overline{BD}$（________ 為正三角形），

$\angle ABE=\angle CBD=60^\circ$（正三角形的內角為 60°），

∴△$ABE\cong$△CBD（________ 全等性質）。

(2)若 $\angle BAE=25^\circ$，求 $\angle BDC$、$\angle EDC$ 的度數。

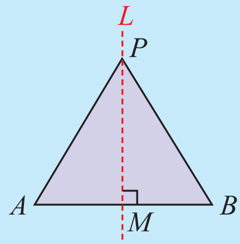


2 中垂線

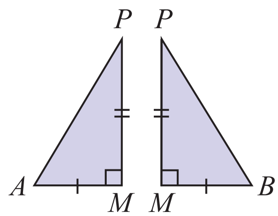
在 3-2 曾利用尺規作圖畫出線段的中垂線，接下來，我們將利用三角形的全等性質說明中垂線的性質。

例2 中垂線的性質

如圖，直線 L 是 $\overline{AB}$ 的中垂線，P 是直線 L 上任意一點，連接 $\overline{PA}$、$\overline{PB}$，利用三角形全等性質說明 $\overline{PA}=\overline{PB}$。



說明



在△PAM 與△PBM 中，

$\because$ $\angle PMA=\angle PMB=90^\circ$（直線 L 是 $\overline{AB}$ 的中垂線），

$\overline{AM}=\overline{BM}$（直線 L 是 $\overline{AB}$ 的中垂線），$\overline{PM}=\overline{PM}$（公用邊），

$\therefore$ △$PAM\cong$△PBM（SAS 全等性質）。

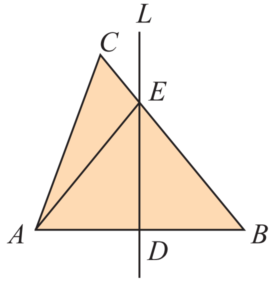
故 $\overline{PA}=\overline{PB}$（對應邊相等）。

中垂線性質

一線段中垂線上任一點到此線段的兩端點距離相等。

隨堂練習

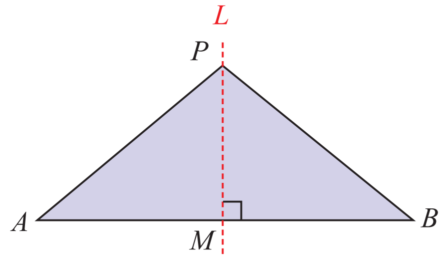
如圖，△ABC 中，直線 L 是 $\overline{AB}$ 的中垂線，若 $\overline{AB}=14$，$\overline{BC}=15$，$\overline{AC}=13$，求△ACE 的周長。



由 例2 知道，若 P 是 $\overline{AB}$ 中垂線上任意一點，則 P 點到 $\overline{AB}$ 的兩端點（A 點與 B 點）距離相等。反過來說，P 點是 $\overline{AB}$ 線外的一點，且 $\overline{PA}=\overline{PB}$，那麼 P 點會在 $\overline{AB}$ 的中垂線上嗎？

例3 中垂線的判別

如圖，P 點是 $\overline{AB}$ 外一點，且 $\overline{PA}=\overline{PB}$，自 P 點作直線 $L\perp\overline{AB}$，且交 $\overline{AB}$ 於 M 點，利用三角形全等性質說明直線 L 是 $\overline{AB}$ 的中垂線。



說明

在$\triangle PAM$與$\triangle PBM$中，

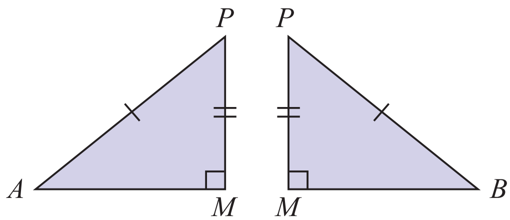
$\because \angle PMA=\angle PMB=90^\circ$（$L\perp\overline{AB}$），

$\overline{PA}=\overline{PB}$（已知），$\overline{PM}=\overline{PM}$（公用邊），

$\therefore \triangle PAM\cong\triangle PBM$（$RHS$ 全等性質），

故 $\overline{AM}=\overline{BM}$（對應邊相等），

由於 $\overline{AM}=\overline{BM}$ 且 $L\perp\overline{AB}$，因此，直線 L 是 $\overline{AB}$ 的中垂線。

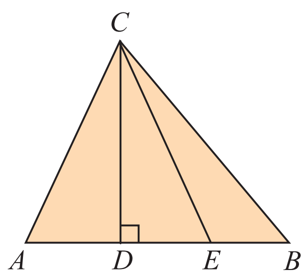


中垂線的判別

若一點到某線段的兩端點距離相等，則該點在此線段的中垂線上。

隨堂練習

如圖，$\triangle ABC$ 中，$\overline{CD}$ 是 $\overline{AB}$ 上的高，若 $\overline{AC}=\overline{CE}=13$，$\overline{AE}=10$，$\overline{BC}=15$，求 $\overline{BE}$。

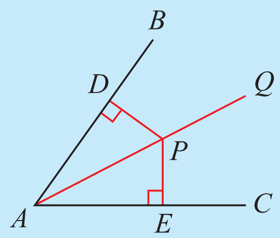


3 角平分線

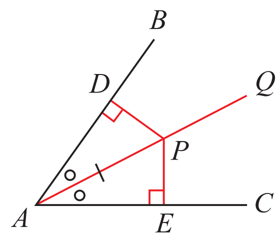
我們曾利用尺規作圖作一個角的分角線，作圖時是利用對稱的觀念畫出分角線。對稱圖形上的對稱點與對稱軸的距離相等，接下來，將說明分角線上的任一點到兩邊的距離相等。

例4 角平分線的性質

如圖，$\overrightarrow{AQ}$ 為 $\angle BAC$ 的角平分線，P 點在 $\overrightarrow{AQ}$ 上，$\overline{PD}\perp\overline{AB}$，$\overline{PE}\perp\overline{AC}$。利用三角形的全等性質說明 $\overline{PD}=\overline{PE}$。



說明



在 $\triangle APD$ 與 $\triangle APE$ 中，

$\because \angle ADP=\angle AEP=90^\circ$（$\overline{PD}\perp\overline{AB}$，$\overline{PE}\perp\overline{AC}$），

$\angle PAD=\angle PAE$（$\overrightarrow{AQ}$ 為 $\angle BAC$ 的角平分線），

$\overline{AP}=\overline{AP}$（公用邊），

$\therefore \triangle APD\cong\triangle APE$（$AAS$ 全等性質），

故 $\overline{PD}=\overline{PE}$（對應邊相等）。

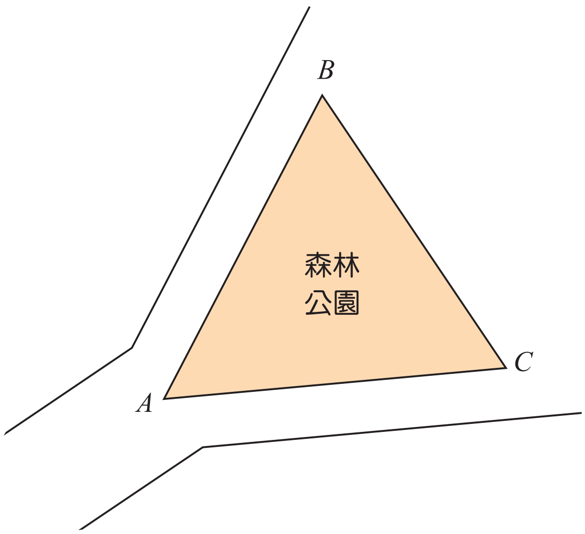
從 例4 可知，若 P 點在 $\angle BAC$ 的角平分線上，則 P 點到 $\angle BAC$ 兩邊的距離相等。

角平分線的性質

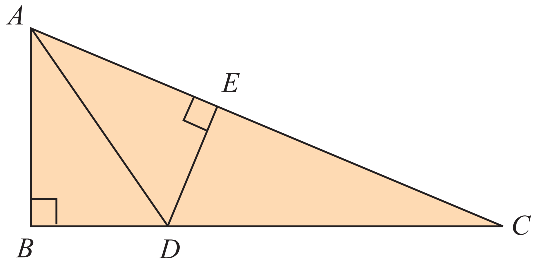
一角的角平分線上任一點到此角的兩邊距離相等。

隨堂練習

1. 如圖，亮瑜想從三角形森林公園內找一點建一座噴水池，使得噴水池到兩邊的 $\overline{AB}$、$\overline{AC}$ 距離都相等，利用尺規作圖幫亮瑜找出這個點應在哪條線上，並直接畫在下圖中。

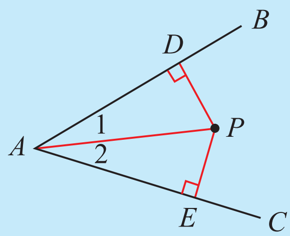


2. 如圖，$\triangle ABC$ 中，$\overline{AD}$ 平分 $\angle BAC$，$\angle B=\angle AED=90^\circ$，$\overline{AB}=15$，$\overline{AC}=39$，$\overline{DE}=10$，求 $\overline{CD}$ 的長。

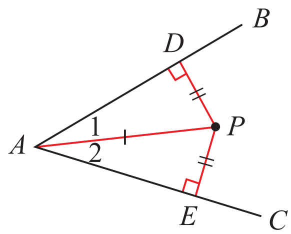


例5 角平分線的判別

如圖，P 點為 $\angle BAC$ 內部一點，$\overline{PD}\perp\overline{AB}$，$\overline{PE}\perp\overline{AC}$，$\overline{PD}=\overline{PE}$。利用三角形的全等性質說明 $\overline{AP}$ 平分 $\angle BAC$。



說明



在 $\triangle APD$ 與 $\triangle APE$ 中，

$\because \angle ADP=\angle AEP=90^\circ$（$\overline{PD}\perp\overline{AB}$，$\overline{PE}\perp\overline{AC}$），

$\overline{PD}=\overline{PE}$（已知），$\overline{AP}=\overline{AP}$（公用邊），

$\therefore \triangle APD\cong\triangle APE$（$RHS$ 全等性質），

故 $\angle 1=\angle 2$（對應角相等），因此 $\overline{AP}$ 平分 $\angle BAC$。

從 例5 可知，若 P 點為 $\angle BAC$ 內部一點，且 P 點到 $\angle BAC$ 兩邊的距離相等，則 P 點在 $\angle BAC$ 的角平分線上。

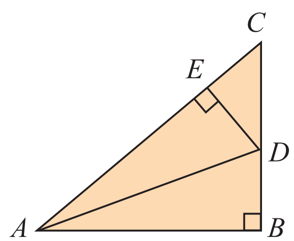
角平分線的判別

同一平面上，若一點到某角的兩邊距離相等，則該點在此角的角平分線上。

隨堂練習

自評 P147 第 3 題

如圖，$\triangle ABC$ 中，$\angle B=\angle AED=90^\circ$，$\overline{DB}=\overline{DE}$，$\angle C=50^\circ$，求 $\angle ADB$ 的度數。



4 特殊三角形的邊長與面積

等腰三角形

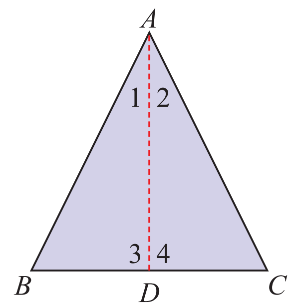
我們曾用線對稱圖形的概念說明等腰三角形的一些性質，接下來將利用三角形的全等性質說明等腰三角形的性質。

例6 等腰三角形的性質

如圖，$\triangle ABC$ 為等腰三角形，$\overline{AB}=\overline{AC}$，$\overline{AD}$ 平分 $\angle BAC$，交 $\overline{BC}$ 於 D 點。

(1)說明 $\angle B=\angle C$。

(2)說明 $\overline{AD}$ 垂直平分 $\overline{BC}$。



說明

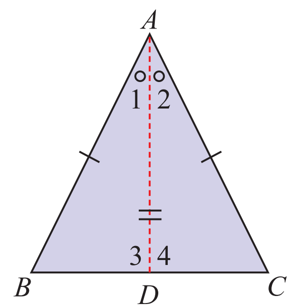
(1)在 $\triangle ABD$ 與 $\triangle ACD$ 中，

$\because \overline{AB}=\overline{AC}$（已知），$\angle 1=\angle 2$（$\overline{AD}$ 平分 $\angle BAC$），

$\overline{AD}=\overline{AD}$（公用邊），

$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ACD$（$SAS$ 全等性質）。

故 $\angle B=\angle C$（對應角相等）。



(2)$\because \triangle ABD \cong \triangle ACD$，

$\therefore \angle 3=\angle 4$（對應角相等），$\overline{BD}=\overline{CD}$（對應邊相等），

又 $\angle 3+\angle 4=180^\circ$，

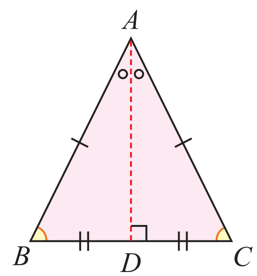
$\therefore \angle 3=\angle 4=90^\circ$，因此 $\overline{AD}\perp\overline{BC}$。

由 $\overline{BD}=\overline{CD}$ 且 $\overline{AD}\perp\overline{BC}$ 可知，$\overline{AD}$ 垂直平分 $\overline{BC}$。

等腰三角形的性質

1.等腰三角形的兩底角相等。

2.等腰三角形的頂角平分線也是底邊的垂直平分線。

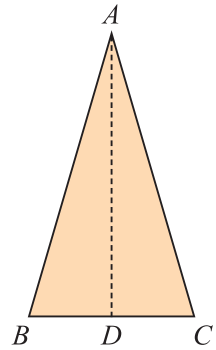


第3章

隨堂練習

自評 P147 第 4 題

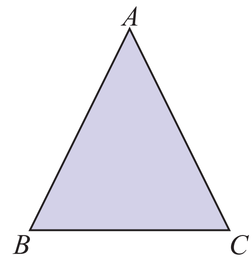
$\triangle ABC$ 中，$\overline{AD}$ 平分$\angle BAC$，若 $\overline{AB}=\overline{AC}=25$，$\overline{BC}=14$，求$\triangle ABC$ 的面積。



我們已經知道，等腰三角形的兩個底角會相等。如果反過來說，一個三角形有兩個角相等，這個三角形是等腰三角形嗎？

例7 等腰三角形的判別

如圖，$\triangle ABC$ 中，$\angle B=\angle C$，說明 $\overline{AB}=\overline{AC}$。



說明

作 $\overline{AD}\perp\overline{BC}$，交 $\overline{BC}$ 於 D 點。

在 $\triangle ABD$ 與 $\triangle ACD$ 中，

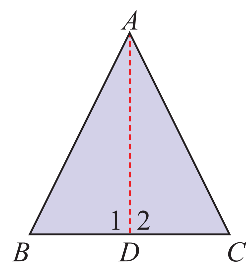
$\because \angle B=\angle C$（已知），

$\angle 1=\angle 2=90^\circ$（$\overline{AD}\perp\overline{BC}$），

$\overline{AD}=\overline{AD}$（公用邊）

$\therefore \triangle ABD\cong\triangle ACD$（$AAS$ 全等性質），

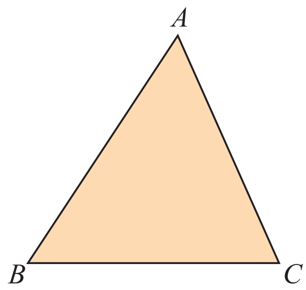
故 $\overline{AB}=\overline{AC}$。



由 例7 可知，若三角形有兩個角相等，則此三角形為等腰三角形。

隨堂練習

如圖，已知$\triangle ABC$中，$\angle B=57^\circ$，$\angle C=66^\circ$，則此三角形的三邊長中有哪兩個邊會等長？



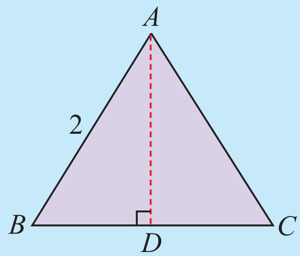
正三角形的高與面積

正三角形也是等腰三角形，接下來將利用等腰三角形的性質，推得正三角形高與面積的公式。

例8 正三角形的高與面積

自評 P147 第 5 題

如右圖，$\triangle ABC$是邊長為 2 的正三角形，$\overline{AD}$平分$\angle BAC$，求$\overline{AD}$的長與$\triangle ABC$的面積。



解

$\because \triangle ABC$是正三角形，也是等腰三角形，且$\overline{AD}$平分$\angle BAC$，

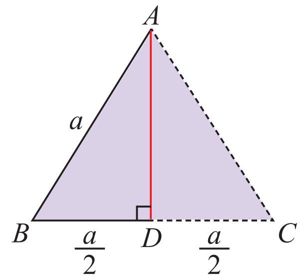
$\therefore \overline{AD}$垂直平分$\overline{BC}$，

因此$\overline{BD}=\dfrac{1}{2}\overline{BC}=1$。

由畢氏定理得$\overline{AD}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$

$$\triangle ABC\text{的面積}=\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{AD}=\frac{1}{2}\times 2\times\sqrt{3}=\sqrt{3}$$

在 例8 中，$\overline{AD}$ 為 $\overline{BC}$ 邊上的高，若將正三角形 ABC 的邊長改為 a，則 $\overline{BD}=\dfrac{1}{2}\overline{BC}=\dfrac{1}{2}a$，如右圖。



因此 $\overline{AD}=\sqrt{a^2-(\dfrac{1}{2}a)^2}=\sqrt{\dfrac{3}{4}a^2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$。

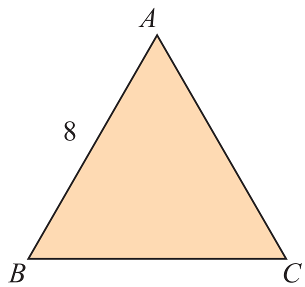
$$\begin{aligned}\text{正三角形 } ABC \text{ 的面積} &= \frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{AD}\\ &= \frac{1}{2}\times a\times\frac{\sqrt{3}}{2}a\\ &= \frac{\sqrt{3}}{4}a^2\end{aligned}$$

正三角形的高與面積

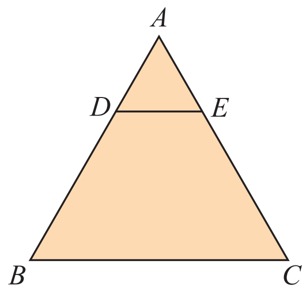
若正三角形的邊長為 a，則高為 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$，面積為 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2$。

隨堂練習

1. 如圖，$\triangle ABC$ 為正三角形，$\overline{AB}=8$，求 $\triangle ABC$ 的高與 $\triangle ABC$ 的面積。



2. 如圖，$\triangle ABC$ 與 $\triangle ADE$ 均為正三角形，$\overline{AD}=4$，$\overline{AB}=12$，求四邊形 $DBCE$ 的面積。



重點回顧

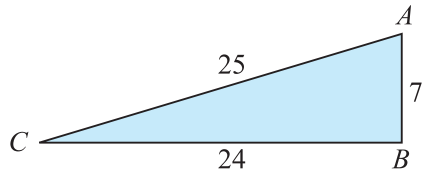
❶由邊長判別直角三角形

若三角形滿足一邊長的平方等於另兩邊長的平方和，則此三角形為直角三角形。

例 在$\triangle ABC$中，$\overline{AB}=7$，$\overline{BC}=24$，$\overline{AC}=25$，

$\because 7^2+24^2=49+576=625=25^2$，

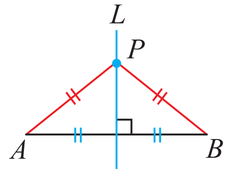
$\therefore \triangle ABC$為直角三角形。



❷中垂線的性質及其判別

一線段中垂線上任一點到此線段的兩端點距離相等；反之，若一點到某線段的兩端點距離相等，則該點在此線段的中垂線上。

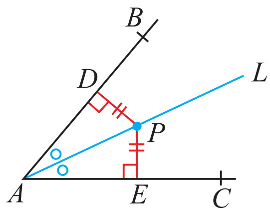
例 如圖，已知直線L垂直平分$\overline{AB}$，P為直線L上任意一點，則$\overline{PA}=\overline{PB}$；反之，若$\overline{PA}=\overline{PB}$，則$P$點在$\overline{AB}$的中垂線$L$上。



❸角平分線的性質及其判別

一個角的角平分線上任一點到此角的兩邊距離相等；反之，若某角內部的一點到此角的兩邊距離相等，則該點在此角的角平分線上。

例 如圖，已知L為$\angle BAC$的角平分線，P為L上任意一點，若$\overline{PD}\perp\overline{AB}$，$\overline{PE}\perp\overline{AC}$，則$\overline{PD}=\overline{PE}$；反之，$\overline{PD}\perp\overline{AB}$，$\overline{PE}\perp\overline{AC}$，且$\overline{PD}=\overline{PE}$，則$P$點在$\angle BAC$的角平分線$L$上。

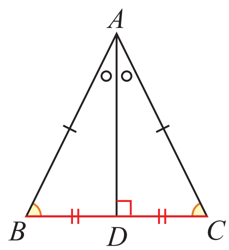


❹等腰三角形的性質

(1)等腰三角形的兩底角相等。

(2)等腰三角形的頂角平分線也是底邊的垂直平分線。

例 如圖，$\triangle ABC$為等腰三角形，$\overline{AB}=\overline{AC}$，$\overline{AD}$平分$\angle BAC$，交$\overline{BC}$於$D$點，則：(1)$\angle B=\angle C$，(2)$\overline{AD}$垂直平分$\overline{BC}$。

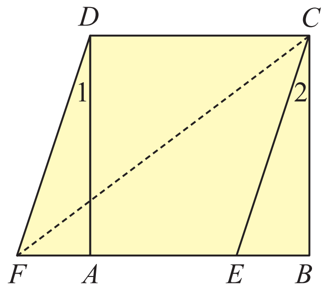


❺正三角形的高與面積

若正三角形的邊長為a，則高為$\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$，面積為$\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2$。

3-3自我評量

1 如圖，$ABCD$ 是正方形，F 在 $\overleftrightarrow{AB}$ 上，且 $\angle 1=\angle 2$。 課 P135 例 1



(1)在空格中填入適當的文字或符號，說明$\triangle ADF\cong\triangle BCE$。

說明

在$\triangle ADF$與$\triangle BCE$中，

$\because \overline{AD}=\overline{BC}$（理由：____________________）

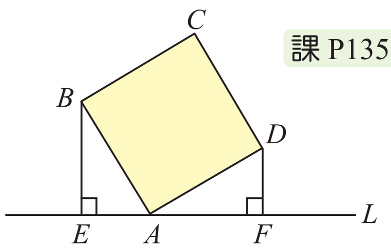
$\angle 1=\angle 2$（理由：________）

$\angle DAF=\angle CBE=90^\circ$（理由：____________________）

$\therefore \triangle ADF\cong\triangle BCE$（______全等性質）

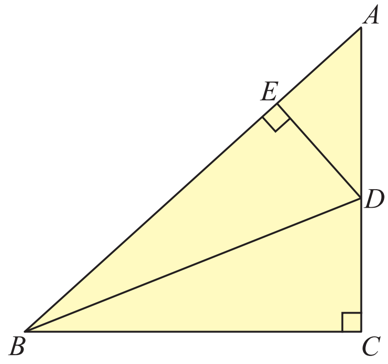
(2)若 $\overline{BC}=6$，$\overline{BE}=2$，求 $\overline{FC}=$？

2 如右圖，正方形 $ABCD$ 中的 A 點在直線 L 上，分別自 B、D 兩點向 L 作垂線，垂足為 E、F 兩點，若 $\overline{BE}=5$ 公分，$\overline{DF}=3$ 公分，求 $\overline{EF}$ 及正方形 $ABCD$ 的面積。 課 P135 例 1



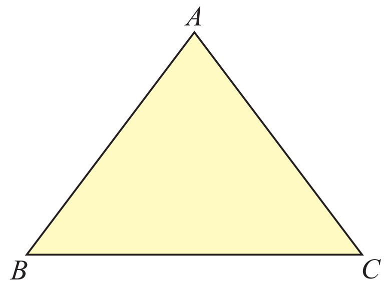
③如圖，$\triangle ABC$ 中，$\overline{BD}$ 平分$\angle ABC$，$\angle C=\angle BED=90^\circ$，$\overline{AB}=15$，$\overline{CD}=4$，求$\triangle ABD$ 的面積。

課 P140 隨堂



④如圖，$\triangle ABC$ 中，$\overline{AB}=\overline{AC}=25$，$\overline{BC}=30$，求 $\overline{BC}$上的高。

課 P142 隨堂

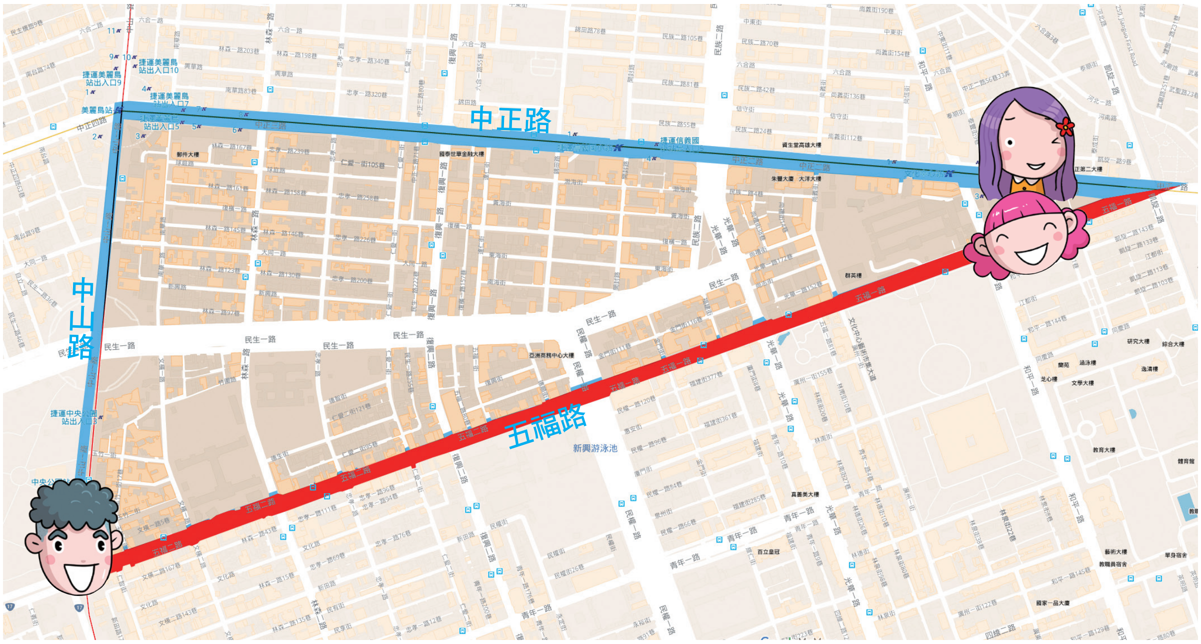


⑤有一個正三角形的高為 $10\sqrt{3}$ 公分，求此正三角形的面積。

課 P143 例 8

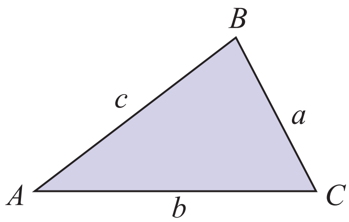
3-4 三角形的邊角關係

1 三角形三邊長的關係



高雄市區的這三條路剛好圍成一個三角形，由於**兩點之間的距離以直線距離為最短**，所以洛基走五福路是最短的距離，因此能最快到達新崛江。

接下來，進一步說明「三角形的三邊長」有何關係：如右圖，a、b、c 表示任意$\triangle ABC$ 三內角$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的對邊長。



因為兩點之間的距離以直線距離為最短，因此可以得到**三角形任意兩邊長的和大於第三邊的長**。

即 $\begin{cases} a+b>c \Rightarrow a>c-b \\ b+c>a \\ c+a>b \Rightarrow a>b-c \end{cases}$　b、c 兩邊的差小於第三邊 a。

同理，a、c 兩邊的差小於第三邊 b；a、b 兩邊的差小於第三邊 c。

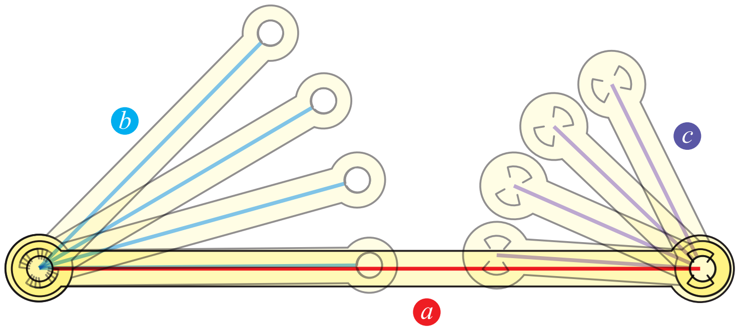
下面我們要學習如何利用操作，判別給定的三條線段的長度，是否能形成一個三角形？

分別拿出附件 12 中三組長度為 a、b、c 的扣條（a 為最長），將長度為 b、c 的扣條扣在長度為 a 的扣條兩端，操作及結果如下：

配合附件12-2

第一組 ： $b+c<a$

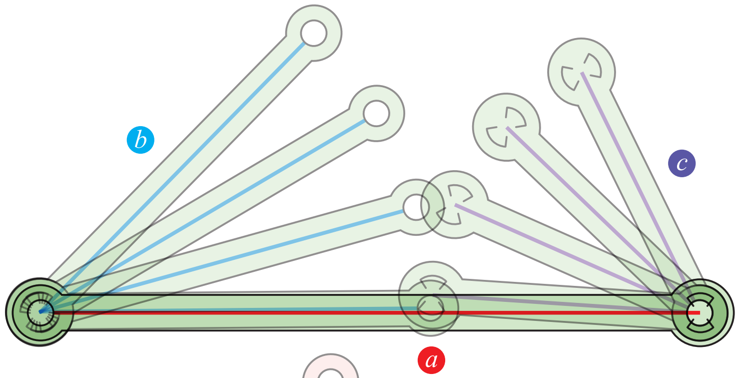
兩弧沒有交點，
不能形成三角形。



配合附件12-3

第二組 ： $b+c=a$

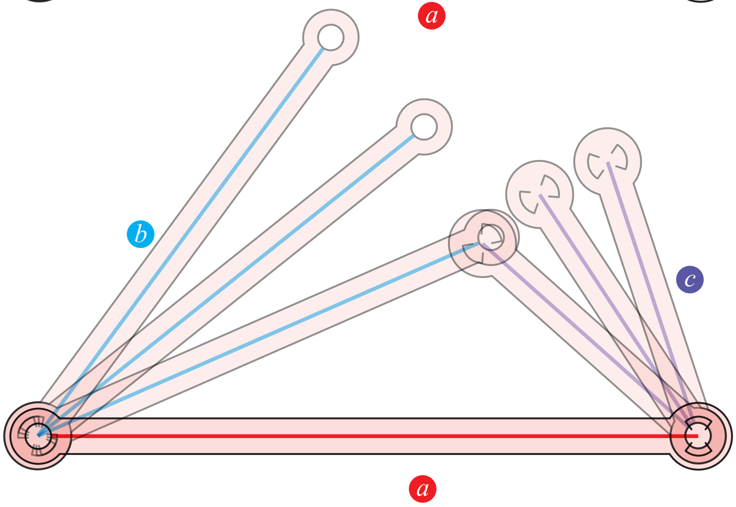
兩弧的交點剛好在長度為 a 的線段上，不能形成三角形。



配合附件12-4

第三組 ： $b+c>a$

兩弧的交點不在長度為 a 的線段上，可以形成三角形。



三線段形成三角形的判別

已知三條線段，如果兩條較短線段的和大於最長線段，則此三線段可以形成一個三角形。

例 1 三線段形成三角形的判別

自評 P160 第 1 題

下列各組數中，哪幾組可以作為三角形的三邊長？

(1) 4、6、7　　(2) 4、3、7　　(3) 2、4、7

解 (1)由於 $4<6<7$，且 $4+6>7$，
所以 4、6、7 可以作為三角形的三邊長。
(2)由於 $3<4<7$，且 $3+4=7$，
所以 3、4、7 不可以作為三角形的三邊長。
(3)由於 $2<4<7$，且 $2+4<7$，
所以 2、4、7 不可以作為三角形的三邊長。

隨堂練習

判別下列各組數是否可以作為三角形的三邊，在□中打「✓」。

(1)5、6、7　□是　□否

(2)10、20、30　□是　□否

(3)4、5、7　□是　□否

例2 三角形兩邊之和大於第三邊的應用

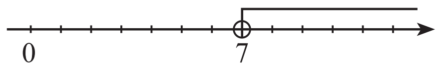
自評 P160 第 2 題

設一個三角形的三邊長分別是 2 公分、9 公分、a 公分。若 a 是整數，則滿足此條件的 a 共有多少個？

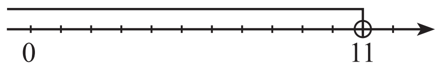
解 如果 9 是最長邊，則 $a+2>9$，即 $a>9-2=7$ ……………… ① ← a 比 7 大

如果 a 是最長邊，則 $2+9>a$，即 $a<9+2=11$ …………… ② ← a 比 11 小

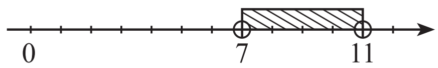
以數線圖示 ① 式得



以數線圖式 ② 式得



由上可知 a 比 7 大且 a 比 11 小，所以 ①、② 兩式的共同解圖示如下圖：



即 $7<a<11$，因為 a 是整數，所以 a 可以是 8、9、10，故滿足條件的 a 有 3 個。

在 例2 中，三角形的三邊長是 2、9、a，得到 $9-2<a<9+2$，也就是三角形兩邊的和大於第三邊，兩邊的差小於第三邊。

三角形的三邊長關係

兩邊長的差＜第三邊的長＜兩邊長的和。

隨堂練習

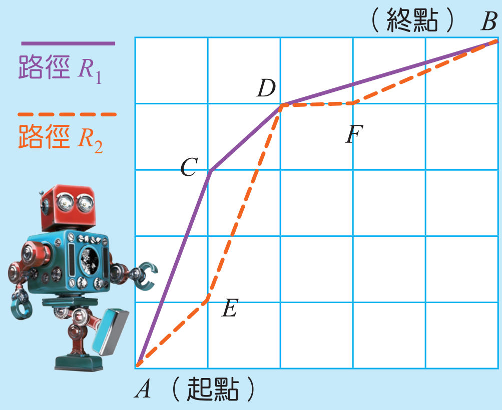
設一個三角形的三邊長分別是 5 公分、7 公分、a 公分，求 a 的範圍。

例 3 路徑的選擇

自評 P160 第 3 題

傑克參加機器人比賽，需操控機器人在 5×5 方格棋盤上從 A 點走至 B 點，且每個小方格皆為正方形。主辦單位規定 R_1、R_2 兩條路徑，如右圖。

已知 A、B、C、D、E、F 六點皆在格線交點上，且兩點之間的路徑皆為直線，在無法使用工具測量的條件下，R_1、R_2 兩條路徑中，哪一條較短？



解 由畢氏定理可得 $\overline{AC}=\sqrt{1^2+3^2}=\overline{ED}$，$\overline{AE}=\sqrt{1^2+1^2}=\overline{CD}$，

R_1 的路徑是 $\boxed{\overline{AC}+\overline{CD}}+\overline{DB}$，$R_2$ 的路徑是 $\boxed{\overline{AE}+\overline{ED}}+\overline{DF}+\overline{FB}$，

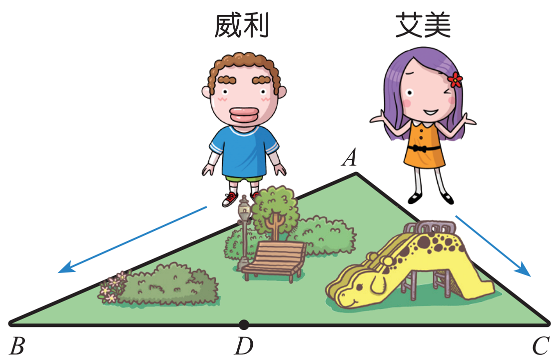
在 $\triangle BDF$ 中，$\overline{DB}<\overline{DF}+\overline{FB}$ ← 兩邊和大於第三邊

又 $\overline{AC}+\overline{CD}=\overline{AE}+\overline{ED}$ ← $\overline{AC}=\overline{ED}$，$\overline{CD}=\overline{AE}$

所以 R_1 的路徑較短。

隨堂練習

在三角形造型的公園中，威利自 A 點經 B 點以逆時針方向行走，艾美自 A 點經 C 點以順時針方向行走。若兩人於 $\overline{BC}$ 上的 D 點相遇，且 $\overline{AC}$ 與 $\overline{BD}$ 等長，完成下列空格來比較誰行走的距離較長？



威利行走的距離：$\overline{AB}+\overline{BD}=\overline{AB}+$______（$\overline{AC}$ 與 $\overline{BD}$ 等長）

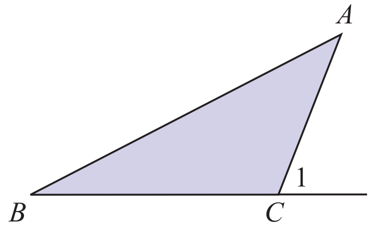
艾美行走的距離：$\overline{AC}+\overline{CD}=$______$+\overline{CD}=$______（$\overline{AC}$ 與 $\overline{BD}$ 等長）

在 $\triangle ABC$ 中，$\overline{AB}+\overline{AC}$______ $\overline{BC}$（三角形兩邊之和大於第三邊）

因此，________行走的距離比較長。

② 三角形的外角與內對角的大小關係

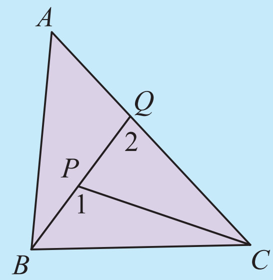
如右圖，$\triangle ABC$ 為任意三角形，$\angle 1$ 是 $\angle ACB$ 的外角，因為 $\angle 1 = \angle A + \angle B$ 且 $\angle A$、$\angle B$ 的度數都是正數，所以 $\angle 1 > \angle A$ 且 $\angle 1 > \angle B$。也就是說，三角形的外角大於任一內對角。



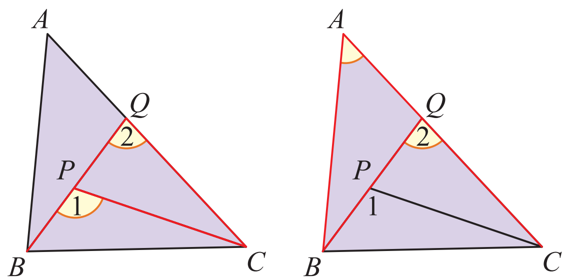
例 4 外角大於任一內對角

自評 P161 第 4 題

如圖，$\triangle ABC$ 中，Q 點在 $\overline{AC}$ 上，P 點在 $\overline{BQ}$ 上，比較 $\angle 1$、$\angle 2$ 和 $\angle A$ 的大小關係。



解 $\because \angle 1$ 是 $\triangle CPQ$ 的外角，$\therefore \angle 1 > \angle 2$
$\because \angle 2$ 是 $\triangle AQB$ 的外角，$\therefore \angle 2 > \angle A$
因此 $\angle 1 > \angle 2 > \angle A$。



隨堂練習

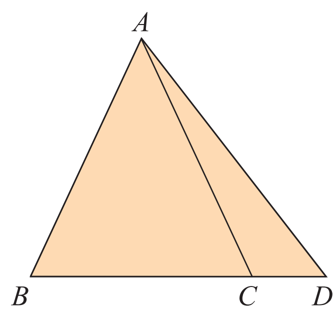
如圖，$\triangle ABC$ 為等腰三角形，$\overline{AB} = \overline{AC}$，$D$ 點在 $\overline{BC}$ 的延長線上，在下面的空格中填入適當的說明，以比較 $\angle B$、$\angle D$ 的大小關係。

$\because \overline{AB} = \overline{AC}$

$\therefore$ ________ = ________（等腰三角形的兩底角相等）

又 $\angle ACB$ 為 $\triangle ACD$ 的外角

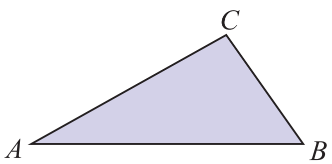
$\therefore$ ________ > ________，故 $\angle B > \angle D$。



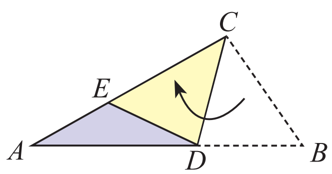
3 大邊對大角

我們已學過等腰三角形的兩個底角相等，所以在一個三角形中，等邊所對應的角相等；如果一個三角形有兩個不等長的邊，如圖一中的$\triangle ABC$，其中 $\overline{AC}>\overline{BC}$，那麼這兩個邊所對的角（$\angle B$ 和$\angle A$）哪個比較大呢？

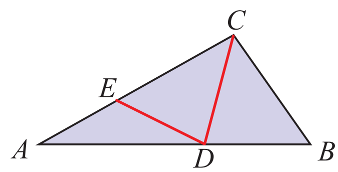
拿出附件 9，因為 $\overline{AC}>\overline{BC}$，故將 $\overline{BC}$ 摺到 $\overline{AC}$ 上，使 B 點落在 $\overline{AC}$ 上的一點 E，且摺痕 $\overline{CD}$ 與 $\overline{AB}$ 相交於 D 點，如圖二；將附件攤平，並連接 $\overline{CD}$、$\overline{DE}$，如圖三。



圖一



圖二



圖三

在摺疊的過程可看出 $\triangle CBD\cong\triangle CED$，$\therefore\angle B=\angle CED$。

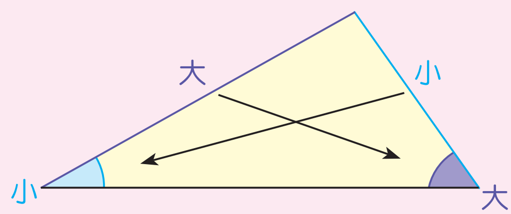
$\because\angle CED$ 是$\triangle AED$ 的外角，$\therefore\angle CED>\angle A$，

又$\angle B=\angle CED$，$\therefore\angle B>\angle A$。

也就是說，$\triangle ABC$ 中，若 $\overline{AC}>\overline{BC}$，則$\angle B>\angle A$。

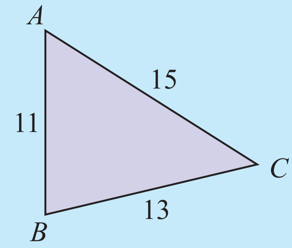
大邊對大角

在一個三角形中，若有兩個邊不等長，則較長的邊所對的角比較大。



例5 大邊對大角

如圖，$\triangle ABC$ 中，$\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{AC}$ 的長度分別是 11、13、15，比較 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的大小關係。



解 $\triangle ABC$ 中，

$\because \overline{AC} > \overline{BC} > \overline{AB}$

$\therefore \angle B > \angle A > \angle C$ ← 大邊對大角

隨堂練習

1. $\triangle ABC$ 中，$\overline{AB}=6$，$\overline{BC}=7$，$\overline{AC}=8$，則 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 哪一個角最小？

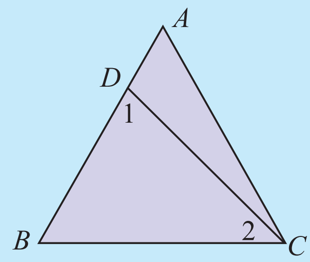
2. $\triangle PQR$ 中，$\overline{PQ}=11$，$\overline{QR}=8$，$\overline{PR}=8$，則 $\angle P$、$\angle Q$、$\angle R$ 哪一個角最大？

觀察圖形與數字的規律，x 應填入多少？

例6 大邊對大角的應用

自評 P161 第 5 題

如圖，$\triangle ABC$ 為正三角形，D 點在 $\overline{AB}$ 上，比較$\angle 1$、$\angle 2$ 的大小關係。



解

$\because$ D 點在 $\overline{AB}$ 上，

$\therefore$ $\overline{AB} > \overline{BD}$。

又 $\overline{AB}=\overline{BC}$， ← $\triangle ABC$ 為正三角形

因此 $\overline{BC}>\overline{BD}$。

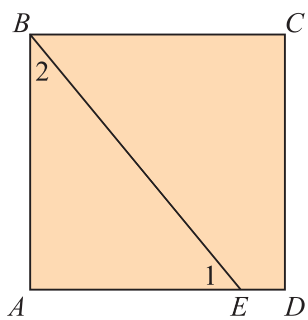
在$\triangle DBC$ 中，

$\because$ $\overline{BC}>\overline{BD}$，

$\therefore$ $\angle 1>\angle 2$。 ← 大邊對大角

隨堂練習

如圖，正方形 $ABCD$ 中，E 點在 $\overline{AD}$ 上，在下面的空格中填入＞、＝、＜或適當的說明，以比較$\angle 1$ 和$\angle 2$ 的大小關係。



$\because$ $\overline{AB}$ ______ $\overline{AD}$（四邊形 $ABCD$ 為正方形）

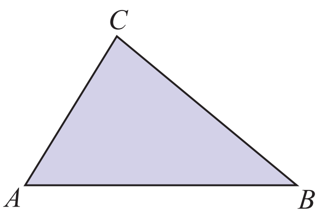
$\overline{AB}$ ______ $\overline{AE}$（$\overline{AB}=\overline{AD}>\overline{AE}$）

$\therefore$ $\angle 1$ ______ $\angle 2$（理由：________________）。

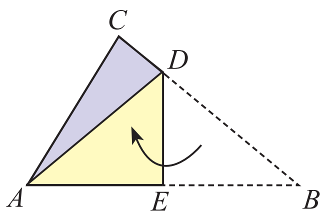
4 大角對大邊

在一個三角形中，如果有兩個內角相等，則此三角形必為等腰三角形，所以等角所對應的邊長相等。如果一個三角形有兩個角不相等，如圖一中的$\triangle ABC$，其中$\angle A > \angle B$，那麼這兩個角所對的邊（$\overline{BC}$和$\overline{AC}$）哪一個比較長？

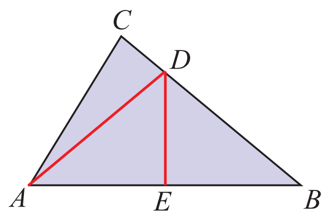
拿出附件 10，因為$\angle A > \angle B$，故將附件摺疊使 B 點與 A 點疊合，且 $\overline{DE}$ 為其摺痕，如圖二；將附件攤平，並畫出 $\overline{AD}$ 及 $\overline{DE}$，如圖三。



圖一



圖二



圖三

在摺疊的過程可看出 $\triangle DAE \cong \triangle DBE$，$\therefore \overline{AD}=\overline{BD}$。

在$\triangle ACD$ 中，因為 $\overline{AD}+\overline{DC} > \overline{AC}$（三角形任意兩邊長的和大於第三邊），

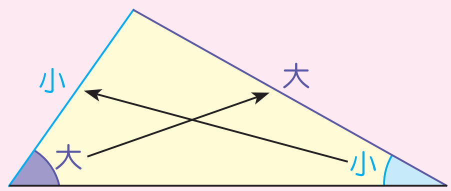
且 $\overline{AD}=\overline{BD}$（$\overline{AD}$ 與 $\overline{BD}$ 疊合）。

所以 $\overline{BC}=\overline{BD}+\overline{DC}=\overline{AD}+\overline{DC} > \overline{AC}$。

也就是說，$\triangle ABC$ 中，若$\angle A > \angle B$，則 $\overline{BC} > \overline{AC}$。

大角對大邊

在一個三角形中，若有兩個角不相等，則較大的角所對的邊比較長。

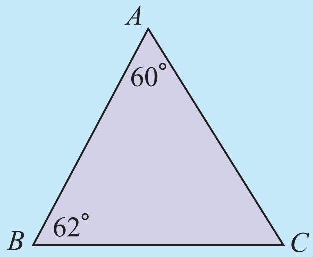


第3章

解答：11。（共有 11 個三角形）

例 7 大角對大邊

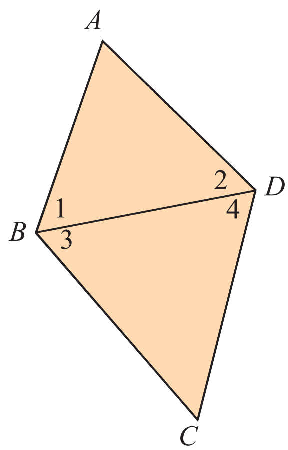
$\triangle ABC$ 中，$\angle A=60^\circ$，$\angle B=62^\circ$，
比較 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{AC}$ 三邊長的大小關係。



解 因為三角形的內角和等於 180°，
所以 $\angle C=180^\circ-60^\circ-62^\circ=58^\circ$，
三個內角由大到小為 $\angle B>\angle A>\angle C$。
利用大角對大邊的性質，其對邊的長度由大到小為 $\overline{AC}>\overline{BC}>\overline{AB}$。

隨堂練習

如圖，四邊形 $ABCD$ 中，$\angle 1=60^\circ$，$\angle 2=55^\circ$，
$\angle 3=60^\circ$，$\angle 4=65^\circ$。



(1)比較 $\overline{AB}$、$\overline{DA}$ 和 $\overline{BD}$ 的大小關係，並說明其理由。

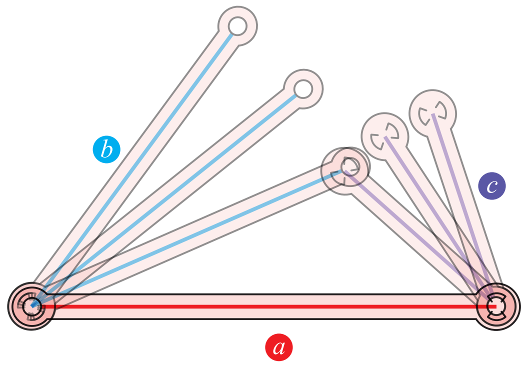
(2)比較 $\overline{BC}$、$\overline{CD}$ 和 $\overline{BD}$ 的大小關係，並說明其理由。

(3)綜合 (1)、(2) 題，寫出 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CD}$、$\overline{DA}$ 和 $\overline{BD}$ 的大小關係。

重點回顧

❶三線段形成三角形的判別

已知三條線段，如果兩條較短線段的和大於最長線段，則此三線段可以形成一個三角形。



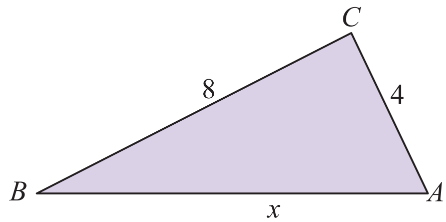
❷三角形的三邊長關係

兩邊長的差＜第三邊的長＜兩邊長的和

例 $\triangle ABC$ 的三邊長為 4、8、x

$8-4<x<8+4$

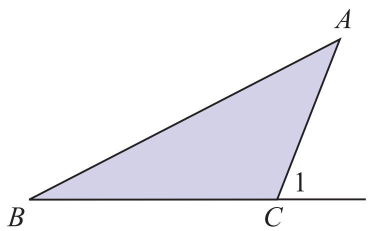
$4<x<12$



❸三角形外角與內對角的大小關係

三角形中，外角大於任何一個內對角。

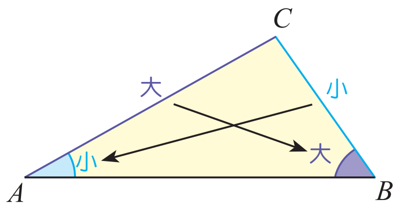
例 如圖，$\triangle ABC$ 中，若 $\angle 1$ 為 $\angle ACB$ 的外角，則 $\angle 1>\angle A$ 且 $\angle 1>\angle B$。



❹大邊對大角

在一個三角形中，若有兩個邊不等長，則較長的邊所對的角比較大。

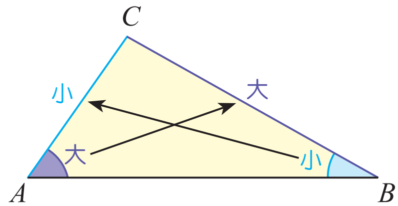
例 如圖，$\triangle ABC$ 中，若 $\overline{AC}>\overline{BC}$，則 $\angle B>\angle A$。



❺大角對大邊

在一個三角形中，若有兩個角不相等，則較大的角所對的邊比較長。

例 如圖，$\triangle ABC$ 中，若 $\angle A>\angle B$，則 $\overline{BC}>\overline{AC}$。



3-4自我評量

1 判別下列各組數是否可以作為三角形的三邊長，在□中打「✓」。 課 P150 例 1

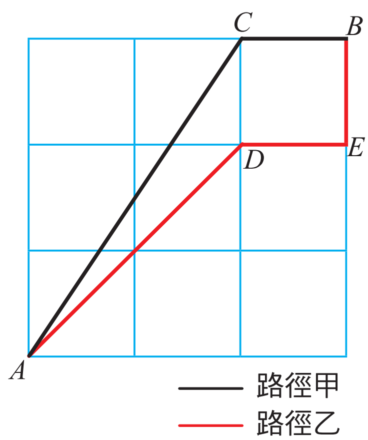
(1) 0.7、0.8、0.9 □是 □否

(2) 5、7、13 □是 □否

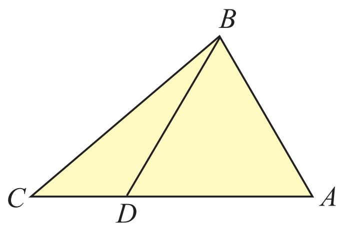
(3) 6、8、$\sqrt{101}$ □是 □否

2 已知△ABC 的三邊長皆為整數，若 $\overline{AB}=1$，$\overline{BC}=4$，求 $\overline{AC}$ 的長。 課 P151 例 2

3 有一個 3×3 的方格，且每個小方格都是正方形。若從 A 點到 B 點有甲、乙兩條路徑，如右圖。已知 A、B、C、D、E 五點皆在格線交點上，且兩點之間的路徑皆為直線，在無法使用工具測量的條件下，甲、乙兩條路徑中，哪一條較短？ 課 P152 例 3



④如圖，$\triangle ABC$ 中，D 點在 $\overline{AC}$ 上，且 $\overline{BA}=\overline{BD}$，在下面的空格中填入適當的說明，以比較 $\angle A$ 和 $\angle C$ 的大小關係。 課 P153 例 4



說明

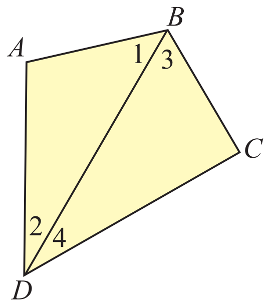
$\because \overline{BA}=\overline{BD}$

$\therefore$ ________ $=$ ________（等腰三角形兩底角相等）

又 $\angle BDA$ 為 $\triangle BDC$ 的外角，

$\therefore$ ________ $>$ ________ ，故 ________ $>$ ________ 。

⑤如圖，四邊形 $ABCD$ 中，$\overline{AB}=8$，$\overline{BC}=8$，$\overline{CD}=14$，$\overline{DA}=12$。依序回答下列問題： 課 P156 例 6

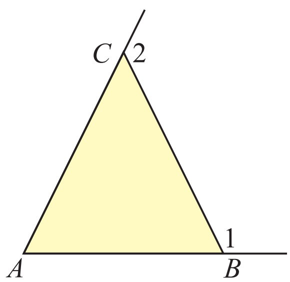


(1)比較 $\angle 1$ 和 $\angle 2$ 的大小關係，並說明其理由。

(2)比較 $\angle 3$ 和 $\angle 4$ 的大小關係，並說明其理由。

(3)綜合 (1)、(2) 題，寫出 $\angle ABC$ 和 $\angle ADC$ 的大小關係，並說明其理由。

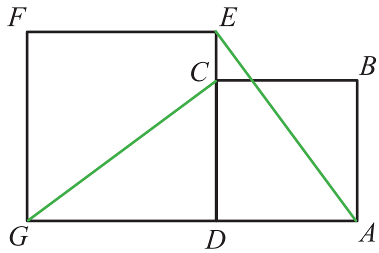
⑥如圖，等腰三角形 ABC 中，$\overline{AC}=\overline{BC}$，$\angle 1$、$\angle 2$ 分別為 $\angle ABC$、$\angle ACB$ 的外角，且 $\angle 1<\angle 2$，比較 $\overline{BC}$ 與 $\overline{AB}$ 的大小關係。 課 P158 例 7



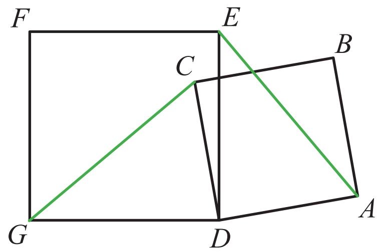
自我挑戰

本頁為概念統整課程，由學生自行挑戰，教師可視班級情況而自行決定如何運用。

子恆用螺絲將不可彎曲的木條圍成兩個大小不一樣的正方形木框，且螺絲的位置就在正方形的頂點上，並在這兩個正方形木框上各選一個頂點鎖在一起，使得這兩個正方形木框能夠以此共同的頂點旋轉。如下圖，這兩個正方形木框分別是正方形 $ABCD$ 及正方形 $DEFG$，D 為共同的頂點。除此之外，子恆還用橡皮筋分別連結 A、E 兩點及 C、G 兩點，試回答下列問題：



圖一



圖二

(1)如圖一，C 點在 $\overline{DE}$ 上，說明 $\triangle AED \cong \triangle CGD$。

解

(2)如圖二，子恆轉動這兩個木框，使得 C 點在正方形 $DEFG$ 內部，說明$\triangle AED \cong \triangle CGD$。

解

(3)如圖二，若$\angle DAE = 60^\circ$，則$\angle CDG$ 與$\angle CGF$ 相差幾度？

解

解答P216

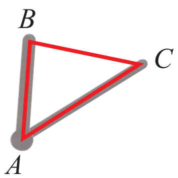
數學萬花筒

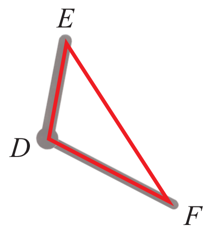
生活中的數學 — 樞紐定理

如下圖，觀察時鐘從 12 點 10 分到 12 點 20 分間，兩針夾角的變化過程，時鐘上兩針的夾角會慢慢增加，而時針頂端與分針頂端的距離也會慢慢增加；反過來說，當時針頂端與分針頂端的距離慢慢增加時，兩針的夾角也會慢慢增加。

畫出時鐘上的時針與分針所形成的兩個三角形，如下圖，藉由上面的觀察結果可以發現：在$\triangle ABC$與$\triangle DEF$中，已知$\overline{AB}=\overline{DE}$，$\overline{AC}=\overline{DF}$，

(1)若$\angle A<\angle D$，則$\overline{BC}<\overline{EF}$。 (2)若$\overline{BC}<\overline{EF}$，則$\angle A<\angle D$。



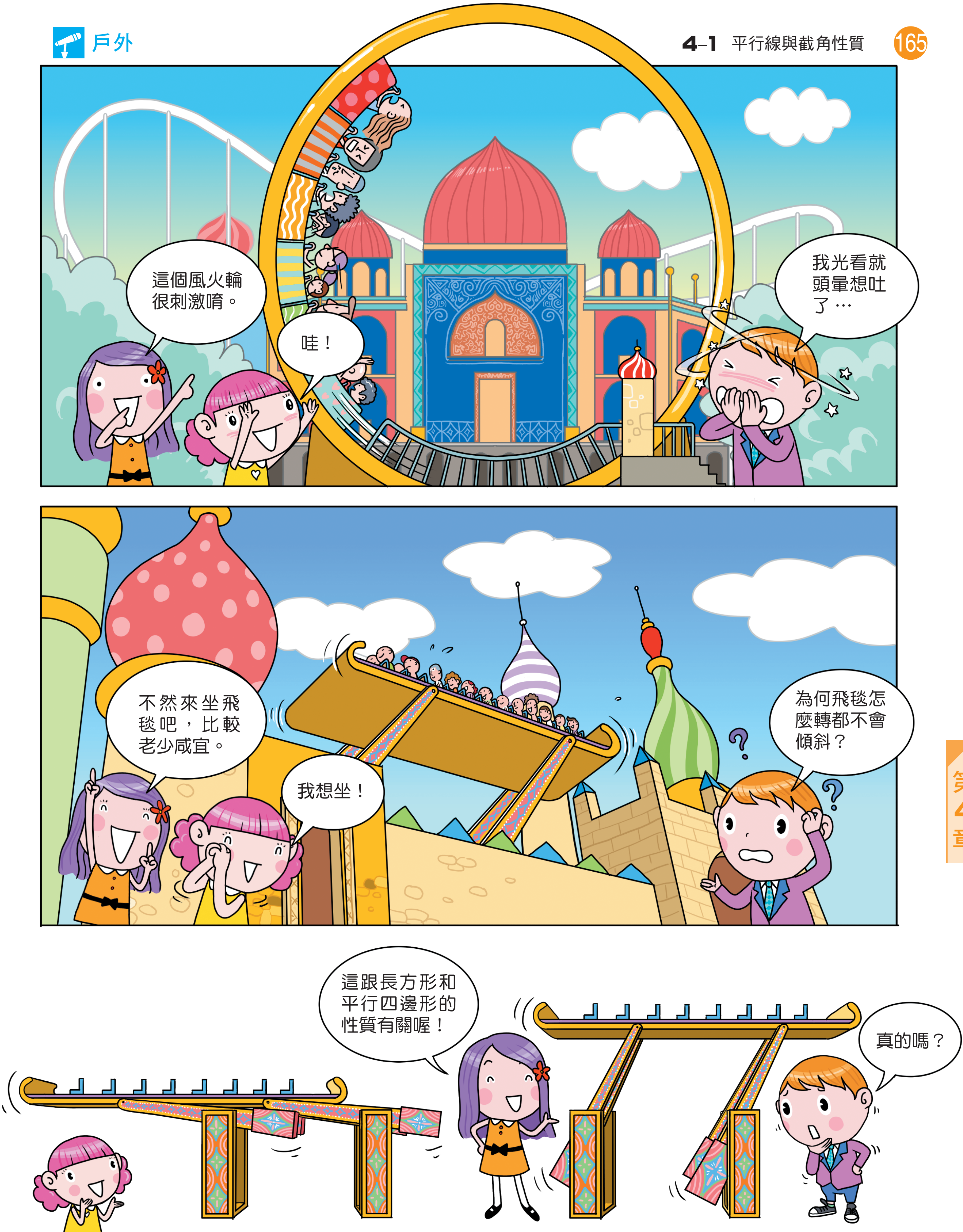


當兩個三角形的兩組邊對應相等時：

(1)樞紐定理：若兩邊的夾角不相等，則夾角愈大者，第三邊愈長。

(2)逆樞紐定理：若第三邊不相等，則第三邊愈長者，所對的夾角愈大。

4 平行與四邊形



如何利用長方形和平行四邊形的性質解釋漫畫中飛毯的狀況呢？完整說明請看數學萬花筒 P214

學習前哨站

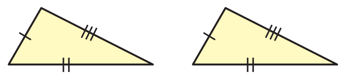
本單元為學生自我複習，
教師可視班級情況決定如何運用。

回顧 1 全等三角形

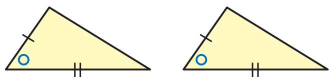
8 下第 3 章

下表是三角形全等的判別方法。

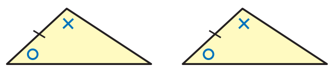
SSS 全等性質



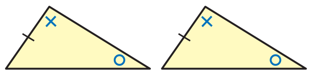
SAS 全等性質



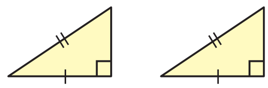
ASA 全等性質



AAS 全等性質



RHS 全等性質



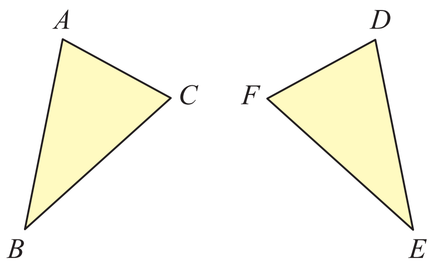
課前練習

在$\triangle ABC$ 與$\triangle DEF$ 中，已知 $\overline{AB}=\overline{DE}$，
$\angle B=\angle E$，$\angle C=\angle F$，回答下列問題：

(1)在右圖中標示已知三組相等的對應邊或對應角記號。

(2)依據哪一個全等性質可知$\triangle ABC\cong\triangle DEF$？

☐*SSS* ☐*SAS* ☐*AAS* ☐*RHS*



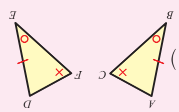
回顧 2 三角形的內角和

8 下第 3 章

三角形的內角和為 180°，$\triangle ABC$ 中，若$\angle A=\angle B=50^\circ$，則$\angle C=180^\circ-50^\circ-50^\circ=80^\circ$。

課前練習

直角三角形 *ABC* 中，若$\angle A=55^\circ$，
$\angle B=90^\circ$，求$\angle C$ 的度數。

解答：1.(1)


(2) *AAS* 2. 35°

4-1 平行線與截角性質

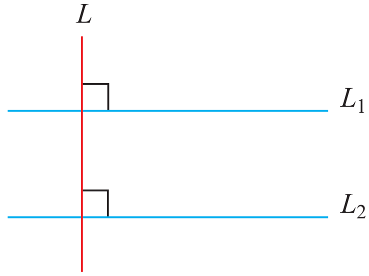
1 平行線的意義

國小學過，**若平面上的兩條直線同時與另一條直線垂直，則這兩條直線互相平行，稱這兩條直線為平行線**。漫畫中兩條鐵軌間的枕木都與鐵軌垂直，因此兩條鐵軌是平行線。

隨堂練習

除了漫畫中的鐵軌之外，寫出三個你在生活周遭看到的平行線。

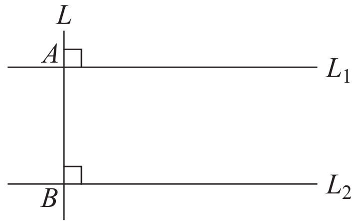
如果把兩條鐵軌以直線 L_1、L_2 表示，其中一個枕木以直線 L 表示，如右圖，此時，直線 L_1 垂直 L，且直線 L_2 垂直 L，所以 L_1、L_2 互相平行。



在數學上，通常利用符號「 // 」表示「平行」。例如：兩條直線 L_1、L_2 平行時，記作「$L_1 // L_2$」，讀作「直線 L_1 平行直線 L_2」，也可記作「$L_2 // L_1$」。

第4章

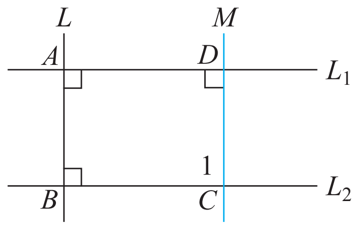
圖一



如圖一，直線 L_1、L_2 為同時與直線 L 垂直的平行線，A、B 兩點為垂足，則稱 $\overline{AB}$ 為 L_1、L_2 兩條平行線的距離。

若於圖一再作一條異於 L 的直線 M 與 L_1 垂直，垂足為 D 點，且交 L_2 於 C 點，如圖二。因為四邊形 $ABCD$ 有三個內角為直角，且四邊形的內角和為 360°，所以$\angle 1=360^\circ-90^\circ\times 3=90^\circ$，因此直線 M 也會與 L_2 垂直。

圖二

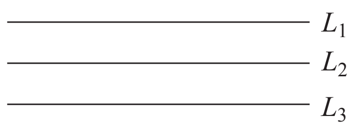


也就是說，如果有一條直線與兩條平行線中的一條直線垂直，則也會與另一條平行線垂直。

因為四邊形 $ABCD$ 的內角皆為直角，所以四邊形 $ABCD$ 為長方形，可知 $\overline{AB}=\overline{CD}$。由於 $\overline{CD}$ 也是直線 L_1、L_2 兩條平行線的距離，因此兩條平行線間的距離處處相等，永不相交。

Thinking

在一平面上有相異三條直線 L_1、L_2、L_3，若 $L_1 // L_2$、$L_1 // L_3$，則 L_2 與 L_3 是否平行？為什麼？

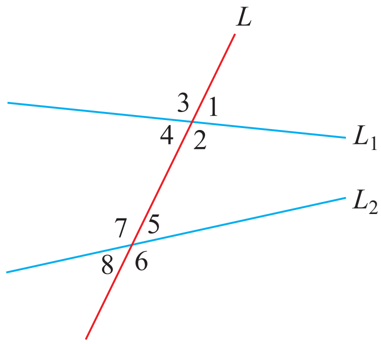


平行線的特性

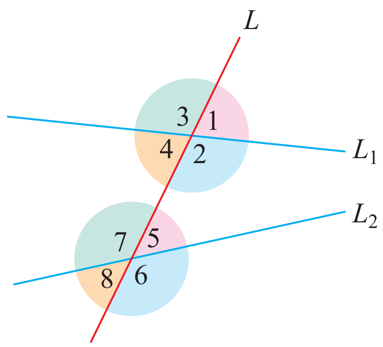
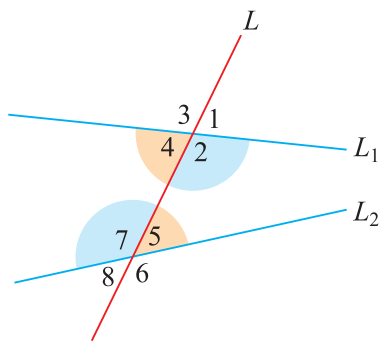
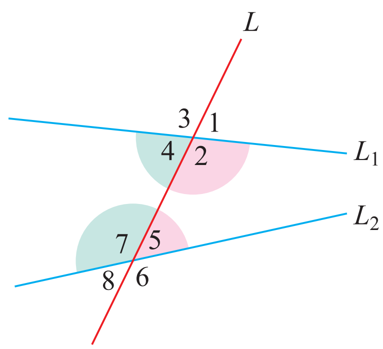
1. 若有一條直線與兩條平行線中的一條直線垂直，則也會與另一條直線垂直。
2. 平面上兩條平行線的距離處處相等，永不相交。
3. 在平面上，若有兩條直線同時與一直線平行，則這兩條直線互相平行。

2 截線與截角

為了判別兩條直線是否平行，我們先介紹一些名詞。當直線 L 與直線 L_1、L_2 相交於不同的兩點時，則稱直線 L 為直線 L_1、L_2 的**截線**，而截線 L 與直線 L_1、L_2 所形成的八個角都稱為**截角**，即右圖中的 $\angle 1$、$\angle 2$、$\angle 3$、……、$\angle 8$。

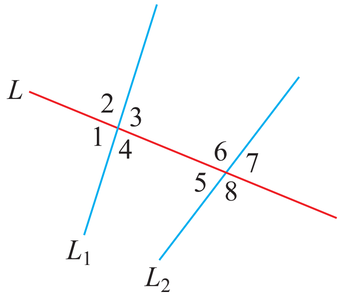


這些截角的關係依照對應位置可區分為以下三類：

同位角	內錯角	同側內角
		
$\angle 1$ 和 $\angle 5$ 都在交點右上方的位置，稱 $\angle 1$ 和 $\angle 5$ 是一組**同位角**。	$\angle 2$ 和 $\angle 7$ 在 L_1、L_2 的內側，且交錯在 L 的兩邊，稱 $\angle 2$ 和 $\angle 7$ 是一組**內錯角**。	$\angle 2$ 和 $\angle 5$ 在 L 的同一側，且在 L_1、L_2 的內側，稱 $\angle 2$ 和 $\angle 5$ 是一組**同側內角**。
$\angle 2$ 和 $\angle 6$、$\angle 3$ 和 $\angle 7$、$\angle 4$ 和 $\angle 8$ 也分別都是一組同位角。	$\angle 4$ 和 $\angle 5$ 也是一組內錯角。	$\angle 4$ 和 $\angle 7$ 也是一組同側內角。

隨堂練習

如圖，直線 L 為 L_1、L_2 的截線，則∠1 的同位角、∠3 的內錯角及∠5 的同側內角分別為哪一個角？



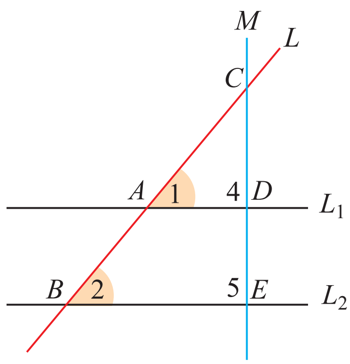
接下來我們將討論兩條平行線的截角關係。

❶平行線的同位角

自評 P181 第 1 題

探索活動 平行線的同位角

如右圖，$L_1 \,//\, L_2$，截線 L 分別交 L_1、L_2 於 A、B 兩點，$\angle 1$ 和 $\angle 2$ 是同位角。作直線 $M \perp L_1$，分別交 L、L_1、L_2 於 C、D、E 三點，回答下列問題：



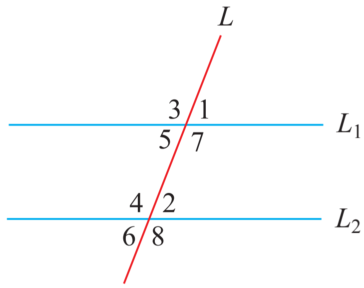
⑴已知直線 $M \perp L_1$，則直線 M 是否垂直 L_2？為什麼？

⑵若 $\angle 1 = 50^\circ$，則 $\angle ACD$ 為多少度？

⑶承⑵，$\angle 2$ 的度數是否和 $\angle 1$ 相等？

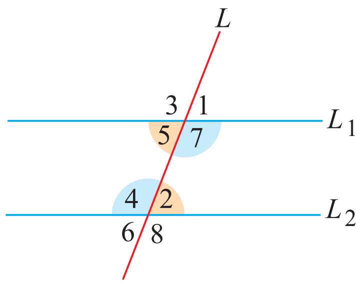
Thinking

如右圖，$L_1 /\!/ L_2$，L 為截線，由前面可知，$\angle 1$ 和 $\angle 2$ 這組同位角會相等，那麼$\angle 3$ 和$\angle 4$、$\angle 5$ 和$\angle 6$、$\angle 7$ 和$\angle 8$ 這三組同位角是否也會分別相等？



由前面內容可知，**兩條平行線被一條直線所截時，任意一組同位角相等**。接下來將利用這概念來討論，兩條平行線被一條直線所截，任意一組內錯角或同側內角的關係。

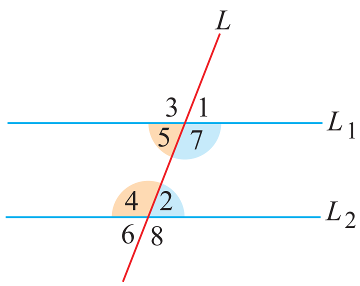
❷平行線的內錯角



如右圖，$L_1 /\!/ L_2$，L 為截線，所以$\angle 1=\angle 2$（同位角相等），又$\angle 1=\angle 5$（對頂角相等），所以$\angle 2=\angle 5$。同理，另一組內錯角也會相等，即$\angle 4=\angle 7$。

由上述可知，**兩條平行線被一條直線所截時，任意一組內錯角相等**。

❸平行線的同側內角



如右圖，因為$\angle 1=\angle 2$（同位角），
又$\angle 1+\angle 7=180^\circ$（平角），
所以$\angle 2+\angle 7=180^\circ$，即$\angle 2$ 與$\angle 7$ 互補。
同理，另一組同側內角$\angle 4$ 與$\angle 5$ 也互補。

由上述可知，**兩條平行線被一條直線所截時，任意一組同側內角互補**。

平行線的截角性質

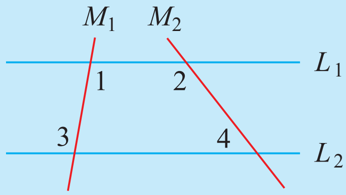
兩條平行線被一條直線所截時，則任意一組：

(1)同位角相等。　(2)內錯角相等。　(3)同側內角互補。

例1 平行線的截角性質

自評 P181 第 2 題

如圖，$L_1 // L_2$，M_1、M_2 為 L_1、L_2 的截線，若 $\angle 1 = 100^\circ$，$\angle 2 = 127^\circ$，求 $\angle 3$ 與 $\angle 4$。



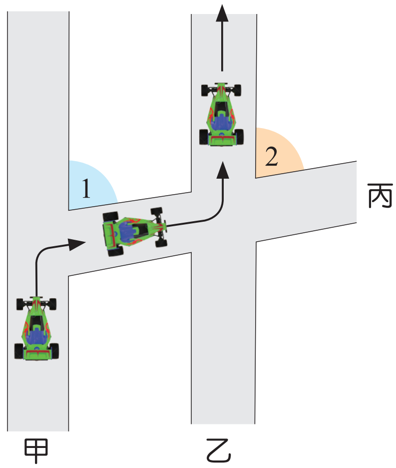
解 $\because L_1 // L_2$

$\therefore \angle 3 = \angle 1 = 100^\circ$（內錯角相等），

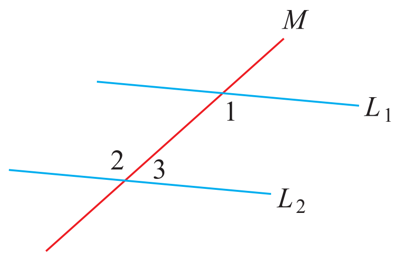
$\angle 4 = 180^\circ - \angle 2 = 180^\circ - 127^\circ = 53^\circ$（同側內角互補）。

隨堂練習

1. 洛基在公園的小路玩遙控車，遙控車行進路線如右圖所示，其中甲、乙、丙是三條筆直的道路，且甲、乙兩道路平行。已知 $\angle 1 = 80^\circ$，求 $\angle 2$。



2. 如圖，$L_1 // L_2$，M 為 L_1、L_2 的截線，$\angle 1 = (9x + 8)^\circ$，$\angle 2 = (7x + 36)^\circ$，求 $\angle 3$。

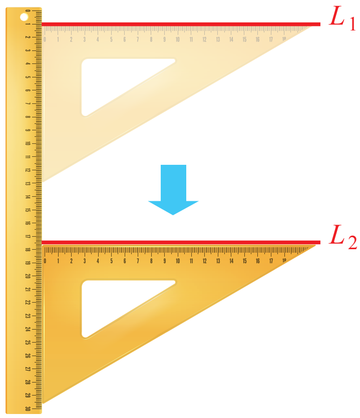


③ 平行線的判別

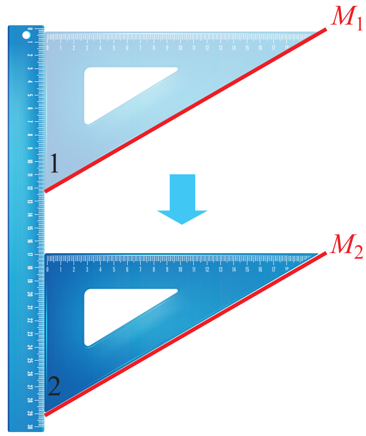
如圖一，將直尺的一邊與三角板的一股貼齊畫一直線 L_1 。直尺固定不動，沿著直尺一邊滑動三角板，再畫一直線 L_2，則所畫的這兩條直線 L_1 與 L_2 互相平行。

如圖二，如果改成在三角板的斜邊畫出兩條直線 M_1 與 M_2 。此時 $\angle 1$ 和$\angle 2$ 是一組同位角，且 $\angle 1=\angle 2$，則 M_1 與 M_2 這兩條直線是否也會平行？

圖一

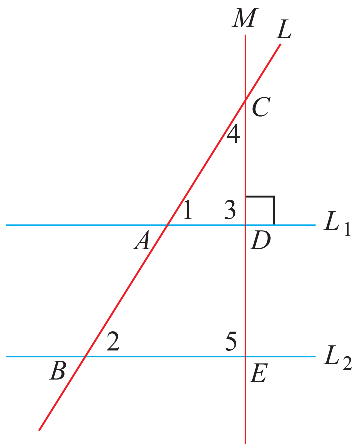


圖二



例2 以同位角判別平行

如圖，截線 L 分別交 L_1、L_2 於 A、B 兩點，直線 $M\perp L_1$，分別交 L、L_1、L_2 於 C、D、E 三點，如果 $\angle 1=\angle 2=58^\circ$，求 $\angle 3$、$\angle 4$、$\angle 5$，並判別 L_1 和 L_2 是否平行。



解 $\because M\perp L_1$，$\therefore \angle 3=90^\circ$，

由三角形的內角和為 180°可知，

$\angle 4=180^\circ-\angle 1-\angle 3=180^\circ-58^\circ-90^\circ=32^\circ$，

$\angle 5=180^\circ-\angle 2-\angle 4=180^\circ-58^\circ-32^\circ=90^\circ$。

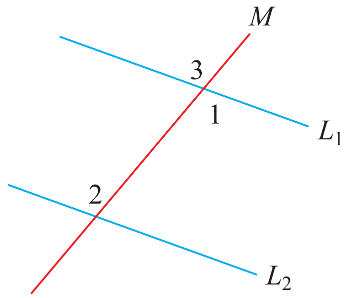
$\because \angle 3=\angle 5=90^\circ$，

$\therefore$直線 L_1、L_2 同時與 M 垂直，即 $L_1 /\!/ L_2$。

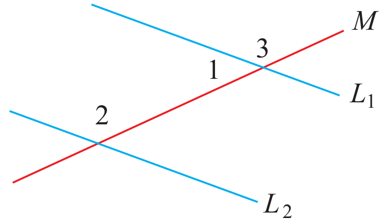
由 例2 可知，兩條直線被一條直線所截，如果有一組同位角相等，則這兩條直線平行。

隨堂練習

1. 如圖，直線 M 為 L_1、L_2 的截線，如果 $\angle 1=\angle 2=110^\circ$，則 $\angle 2$ 和 $\angle 3$ 是否相等？



2. 如圖，直線 M 為 L_1、L_2 的截線，如果 $\angle 1+\angle 2=180^\circ$，且 $\angle 1=45^\circ$，則$\angle 2$ 和 $\angle 3$ 是否相等？



由 隨堂練習 可知，當兩條直線被一條直線所截時，若內錯角相等或同側內角互補，都可得到同位角相等。因此，(1)如果有一組內錯角相等，則這兩條直線平行；(2)如果有一組同側內角互補，則這兩條直線平行。

平行線的判別

兩條直線被一條直線所截，如果符合下列任一條件，則這兩條直線平行。

(1)同位角相等。 (2)內錯角相等。 (3)同側內角互補。

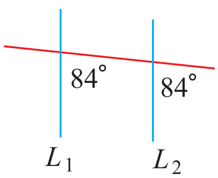
隨堂練習

自評 P181、P182 第 3、4 題

判別下列各小題中的直線 L_1、L_2 是否平行？並說明理由。

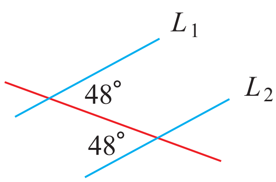
(1)□是 □否

理由：＿＿＿＿＿＿＿＿



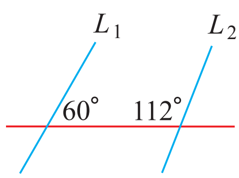
(2)□是 □否

理由：＿＿＿＿＿＿＿＿

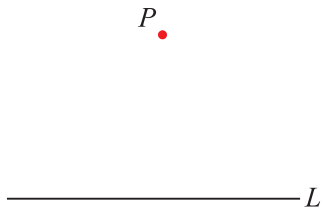


(3)□是 □否

理由：＿＿＿＿＿＿＿＿



接下來，我們利用平行線的判別性質，用尺規作圖畫出平行線。



●平行線的作圖

如右圖，已知直線 L 及線外一點 P，如何利用尺規作圖作出過 P 點且平行 L 的直線呢？

思路分析

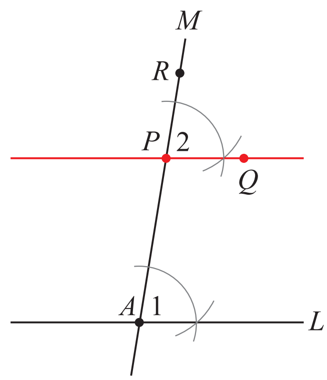
由平行線的判別性質可知，當兩條直線被一條直線所截，若同位角相等，則這兩條直線平行。

作法

(1)過 P 點任意作一條直線 M，與 L 相交於 A 點，所形成的交角為$\angle 1$。

(2)在直線 M 上取一點 R，以 P 點為頂點，$\overline{PR}$ 為一邊，作$\angle 2$，使得$\angle 2=\angle 1$。

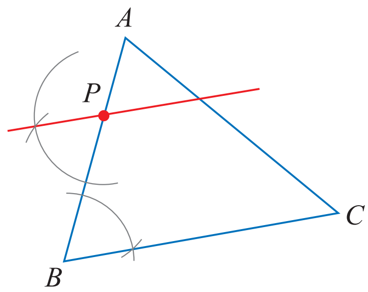
(3)在$\angle 2$ 另一邊取一點 Q，則 $\overleftrightarrow{PQ}$ 即為所求。



隨堂練習

自評 P182 第 5 題

右圖$\triangle ABC$ 中，P 點在 $\overline{AB}$ 上，安琪利用尺規作圖畫出通過 P 點，且與 $\overline{BC}$ 平行的直線，則安琪是依據哪一個平行線的判別方法？



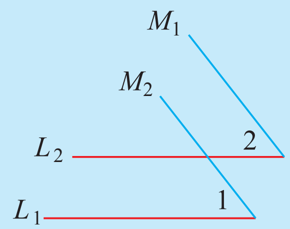
Ⓐ Ⓗ Ⓘ Ⓞ Ⓧ，觀察上面英文字母的形狀，哪一個應該被拿走？

4 平行線性質的應用

在計算有關平行線截角度數的問題時，經常會用到平行線的截角性質，例如下面的例題。

例3 截角性質的應用

如圖，$L_1 // L_2$，$M_1 // M_2$，$\angle 1=52^\circ$，求$\angle 2$。

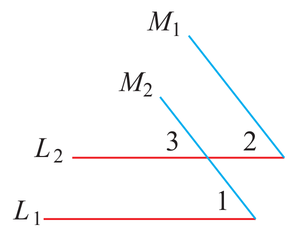


解 如圖，$\because L_1 // L_2$，

$\therefore \angle 3=\angle 1=52^\circ$（同位角相等），

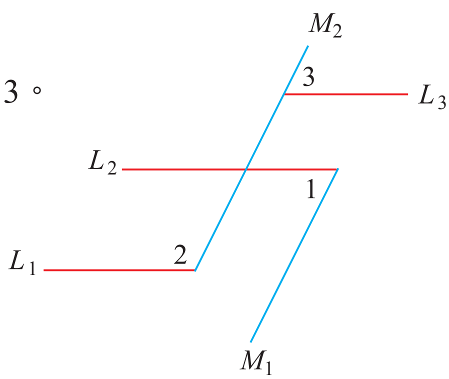
又$\because M_1 // M_2$，

$\therefore \angle 2=\angle 3=52^\circ$（同位角相等）。



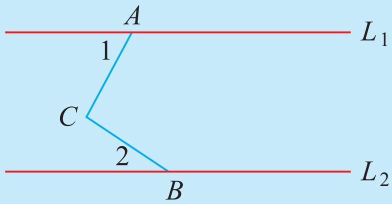
隨堂練習

如圖，$L_1 // L_2 // L_3$，$M_1 // M_2$，$\angle 1=63^\circ$，求$\angle 2$、$\angle 3$。



例4 截角性質的應用

如圖，$L_1 // L_2$，A 點在 L_1 上，B 點在 L_2 上，已知 $\angle 1=62^\circ$，$\angle 2=31^\circ$，求 $\angle ACB$。



解一 過 C 點作一直線 L_3 平行 L_1，

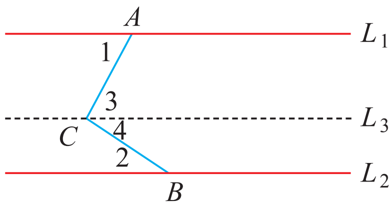
$\because L_1 // L_2$，$L_3 // L_1$，$\therefore L_1 // L_2 // L_3$，

$\because L_1 // L_3$，$\therefore \angle 3=\angle 1$（內錯角相等），

$\because L_3 // L_2$，$\therefore \angle 4=\angle 2$（內錯角相等），

故 $\angle ACB=\angle 3+\angle 4=\angle 1+\angle 2$

$=62^\circ+31^\circ=93^\circ$。



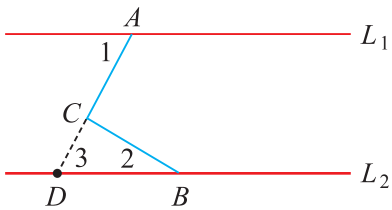
解二 作 $\overline{AC}$ 的延長線交 L_2 於 D 點，

$\because L_1 // L_2$，$\therefore \angle 3=\angle 1$（內錯角相等），

$\because \angle ACB$ 為 $\triangle BCD$ 的外角，

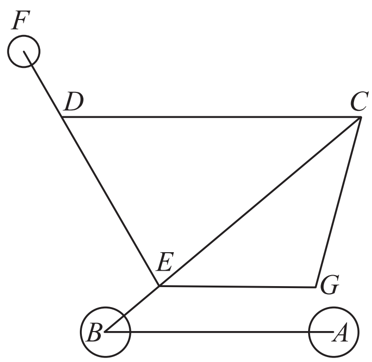
$\therefore \angle ACB=\angle 2+\angle 3=\angle 2+\angle 1$

$=31^\circ+62^\circ=93^\circ$。



隨堂練習

宥均文創工作室設計一款摺疊式購物車，設計圖如右。已知 $\overline{AB} // \overline{CD} // \overline{GE}$，$\angle ABC=40^\circ$，$\angle BED=100^\circ$，求 $\angle CDF$。



解答：A。（剩餘的上下左右顛倒都一樣）

第4章

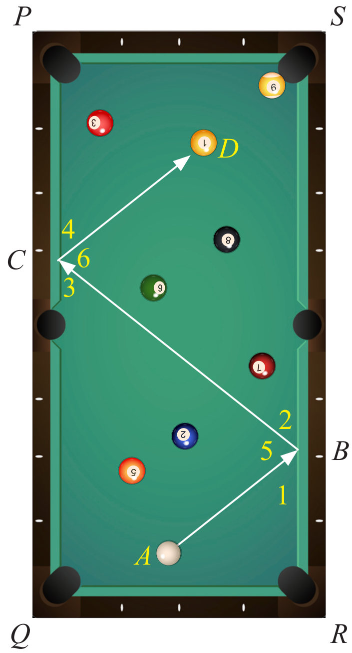
例5 截角與平行的應用

右圖為撞球桌上的白球，由 A 點連續碰撞檯邊 B、C 兩點後，再撞擊 D 點 1 號球的路徑。已知 $\overline{PQ} /\!/ \overline{RS}$，$\angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$，則：

(1) $\angle 2$ 與 $\angle 3$ 是否相等？

(2) $\angle 5$ 與 $\angle 6$ 是否相等？

(3)路徑 $\overline{AB}$ 與 $\overline{CD}$ 是否平行？



解 (1) $\because \overline{PQ} /\!/ \overline{RS}$，$\therefore \angle 2=\angle 3$（內錯角相等）。

(2) $\because \angle 1+\angle 5+\angle 2=180^\circ$，且 $\angle 3+\angle 6+\angle 4=180^\circ$，

$\therefore \angle 1+\angle 5+\angle 2=\angle 3+\angle 6+\angle 4$，

又 $\angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$，$\therefore \angle 1=\angle 2=\angle 3=\angle 4$，

由等量公理可得 $\cancel{\angle 1}+\angle 5+\cancel{\angle 2}=\cancel{\angle 3}+\angle 6+\cancel{\angle 4}$，$\therefore \angle 5=\angle 6$。

(3) $\because \angle 5=\angle 6$，$\therefore \overline{AB} /\!/ \overline{CD}$（內錯角相等）

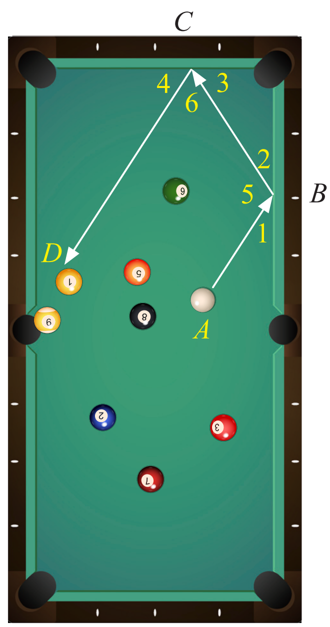
隨堂練習

右圖為撞球桌上的白球，由 A 點連續碰撞檯邊 B、C 兩點後，再撞擊 D 點 1 號球的路徑。

已知 $\angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$，回答下列問題：

(1)若 $\angle 1=33^\circ$，$\angle 3=57^\circ$，求 $\angle 5+\angle 6$。

(2)路徑 $\overline{AB}$ 與 $\overline{CD}$ 是否平行？為什麼？

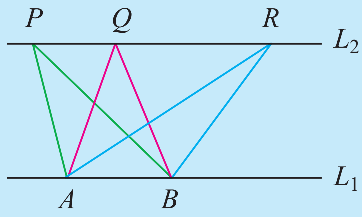


平行線除了截角性質的應用外，也可利用「兩條平行線之間的距離處處相等」的性質，作等面積的圖形變化。

例6 平行線距離的應用

自評 P182 第 6 題

如圖，$L_1 // L_2$，A、B 兩點在 L_1 上，P、Q、R 三點在 L_2 上，若$\triangle ABP$ 的面積是 7，求$\triangle ABQ$ 與 $\triangle ABR$ 的面積。



解 分別自 P、Q、R 向 L_1 作$\triangle ABP$、$\triangle ABQ$、$\triangle ABR$ 的高 h_1、h_2、h_3，則

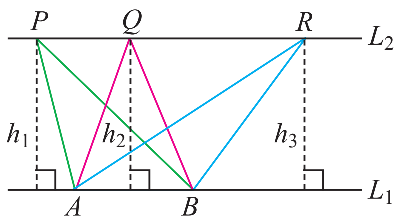
$\triangle ABP$ 的面積$=\dfrac{1}{2}\times\overline{AB}\times h_1$，

$\triangle ABQ$ 的面積$=\dfrac{1}{2}\times\overline{AB}\times h_2$，

$\triangle ABR$ 的面積$=\dfrac{1}{2}\times\overline{AB}\times h_3$，

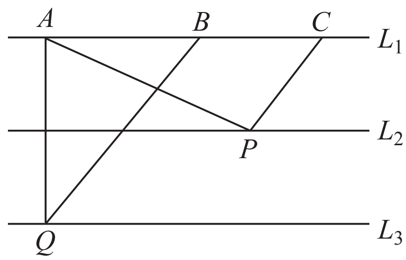
$\because L_1 // L_2$，$\therefore h_1=h_2=h_3$（平行線的距離處處相等），

因此$\triangle ABP$ 的面積$=\triangle ABQ$ 的面積$=\triangle ABR$ 的面積$=7$。



隨堂練習

如圖，$L_1 // L_2 // L_3$，且 L_1、L_2 的距離與 L_2、L_3 的距離相等。已知 A、B、C 三點在 L_1 上，P 點在 L_2 上，Q 點在 L_3 上，若 $\overline{AB}=5$，$\overline{BC}=4$，且$\triangle ABQ$ 的面積為 15，求$\triangle ACP$ 的面積。



第4章

重點回顧

❶平行線的特性

(1)在平面上的兩條平行線會同時與另一條直線垂直。

(2)兩條平行線間的距離處處相等，且永不相交。

(3)在平面上，若有兩條直線同時與一直線平行，則這兩條直線互相平行。

❷平行線的截角性質

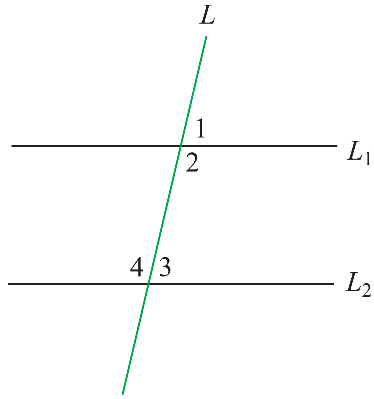
兩條平行線被一條直線所截時，則：

(1)同位角相等。

(2)內錯角相等。

(3)同側內角互補。

例 如圖，$L_1 // L_2$，L 為截線，則同位角$\angle 1=\angle 3$，內錯角$\angle 2=\angle 4$，同側內角$\angle 2+\angle 3=180^\circ$。



❸平行線的判別

兩條直線被一條直線所截，如果符合下列任一條件，則這兩條直線平行。

(1)同位角相等。

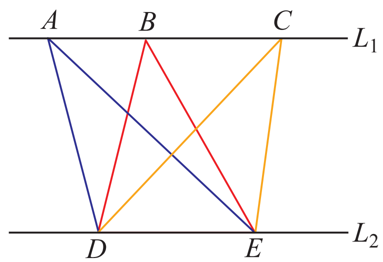
(2)內錯角相等。

(3)同側內角互補。

❹平行線距離的應用

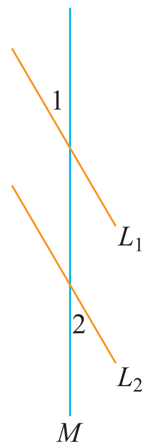
利用「兩條平行線之間的距離處處相等」的性質，可作等面積的圖形變化。

例 如圖，若 $L_1 // L_2$，則 $\triangle ADE$、$\triangle BDE$ 與$\triangle CDE$ 的面積皆相等（同底等高）。

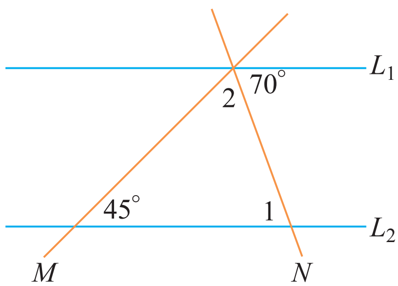


4-1 自我評量

1 如圖，$L_1 // L_2$，M 為 L_1、L_2 的截線，$\angle 1 = 30^\circ$，求 $\angle 2$。 課 P170 課文



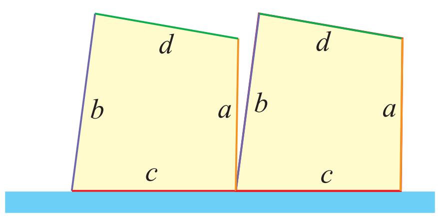
2 如圖，$L_1 // L_2$，M 及 N 都是 L_1、L_2 的截線，且交點在 L_1 上，求 $\angle 1$、$\angle 2$。 課 P172 例 1



3 小美將兩塊「全等」紙板的 c 邊與直尺邊緊靠如下圖，且兩個紙板的 c 邊也緊連在一起，兩紙板無重疊部分，但小美發現兩紙板間有空隙。則： 課 P174 隨堂

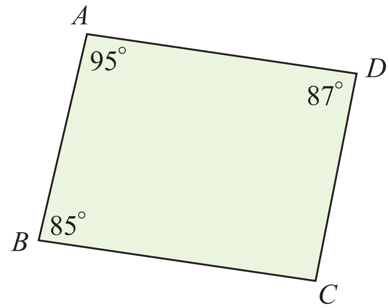
(1) 圖形中，兩紙板的 a 邊是否平行？為什麼？

(2) 同一片紙板的 a、b 兩邊是否平行？為什麼？



4 右圖四邊形 $ABCD$ 中，

課 P174 隨堂

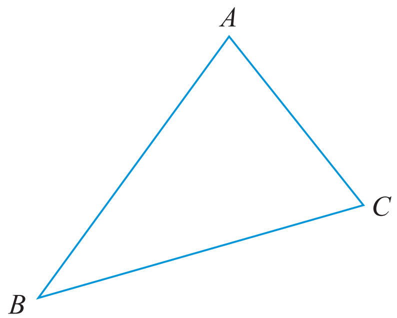


(1) $\overline{AB}$ 與 $\overline{CD}$ 是否平行？為什麼？

(2) $\overline{AD}$ 與 $\overline{BC}$ 是否平行？為什麼？

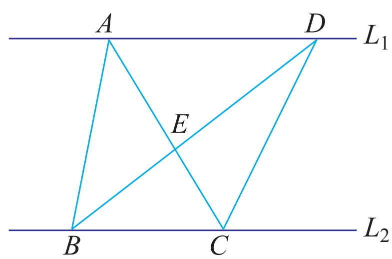
5 在下圖 $\triangle ABC$ 中，利用尺規作圖畫一條直線 L，使 L 會經過 B 點且與 $\overline{AC}$ 平行。

課 P175 隨堂



6 如圖，$L_1 \,//\, L_2$，$\triangle ADE$ 的面積是 9，$\triangle ABE$ 的面積是 6，$\triangle BCE$ 的面積是 4，求四邊形 $ABCD$ 的面積。

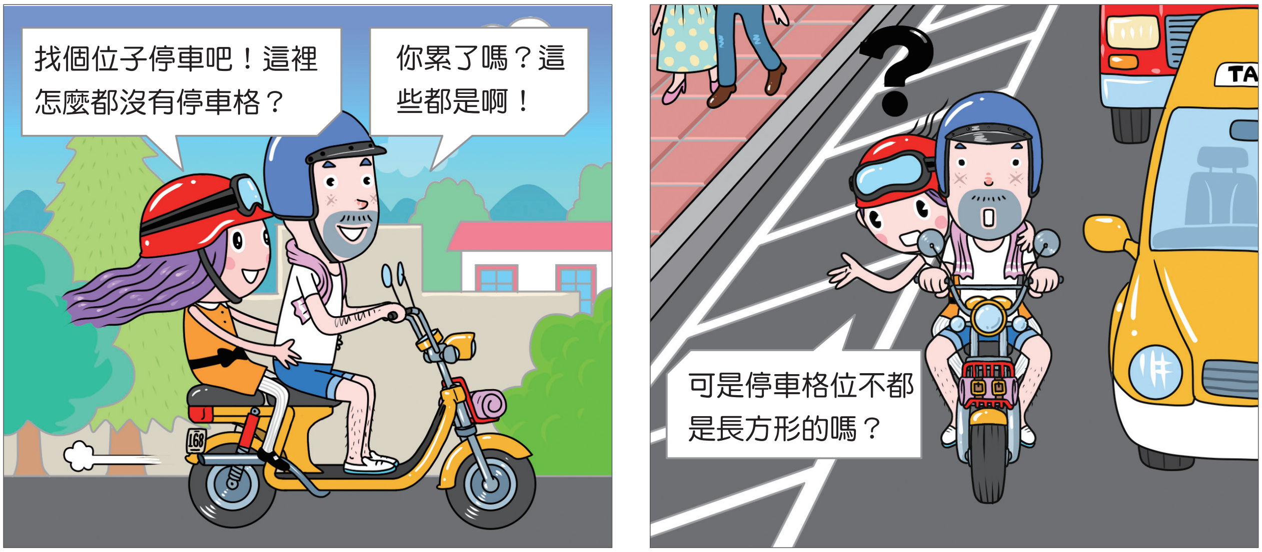
課 179 例 6

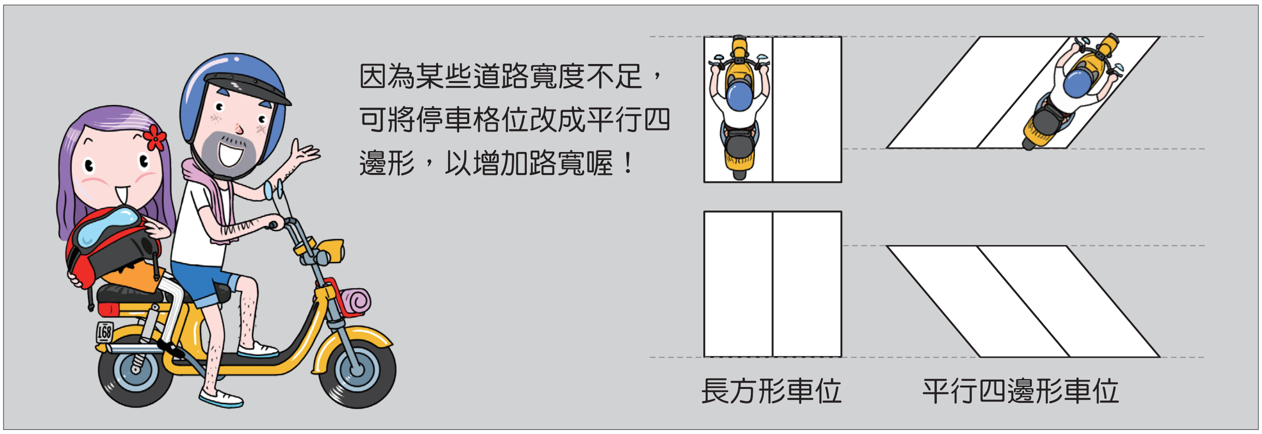


4-2 平行四邊形

1 平行四邊形的性質

兩組對邊分別平行的四邊形稱為平行四邊形，在生活中會發現許多平行四邊形。





Thinking

除了平行四邊形的停車格之外，寫出你在生活周遭看到的平行四邊形？

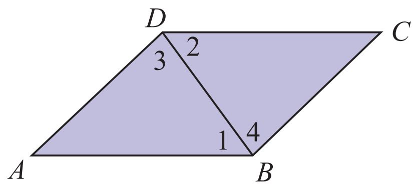
接下來，我們將在這一節探討平行四邊形的性質及判別的方法。

平行四邊形的對角與對邊

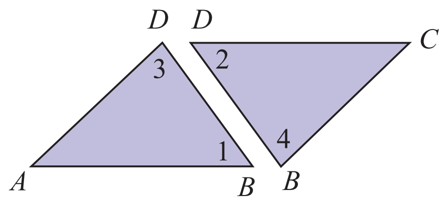
小學曾經利用實測或疊合的方式，知道平行四邊形的兩組對邊分別等長、兩組對角分別相等。我們將利用「平行線的截角性質」和「三角形的全等性質」探討平行四邊形的性質與判別方法。

探索活動 平行四邊形的基本性質（一）

如圖，四邊形 $ABCD$ 為平行四邊形，連接對角線 $\overline{BD}$，回答下列問題：



(1) $\angle 1$ 與 $\angle 2$ 是否相等？為什麼？



(2) $\angle 3$ 與 $\angle 4$ 是否相等？為什麼？

(3) $\triangle ABD$ 與 $\triangle CDB$ 是否全等？如果是，依據的全等性質為何？

由 探索活動 可知，若四邊形 $ABCD$ 為平行四邊形，可得 $\triangle ABD \cong \triangle CDB$。因此 $\overline{AB}=\overline{CD}$，$\overline{AD}=\overline{BC}$，$\angle A=\angle C$。又 $\angle ABC=\angle 1+\angle 4=\angle 2+\angle 3=\angle ADC$，故平行四邊形的兩組對邊分別等長且兩組對角分別相等。

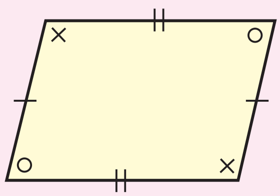
平行四邊形的性質(一)

在平行四邊形中，

(1)任一條對角線均可將它分成兩個全等的三角形。

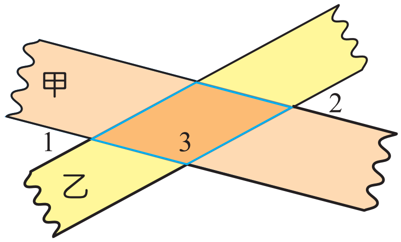
(2)兩組對角分別相等。

(3)兩組對邊分別等長。



隨堂練習

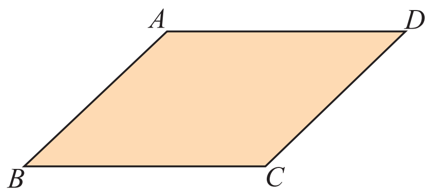
1. 右圖是兩條有平行邊的紙帶，紙帶甲比紙帶乙寬，回答下列問題：　自評 P195 第 1 題

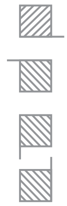


(1)重疊的部分是哪一種四邊形？

(2)如果 $\angle 1 = 43^\circ$，求 $\angle 2$、$\angle 3$。

2. 右圖是艾美畫的平行四邊形 $ABCD$，若平行四邊形 $ABCD$ 的周長為 32 公分，且 $\overline{AB} = 7$ 公分，求 $\overline{BC}$ 的長。　自評 P195 第 2 題



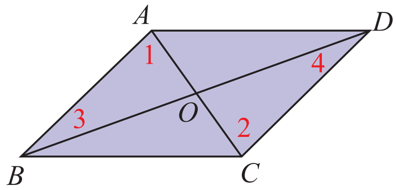


觀察上面圖形的規律，哪一個應該被拿走？

平行四邊形的對角線

探索活動 平行四邊形的基本性質（二）

如圖，平行四邊形 $ABCD$ 的兩對角線相交於 O 點，回答下列問題：



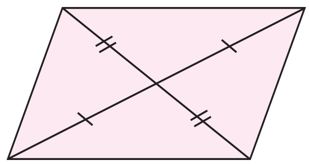
(1) $\angle 1$ 與 $\angle 2$、$\angle 3$ 與 $\angle 4$ 是否分別相等？為什麼？

(2)利用(1)及平行四邊形對邊等長，判別 $\triangle ABO$ 與 $\triangle CDO$ 是否全等？如果是，依據的全等性質為何？

由 探索活動 可知，若四邊形 $ABCD$ 為平行四邊形，可得 $\triangle ABO \cong \triangle CDO$，因此 $\overline{AO} = \overline{CO}$ 且 $\overline{BO} = \overline{DO}$，故平行四邊形的兩條對角線互相平分。

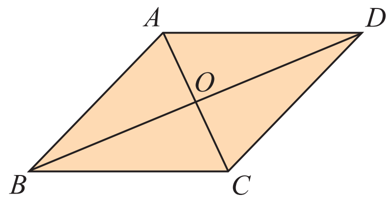
平行四邊形的性質(二)

平行四邊形的兩條對角線互相平分。



隨堂練習

如右圖，平行四邊形公園 $ABCD$ 中，O 為兩條對角線步道交點，傑克從 A 點開始沿著步道散步，依序經過 O、D 兩點後回到 A 點。若 $\overline{BC}=87$ 公尺，$\overline{BD}=158$ 公尺，$\overline{AC}=68$ 公尺，則傑克散步走了多少公尺？

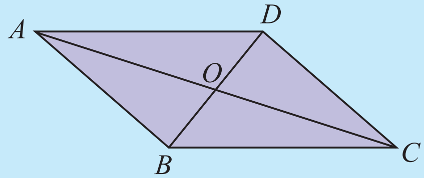


前面學到平行四邊形的兩條對角線互相平分，那麼平行四邊形的兩條對角線所形成四個三角形的面積有何關聯呢？

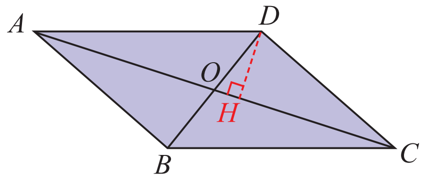
例1 平行四邊形的對角線與面積

自評 P195 第 3 題

如圖，平行四邊形 $ABCD$ 中，O 為兩條對角線交點，且△AOD 的面積為 5。求△COD、△BOC、△AOB 的面積。



解 作 $\overline{DH}\perp\overline{AC}$ 於 H 點。



∵△AOD 的面積$=\dfrac{1}{2}\times\overline{AO}\times\overline{DH}$，

且△COD 的面積$=\dfrac{1}{2}\times\overline{CO}\times\overline{DH}$，

又 $\overline{AO}=\overline{CO}$（平行四邊形對角線互相平分），

∴△COD 的面積＝△AOD 的面積＝5，

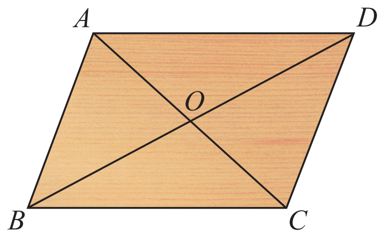
同理△BOC 的面積＝△AOB 的面積＝△AOD 的面積＝5。

對角線四等分平行四邊形

平行四邊形的兩條對角線將其面積四等分。

隨堂練習

如右圖，平行四邊形木板 $ABCD$ 中，O 為兩條對角線交點，阿威老師將木板沿著對角線切割成四塊三角形木板，如果△COD 的面積為 300 平方公分，求△ABO 和△AOD 的面積和。



解答：▨。（剩餘的三個翻轉後，圖形會一樣。HINT：斜線）

第4章

2 平行四邊形的判別

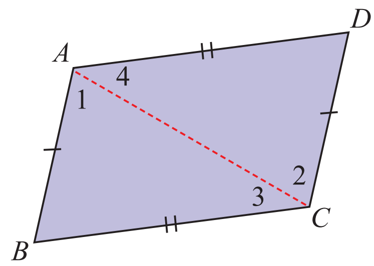
要判別一個四邊形是否為平行四邊形，除了利用兩組對邊分別平行來判別以外，還有其他的判別方法。接下來，我們將學習平行四邊形的其他判別方法。

兩組對邊分別等長

探索活動 平行四邊形的判別（對邊等長）

自評 P196 第 4 題

如圖，四邊形 $ABCD$ 中，$\overline{AB}=\overline{CD}$，且 $\overline{AD}=\overline{BC}$，連接對角線 $\overline{AC}$，回答下列問題：



(1)由 $\overline{AB}=\overline{CD}$，$\overline{BC}=\overline{DA}$，$\overline{AC}=\overline{AC}$，

可知 $\triangle ABC\cong\triangle CDA$，依據的全等性質為何？

(2)$\angle 1$ 與 $\angle 2$、$\angle 3$ 與 $\angle 4$ 是否分別相等？為什麼？

(3)$\overline{AD}$ 與 $\overline{BC}$ 是否平行？為什麼？

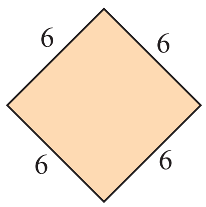
(4)$\overline{AB}$ 與 $\overline{CD}$ 是否平行？為什麼？

由 探索活動 可知，在四邊形 $ABCD$ 中，若 $\overline{AB}=\overline{CD}$，且 $\overline{AD}=\overline{BC}$，則 $\overline{AD}\,//\,\overline{BC}$，$\overline{AB}\,//\,\overline{CD}$。也就是說，**兩組對邊分別等長的四邊形是平行四邊形**。

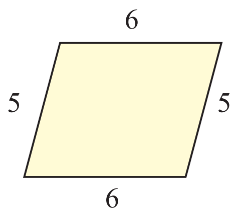
隨堂練習

判別下列圖形是否為平行四邊形，並在□中打「✓」。

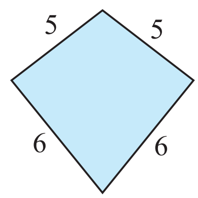
(1)□ 是 □ 否



(2)□ 是 □ 否



(3)□ 是 □ 否



兩組對角分別相等

自評 P196 第 4 題

由前頁的 探索活動 可知，兩組對邊分別等長的四邊形是平行四邊形。如果從角度來看，四邊形的對角相等時，此四邊形是否為平行四邊形呢？

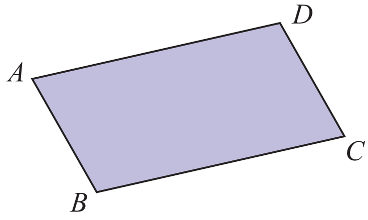
如圖，四邊形 $ABCD$ 中，$\angle A=\angle C$，$\angle B=\angle D$，

$\because \angle A+\angle B+\angle C+\angle D=360^\circ$（四邊形內角和），

$\therefore \angle A+\angle B=180^\circ$，$\angle A+\angle D=180^\circ$，

故 $\overline{AD} /\!/ \overline{BC}$，且 $\overline{AB} /\!/ \overline{CD}$（同側內角互補），

因此，四邊形 $ABCD$ 為平行四邊形。



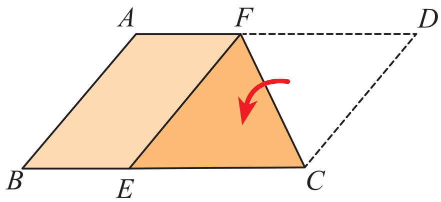
由上可知，兩組對角分別相等的四邊形是平行四邊形。

Thinking

只有一組對角相等的四邊形不一定是平行四邊形，請舉出一個例子。

隨堂練習

如右圖，四邊形 $ABCD$ 中，將 D 點摺到 $\overline{BC}$ 上交於一點 E，如果 $\angle B=50^\circ$，$\angle DCF=\angle DFC=65^\circ$。完成下列空格，說明四邊形 $ABCD$ 為平行四邊形。



說明

(1) $\angle DCF=\angle DFC=65^\circ$，可知 $\angle D=$ ______ 度。

(2) $\angle BCD=\angle BCF+\angle DCF=$ ______ 度，

(3) 由四邊形 $ABCD$ 的內角和 360°，可知 $\angle A=$ ______ 度。

(4) 四邊形 $ABCD$ 為平行四邊形（理由：______________________）。

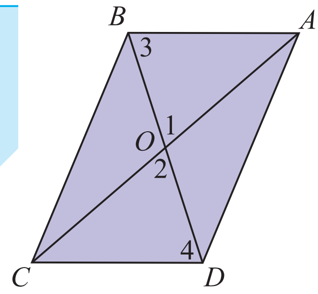
兩條對角線互相平分

我們也可以從四邊形的對角線來探討此四邊形是否為平行四邊形。

例2 平行四邊形的判別（對角線互相平分）

自評 P196 第 4 題

如圖，四邊形 $ABCD$ 中，O 為兩條對角線的交點，
且 $\overline{OA}=\overline{OC}$，$\overline{OB}=\overline{OD}$，說明四邊形 $ABCD$ 為平行四邊形。



說明

在$\triangle AOB$ 和$\triangle COD$ 中，

$\because \overline{OA}=\overline{OC}$，$\overline{OB}=\overline{OD}$，$\angle 1=\angle 2$（對頂角相等），

$\therefore \triangle AOB \cong \triangle COD$（$SAS$ 全等性質），

可得$\angle 3=\angle 4$（對應角相等），$\therefore \overline{AB} /\!/ \overline{CD}$（內錯角相等）。

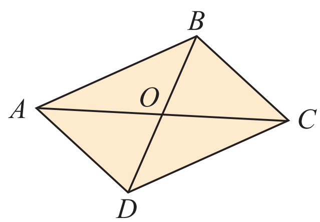
同理，在$\triangle AOD$ 和$\triangle COB$ 中，可推得 $\overline{AD} /\!/ \overline{BC}$。

因此，四邊形 $ABCD$ 為平行四邊形。

由 例2 可知，兩條對角線互相平分的四邊形是平行四邊形。

隨堂練習

如圖，四邊形 $ABCD$ 中，$\triangle AOB$ 的面積$=\triangle BOC$ 面積$=\triangle COD$ 的面積，說明四邊形 $ABCD$ 為平行四邊形。



說明

$\because \triangle AOB$ 的面積$=\triangle BOC$ 的面積，$\therefore \overline{AO}=$ ______（同高），

又$\triangle BOC$ 的面積$=\triangle COD$ 的面積，$\therefore \overline{BO}=\overline{OD}$，理由：________ 。

由 $\overline{AO}=$ ______ 及 $\overline{BO}=\overline{OD}$ 可知，

四邊形 $ABCD$ 為平行四邊形（理由：________________________________）。

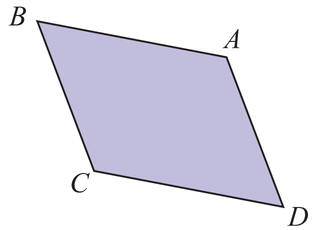
一組對邊平行且等長

除了從前面的三種方法判別四邊形是否為平行四邊形之外，我們也可從四邊形的一組對邊關係來探討此四邊形是否為平行四邊形。

例3 平行四邊形的判別(一組對邊平行且等長)

自評 P196 第 4 題

如圖，四邊形 $ABCD$ 中，$\overline{AB} // \overline{CD}$，且 $\overline{AB}=\overline{CD}$，說明四邊形 $ABCD$ 為平行四邊形。



說明

如圖，連接對角線 $\overline{AC}$。

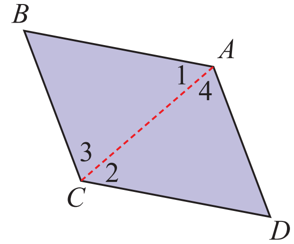
$\because \overline{AB} // \overline{CD}$，$\therefore \angle 1=\angle 2$(內錯角相等)，

在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle CDA$ 中，$\because \overline{AB}=\overline{CD}$，$\angle 1=\angle 2$，$\overline{AC}=\overline{AC}$，

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle CDA$($SAS$ 全等性質)。

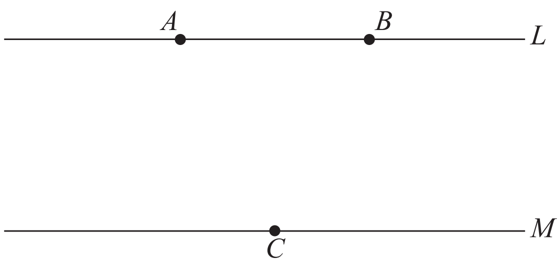
可得 $\angle 3=\angle 4$(對應角相等)，$\therefore \overline{BC} // \overline{AD}$(內錯角相等)，

因此，四邊形 $ABCD$ 為平行四邊形。



隨堂練習

如圖，A、B 兩點在直線 L 上，C 點在直線 M 上，且 $L // M$。在直線 M 上找出 D、E 兩點，使得四邊形 $ABCD$、$ABEC$ 皆為平行四邊形。



綜合以上內容，平行四邊形的判別方法如下：

平行四邊形的判別

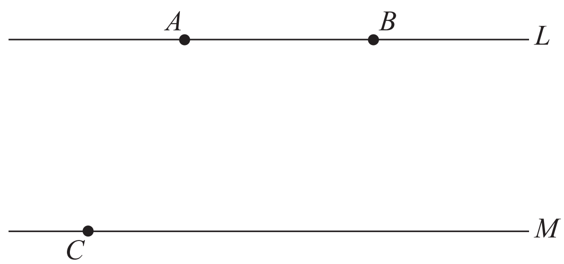
符合下列敘述之一的四邊形為平行四邊形：

(1)兩組對邊分別平行。
(2)兩組對邊分別等長。
(3)兩組對角分別相等。
(4)兩條對角線互相平分。
(5)一組對邊平行且等長。

Thinking

1. 只有一組對邊平行的四邊形不一定是平行四邊形，請舉出一個例子。

2. 一組對邊平行，另一組對邊等長的四邊形不一定為平行四邊形。在右圖中，$L \parallel M$，在直線 M 上找出一點 D，使得 $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$，$\overline{AC}=\overline{BD}$，但四邊形 $ABDC$ 不是平行四邊形。

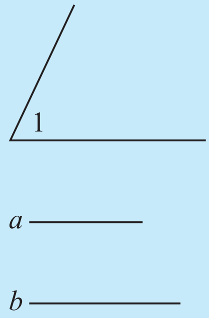


利用尺規作圖畫平行四邊形時，若能善用平行四邊形的判別方法，常能簡化作圖的步驟，以下面的例題來說明。

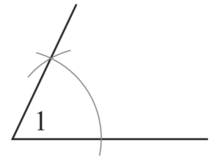
例4 平行四邊形作圖

自評 P196 第 5 題

如右圖，已知$\angle 1$ 及 a、b 兩線段長，利用尺規作圖畫一個平行四邊形 $ABCD$，使得$\angle A=\angle 1$，$\overline{AB}=a$，$\overline{AD}=b$。

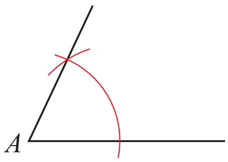


原題目的作圖痕跡

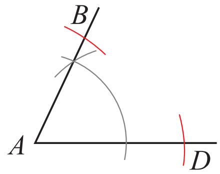


作法

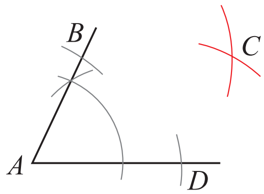
1. 作$\angle A=\angle 1$。



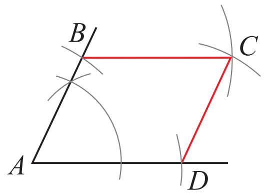
2. 在$\angle A$ 兩邊分別取 B、D 兩點，使得 $\overline{AB}=a$，$\overline{AD}=b$。



3. 分別以 B、D 兩點為圓心，b、a 線段長為半徑畫兩弧，交於 C 點。



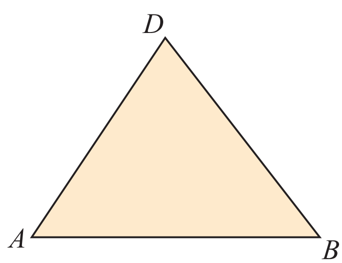
4. 連接 $\overline{BC}$ 與 $\overline{CD}$，則四邊形 $ABCD$ 即為所求。



例4 是依據兩組對邊分別等長來畫出平行四邊形。

隨堂練習

如圖，已知$\triangle ABD$，利用尺規作圖作 C 點，使得四邊形 $ABCD$ 為平行四邊形。除了 例4 的作圖方法，還可以有其他方法嗎？它是利用平行四邊形的哪一個判別方法呢？



數字是包裹重量的編碼，哪一個不一樣？

6 903
7 602
8 405
9 701

重點回顧

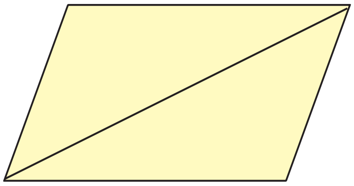
❶平行四邊形

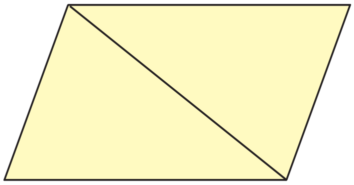
兩組對邊分別平行的四邊形稱為平行四邊形。

❷平行四邊形的性質

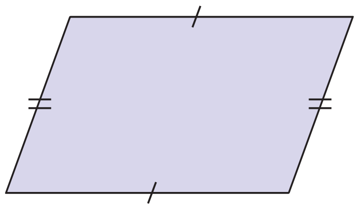
任意平行四邊形具有下列性質：

(1)任一條對角線均可將它分成兩個全等的三角形。

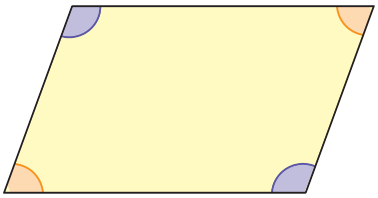




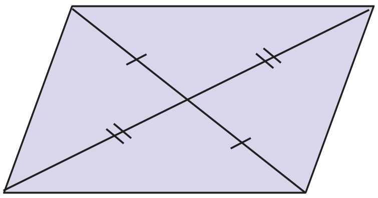
(2)兩組對邊分別等長。



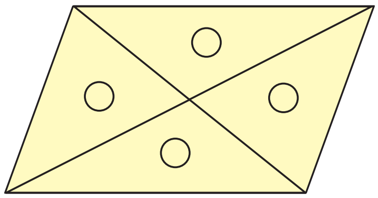
(3)兩組對角分別相等。



(4)兩條對角線互相平分。



(5)平行四邊形的兩條對角線將其面積四等分。



❸平行四邊形的判別

符合下列敘述之一的四邊形為平行四邊形：

(1)兩組對邊分別平行。

(2)兩組對邊分別等長。

(3)兩組對角分別相等。

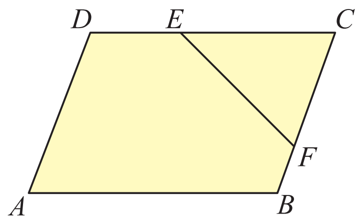
(4)兩條對角線互相平分。

(5)一組對邊平行且等長。

4-2自我評量

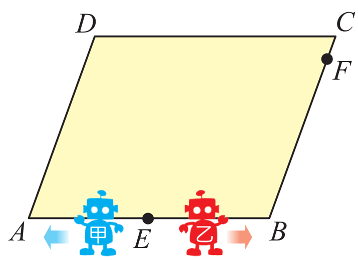
① 如圖，平行四邊形 $ABCD$ 中，$\angle A=70^\circ$，$\angle CEF=45^\circ$，求 $\angle BFE$。

課 P185 隨堂第 1 題



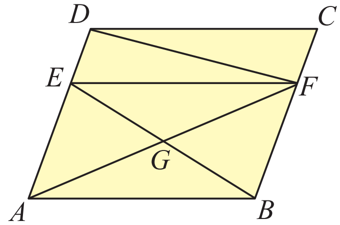
② 機器人甲、乙分別以順時針與逆時針方向，等速繞著平行四邊形 $ABCD$ 行走，若 $\overline{AB}=10$，$\overline{AD}=8$，機器人甲的行走速率是機器人乙的 2 倍，且兩機器人同時從 $\overline{AB}$ 的中點 E 出發後，在 F 點第一次相遇，求 $\overline{CF}$ 的長。

課 P185 隨堂第 2 題



③ 如圖，四邊形 $ABCD$ 為平行四邊形，$\overline{EF}\parallel\overline{AB}$，如果四邊形 $ABFE$ 的面積為 24，四邊形 $CDEF$ 的面積為 10，求四邊形 $DEGF$ 的面積。

課 P187 例 1



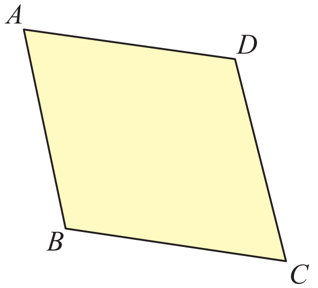
解答：。（6+0+2=8，8×7=56，與其它三個不同？）

第4章

4 利用平行四邊形判別方法，判別下列各四邊形 $ABCD$ 是否為平行四邊形。若是，寫出其判別方法。

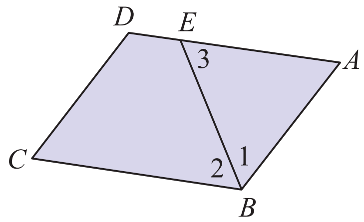
課 P188 ～192 課文、例題

(1) $\angle A=\angle C$，$\angle B+\angle D=220^\circ$。



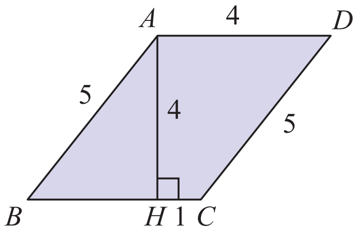
□ 是
□ 否
理由：____________________

(2) $\angle 1=\angle 2=\angle 3$，$\overline{AB}+\overline{DE}=\overline{BC}$。



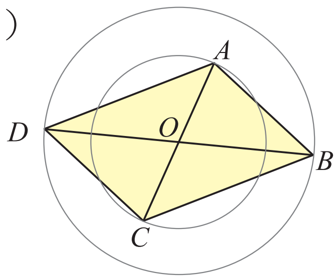
□ 是
□ 否
理由：____________________

(3) $\overline{AH}\perp\overline{BC}$。



□ 是
□ 否
理由：____________________

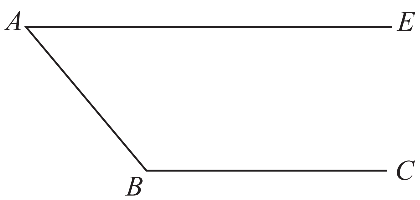
(4) $\overline{AC}$ 與 $\overline{BD}$ 分別為兩同心圓的直徑。（圓心 O）



□ 是
□ 否
理由：____________________

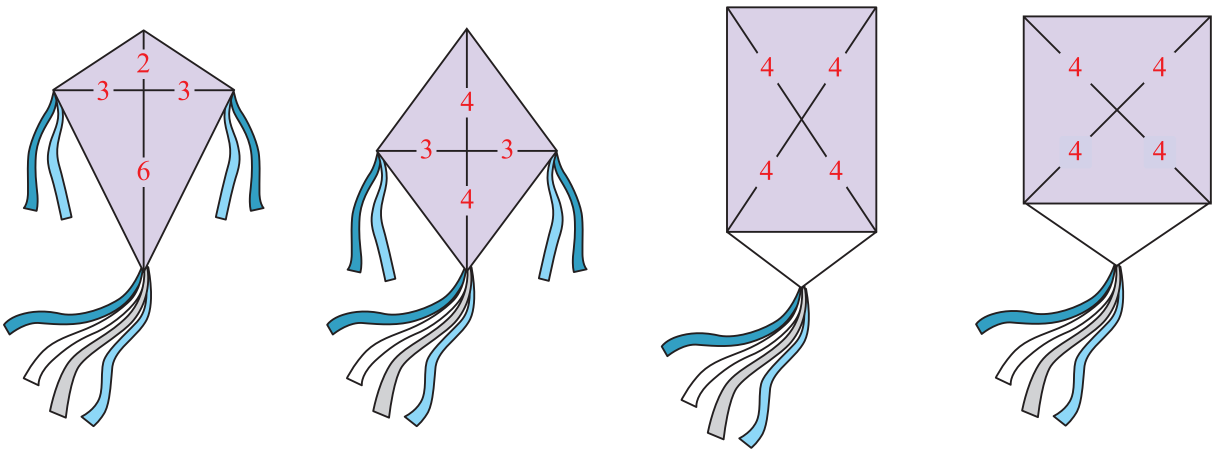
5 如圖，$\overline{AE}\,/\!/\,\overline{BC}$，且 $\overline{AE}>\overline{BC}$，利用尺規作圖在 $\overline{AE}$ 上取一點 D，使得四邊形 $ABCD$ 為平行四邊形，並說明其理由。

課 P193 例 4



4-3 特殊四邊形與梯形

風箏起源於中國，最早的風箏據說是春秋時代魯班製作的木鳶，而現代的風箏是以馬拉紙或尼龍布為材料。風箏發展至今，除了平面的風箏，也有立體形狀的風箏，而製作平面風箏時，會在四邊形對角線放置兩根骨架。以下是分別利用 8 個單位長與 6 個單位長的兩種竹條所構成的四個平面風箏。



圖一　圖二　圖三　圖四

這四個風箏的形狀分別是哪個特殊的四邊形呢？接下來，我們來討論特殊四邊形及其對角線的性質。

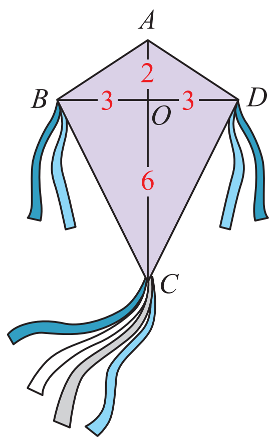
1 箏形

兩組鄰邊等長的四邊形稱為箏形，在七年級時學過箏形的一條對角線垂直平分另一條對角線，那麼有一條對角線垂直平分另一條對角線的四邊形是否為箏形呢？

例 1 箏形的判別

自評 P211 第 3 題

右圖是一個風箏，在四邊形 $ABCD$ 中，$\overline{AC}$ 垂直平分 $\overline{BD}$，$\overline{OB}=\overline{OD}=3$，$\overline{OA}=2$，$\overline{OC}=6$，說明四邊形 $ABCD$ 為箏形。



說明

$\because \overline{AC}$ 垂直平分 $\overline{BD}$，

$\therefore \overline{AB}=\overline{AD}=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$，

同理，$\overline{CB}=\overline{CD}=\sqrt{6^2+3^2}=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$，

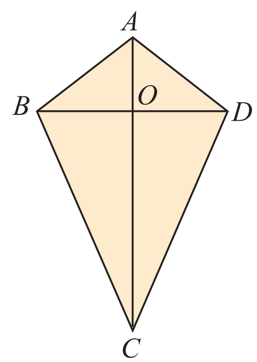
所以四邊形 $ABCD$ 為箏形。

事實上，像 例 1 這樣一條對角線垂直平分另一條對角線的四邊形是箏形。

隨堂練習

自評 P211 第 1 題

如圖，四邊形 $ABCD$ 中，對角線 $\overline{AC}$ 垂直平分 $\overline{BD}$，$\overline{AB}=6$，$\overline{CD}=12$，求四邊形 $ABCD$ 的周長。



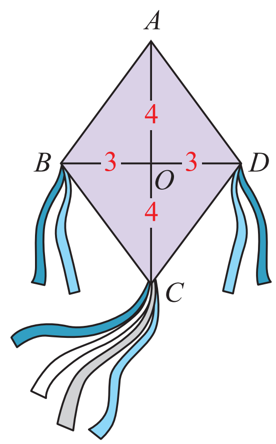
2 菱形

四邊皆等長的四邊形稱為菱形，在七年級時學過菱形的兩條對角線互相垂直平分，那麼兩條對角線互相垂直平分的四邊形是否為菱形呢？

例2 菱形的判別

自評 P211 第 3 題

右圖是一個風箏，在四邊形 $ABCD$ 中，對角線 $\overline{AC}$ 與 $\overline{BD}$ 互相垂直平分，O 為兩條對角線 $\overline{AC}$、$\overline{BD}$ 的交點，其中 $\overline{AO}=\overline{CO}=4$，$\overline{BO}=\overline{DO}=3$，說明四邊形 $ABCD$ 為菱形。



說明

$\because$ 對角線 $\overline{AC}$ 與 $\overline{BD}$ 互相垂直平分，

由畢氏定理可知：

$\overline{AB}^2=\overline{BC}^2=\overline{CD}^2=\overline{DA}^2=3^2+4^2=25$，

因此 $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{DA}=5$，所以四邊形 $ABCD$ 為菱形。

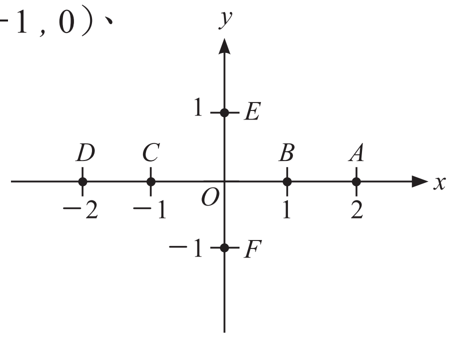
事實上，像 例2 這樣兩條對角線互相垂直平分的四邊形是菱形。

隨堂練習

如圖，在坐標平面上，有 $A(2,0)$、$B(1,0)$、$C(-1,0)$、$D(-2,0)$、$E(0,1)$、$F(0,-1)$ 六個點，則：

(1)四邊形 $BEDF$ 是何種四邊形？

(2)四邊形 $AEDF$ 是何種四邊形？



第 4 章

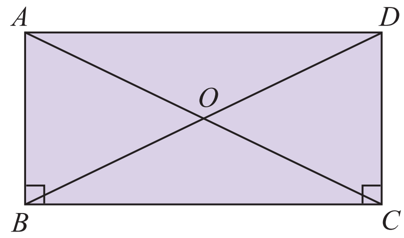
3 長方形（矩形）

四個內角皆為直角的四邊形稱為長方形，接著我們來說明長方形的對角線性質。

例3 長方形的對角線性質

自評 P211 第 3 題

如右圖，在長方形 $ABCD$ 中，已知 $\overline{AD}=\overline{BC}=12$，$\overline{AB}=\overline{DC}=5$，求 $\overline{AC}$、$\overline{BD}$ 的長。



說明

$\because \angle ABC=\angle BCD=90^\circ$，

$\therefore \overline{AC}^2=\overline{BC}^2+\overline{AB}^2=12^2+5^2=169$，

$\overline{BD}^2=\overline{BC}^2+\overline{DC}^2=12^2+5^2=169$，

因此 $\overline{AC}=\overline{BD}=13$，

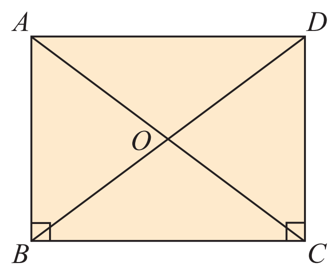
故長方形的兩條對角線等長。

由 例3 可知：長方形的兩條對角線等長；由於長方形也是平行四邊形，所以長方形的兩條對角線互相平分，因此長方形的兩條對角線等長且互相平分。

隨堂練習

自評 P211 第 2 題

如圖，長方形 $ABCD$ 中，$\overline{AC}$ 和 $\overline{BD}$ 相交於 O 點。若 $\overline{OA}=5$，$\overline{AB}=6$，求$\triangle ABD$ 的面積。

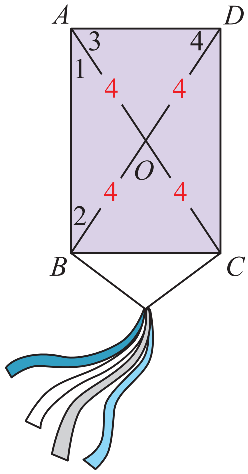


長方形的對角線等長且互相平分，那麼對角線等長且互相平分的四邊形是否為長方形呢？

例4 長方形的判別

自評 P211 第 3 題

右圖是一個風箏，在四邊形 $ABCD$ 中，O 為對角線 $\overline{AC}$、$\overline{BD}$ 的交點，已知 $\overline{AC}=\overline{BD}$，且 $\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}=\overline{OD}=4$，說明四邊形 $ABCD$ 為長方形。



說明

在△AOB 中，∵$\overline{OA}=\overline{OB}$，∴$\angle 1=\angle 2$。

在△AOD 中，∵$\overline{OA}=\overline{OD}$，∴$\angle 3=\angle 4$。

在△ABD 中，∵$\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4=180^\circ$，

∴$\angle BAD=\angle 1+\angle 3=90^\circ$。

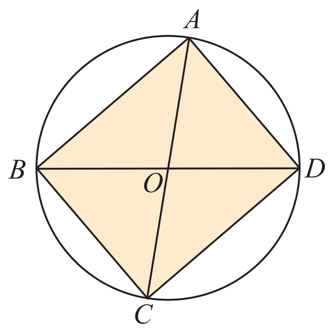
同理，四邊形 $ABCD$ 的內角都是 90°，

故四邊形 $ABCD$ 為長方形。

事實上，像 例4 這樣兩條對角線等長且互相平分的四邊形是長方形。

隨堂練習

如圖，$\overline{AC}$、$\overline{BD}$ 是圓 O 的直徑，若 $\overline{AC}=25$，$\overline{AB}=20$，求四邊形 $ABCD$ 的周長。



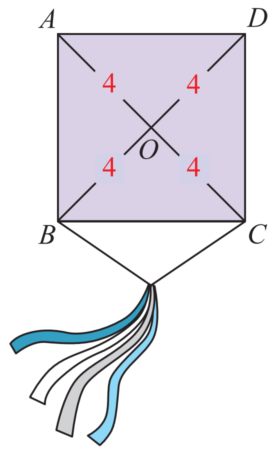
4 正方形

正方形的對角線又有什麼性質呢？由於正方形的四邊等長且四個內角都是直角，可視為長方形，亦可視為菱形，故正方形的兩條對角線等長且互相垂直平分。那麼兩條對角線等長且互相垂直平分的四邊形是否為正方形呢？

例5 正方形的判別

自評 P211 第 3 題

右圖是一個風箏，在四邊形 $ABCD$ 中，對角線 $\overline{AC}$ 與 $\overline{BD}$ 互相垂直平分，且 $\overline{AC}=\overline{BD}=8$，說明四邊形 $ABCD$ 為正方形。



說明

(1) $\because$ 對角線 $\overline{AC}$ 與 $\overline{BD}$ 互相垂直平分，

$\therefore \angle AOB=90^\circ$，且 $\overline{AO}=\dfrac{1}{2}\overline{AC}=\dfrac{1}{2}\times 8=4$，

$\overline{BO}=\dfrac{1}{2}\overline{BD}=\dfrac{1}{2}\times 8=4$。

根據畢氏定理：$\overline{AB}=\sqrt{\overline{AO}^2+\overline{BO}^2}=\sqrt{4^2+4^2}=4\sqrt{2}$，

同理，$\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{AD}=4\sqrt{2}$，故 $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{AD}$。

(2) $\because$ 對角線 $\overline{AC}$ 與 $\overline{BD}$ 等長且互相平分，$\therefore$ 四邊形 $ABCD$ 為長方形。

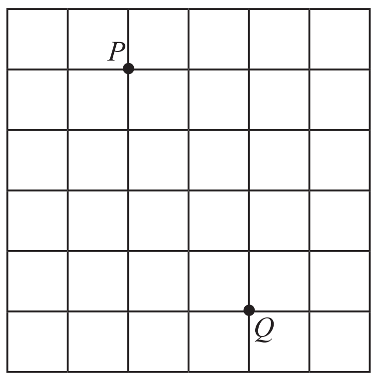
由(1)、(2)可知，四邊形 $ABCD$ 為正方形。

隨堂練習

如圖，在右圖的方格紙上畫出符合以下條件的正方形。

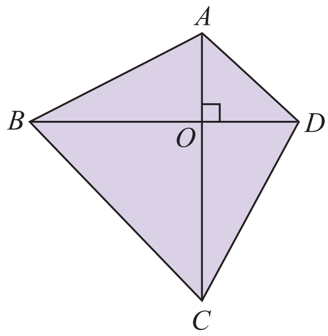
條件 1：正方形的 4 個頂點皆在格子點上。

條件 2：P、Q 兩點皆是正方形的頂點。



對角線長求面積

如圖，$\overline{AC}$、$\overline{BD}$ 為四邊形 $ABCD$ 的兩對角線，已知 $\overline{AC}\perp\overline{BD}$ 於 O 點，那麼要如何利用對角線 $\overline{AC}$ 與 $\overline{BD}$ 求四邊形 $ABCD$ 的面積呢？方法如下：



四邊形 $ABCD$ 的面積

$=\triangle BAD$ 的面積 $+\triangle BCD$ 的面積

$$=\frac{1}{2}\times\overline{BD}\times\overline{OA}+\frac{1}{2}\times\overline{BD}\times\overline{OC}$$

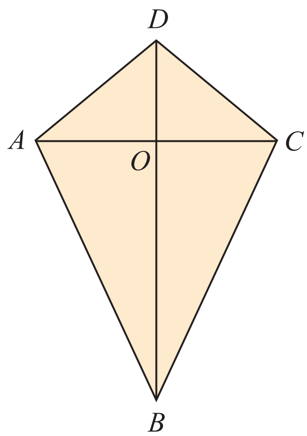
$$=\frac{1}{2}\times\overline{BD}\times(\overline{OA}+\overline{OC})$$

$$=\frac{1}{2}\times\overline{BD}\times\overline{AC}$$

由上可知，**當四邊形的兩對角線互相垂直時，其面積為兩對角線長乘積的一半**。我們知道箏形、菱形與正方形的兩對角線皆互相垂直，因此它們的面積皆等於兩對角線長乘積的一半。

隨堂練習

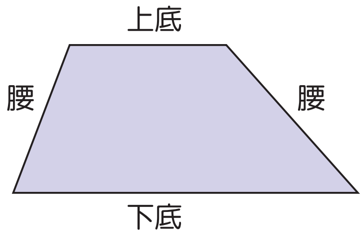
如圖，箏形 $ABCD$ 中，若對角線 $\overline{AC}=12$，$\overline{BD}=18$，求箏形 $ABCD$ 的面積。



5 梯形

梯形的基本性質

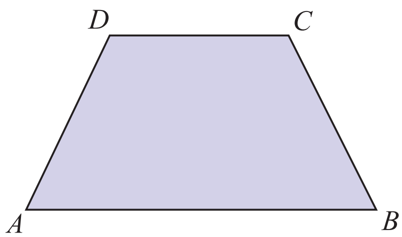
梯形是一組對邊平行，另一組對邊不平行的四邊形，其中平行的一組對邊分別稱為**上底**與**下底**，不平行的一組對邊稱為**腰**。若梯形的兩腰等長，稱此梯形為**等腰梯形**。



例6 等腰梯形兩底角相等

自評 P212 第 4 題

如圖，等腰梯形 $ABCD$ 中，$\overline{AB} /\!/ \overline{CD}$，$\overline{AB} > \overline{CD}$，$\overline{AD} = \overline{BC}$，說明 $\angle A = \angle B$，$\angle C = \angle D$。



說明

如圖，$\overline{AB} /\!/ \overline{CD}$，過 C 點作 $\overline{CE} /\!/ \overline{DA}$ 交 $\overline{AB}$ 於 E 點，

則四邊形 $AECD$ 為平行四邊形（兩組對邊分別平行），

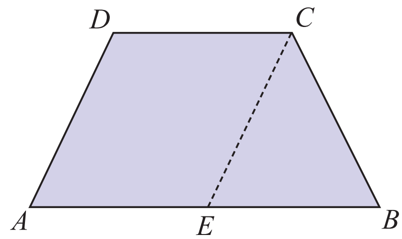
$\therefore \angle A = \angle CEB$（同位角相等），$\overline{CE} = \overline{AD}$（對邊等長）

又 $\overline{AD} = \overline{BC}$（已知），$\therefore \overline{CE} = \overline{AD} = \overline{BC}$，

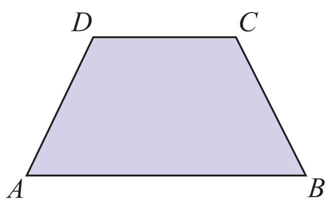
故 $\triangle BCE$ 為等腰三角形，$\angle B = \angle CEB$，

因此 $\angle A = \angle CEB = \angle B$，

$\angle BCD = 180^\circ - \angle B = 180^\circ - \angle A = \angle D$（平行線同側內角互補）。

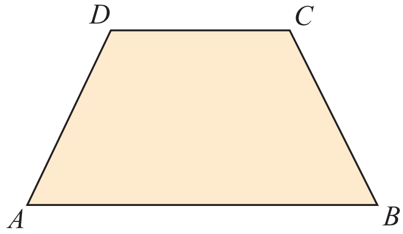


Thinking



在七年級學過等腰梯形是線對稱圖形。如圖，四邊形 $ABCD$ 是等腰梯形，其中 $\overline{AB} /\!/ \overline{CD}$，利用尺規作圖畫出此等腰梯形的對稱軸。

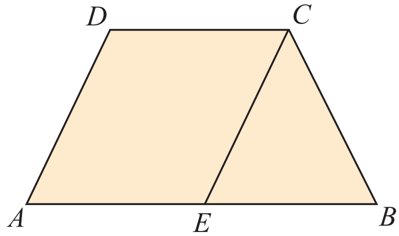
隨堂練習



如圖，梯形 $ABCD$ 中，$\overline{AB} // \overline{CD}$，$\angle A = \angle B$，

完成下列空格說明梯形 $ABCD$ 是等腰梯形。

說明



(1)如圖，過 C 點作 $\overline{CE} // \overline{DA}$，交 $\overline{AB}$ 於 E 點，

則 $\angle A = \angle CEB$（理由：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿）。

又 $\angle A = \angle B$（已知），$\therefore \angle CEB = \angle B$，故 $\overline{BC} = \overline{CE}$。

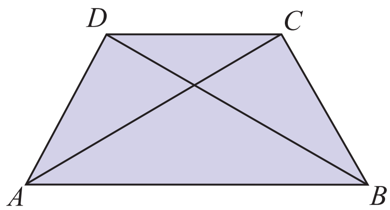
(2) $\because \overline{AB} // \overline{CD}$，$\overline{CE} // \overline{AD}$，

$\therefore$ 四邊形 $AECD$ 為平行四邊形，

故 $\overline{CE} = \overline{AD}$（理由：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿）。

由(1)、(2)可知 $\overline{BC} = \overline{CE} = \overline{AD}$，因此梯形 $ABCD$ 是等腰梯形。

探索活動　等腰梯形對角線等長



如圖，等腰梯形 $ABCD$ 中，$\overline{AB} // \overline{CD}$，$\overline{AD} = \overline{BC}$，

連接 $\overline{AC}$、$\overline{BD}$ 兩條對角線，回答下列問題：

(1) $\angle BAD$ 與 $\angle ABC$ 是否相等？為什麼？

(2)由 $\overline{AD} = \overline{BC}$，$\angle BAD = \angle ABC$，$\overline{AB} = \overline{AB}$，可知

$\triangle ABC \cong \triangle BAD$，在此依據的全等性質為何？

(3) $\overline{AC}$ 與 $\overline{BD}$ 是否等長？為什麼？

由 探索活動 可知，等腰梯形的兩條對角線等長。

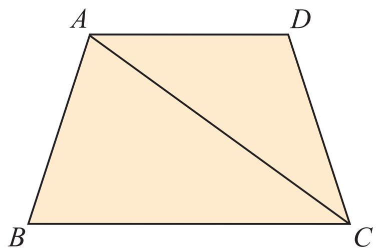
解答：7。（圖形的邊數）

第4章

等腰梯形的性質

1.兩組底角分別相等。　　2.兩條對角線等長

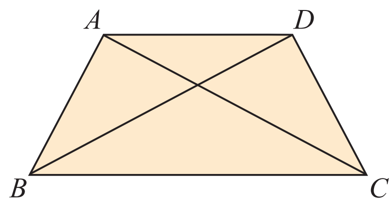
隨堂練習



1.如圖，等腰梯形 $ABCD$ 中，$\overline{AD} /\!/ \overline{BC}$，$\angle B=72^\circ$，$\angle ACD=36^\circ$，且 $\overline{AB}=5$，求：

(1) $\angle ACB$。

(2) $\overline{AD}$ 的長。

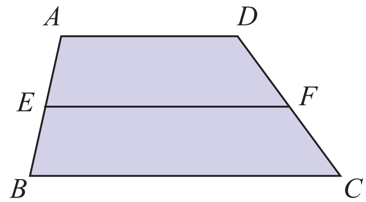


2.如圖，等腰梯形 $ABCD$ 中，$\overline{AD} /\!/ \overline{BC}$，$\angle BAC=90^\circ$，且 $\overline{AB}=\overline{CD}=8$，$\overline{BC}=17$，求 $\overline{BD}$ 的長。

探索活動 梯形兩腰中點連線段性質

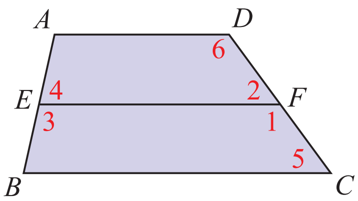
可搭配附件 11

如右圖，梯形 $ABCD$ 中，$\overline{AD}\,/\!/\,\overline{BC}$，且 E、F 分別為兩腰 $\overline{AB}$、$\overline{DC}$ 的中點。



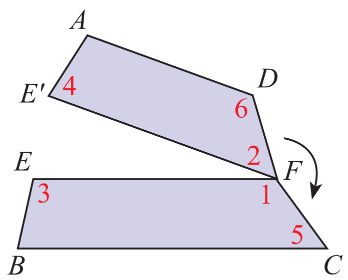
操作

圖一



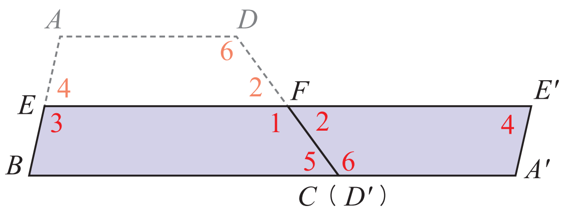
將內角分別標上 1 至 6 的編號。

圖二



沿 $\overline{EF}$ 剪開，並以 F 點為旋轉中心，將四邊形 $AE'FD$ 依順時針方向旋轉。

圖三



直到 $\overline{DF}$ 與 $\overline{FC}$ 疊合。

(1)如圖一，為什麼 $\angle 5+\angle 6=180^\circ$？

(2)如圖三，回答下列問題：

①E、F、E' 三點是否在同一條直線上？

②B、C、A' 三點是否在同一條直線上？

③$\overline{BE}$ 與 $\overline{E'A'}$ 是否平行？

④$\overline{BE}$ 與 $\overline{E'A'}$ 是否等長？

由 探索活動 可知，四邊形 $BEE'A'$ 是平行四邊形（一組對邊平行且等長），所以 $\overline{EF}\,/\!/\,\overline{BC}$，且 $\overline{EF}=\dfrac{1}{2}\overline{EE'}=\dfrac{1}{2}\overline{BA'}=\dfrac{1}{2}(\overline{AD}+\overline{BC})$。

梯形兩腰中點連線段的性質

1. 梯形兩腰中點的連線段會與上、下底平行。
2. 梯形兩腰中點連線段的長$=\dfrac{(上底+下底)}{2}$。

利用梯形兩腰中點連線段的長也可求得梯形面積：

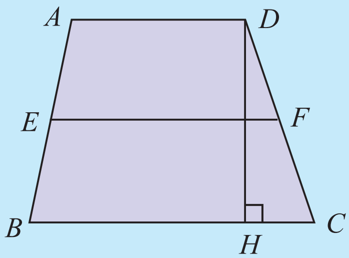
$$梯形面積=\frac{(上底+下底)\times 高}{2}=\frac{(上底+下底)}{2}\times 高$$
$$=梯形兩腰中點連線段的長\times 高$$

例 7 梯形兩腰中點的連線段

自評 P212 第 5、6 題

如圖，梯形 $ABCD$ 中，$\overline{AD}\,//\,\overline{BC}$，$\overline{EF}$ 為梯形兩腰中點的連線段，$\overline{DH}\perp\overline{BC}$，且 $\overline{AD}=6$，$\overline{EF}=8$，$\overline{DH}=7$。求：

(1)梯形 $ABCD$ 的面積。　(2)$\overline{BC}$ 的長。



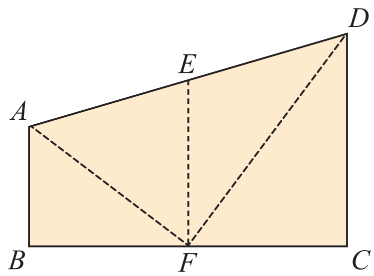
解 (1)梯形面積＝梯形兩腰中點連線段的長×高$=\overline{EF}\times\overline{DH}=8\times 7=56$。

(2)$\because$（上底＋下底）＝2×梯形兩腰中點連線段的長，

$\therefore 6+\overline{BC}=2\times 8$，$\overline{BC}=16-6=10$。

隨堂練習

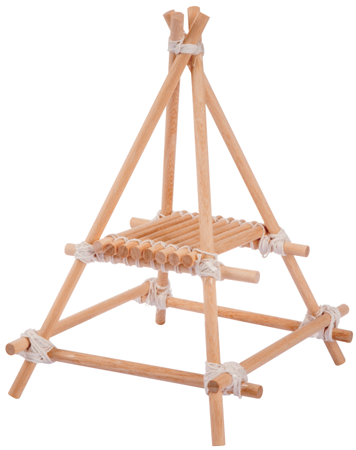
如圖，梯形 $ABCD$ 中，$\overline{AB}\,//\,\overline{CD}$，$\overline{AB}\perp\overline{BC}$，$\overline{EF}$ 為梯形兩腰中點的連線段，如果 $\overline{AB}=18$，$\overline{CD}=32$，$\overline{BC}=48$，求 $\overline{AF}+\overline{EF}+\overline{DF}$。

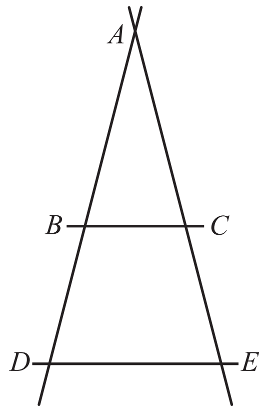


童軍工程 綜合

當我們在野外進行童軍活動時，常需要運用雙手與智慧，配合實際環境就地取材，搭建像瞭望台、便橋或四角餐桌等工程建設，這樣的活動我們稱為「斥堠工程」(*Pioneering*，直譯為「先鋒活動」)，世界童軍運動創始人貝登堡(*Robert Stephenson Smyth Baden-Powell*，1857-1941)在其所著《童子警探》(*Scouting for Boys*)一書就有提及此項活動。

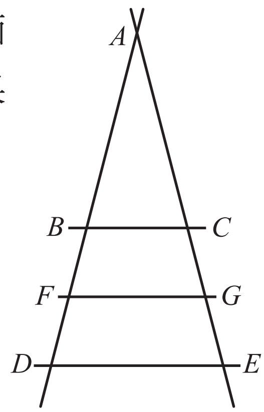
以四腳餐桌為例，其側面是由兩根等長的長竹竿及另外兩根較短的竹竿所組成，組成圖形如下。其中，$\overline{AB}=\overline{AC}$，$\overline{BD}=\overline{CE}$，四邊形 $BCED$ 為等腰梯形。





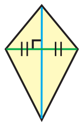
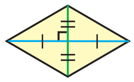
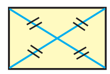
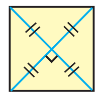
隨堂練習

在上文提及的四腳餐桌側面中，再拿一根短竹竿綁在這個側面上，使得 F、G 兩點分別為 $\overline{BD}$ 及 $\overline{CE}$ 的中點，如右圖。如果 $\overline{FG}=120$ 公分，$\overline{DE}=150$ 公分，求 $\overline{BC}+\overline{DE}+\overline{FG}$ 為多少公分？



重點回顧

❶特殊四邊形的性質

		箏形（鳶形）	菱形	長方形（矩形）	正方形
圖形					
對角線	互相平分		✓	✓	✓
	互相垂直	✓	✓		✓
	等長			✓	✓

❷對角線垂直的四邊形面積

箏形、菱形與正方形的面積皆等於兩條對角線長乘積的二分之一。

例 菱形 $ABCD$ 中，若對角線 $\overline{AC}=6$，$\overline{BD}=12$，

則菱形 $ABCD$ 的面積$=\dfrac{6\times 12}{2}=36$。

❸等腰梯形的性質

(1)若梯形的兩腰等長，稱此梯形為等腰梯形。

(2)等腰梯形的性質：①兩組底角分別相等　②兩條對角線等長。

❹梯形的性質

(1)梯形兩腰中點的連線段會與上、下底平行。

(2)梯形兩腰中點連線段的長$=\dfrac{(上底+下底)}{2}$。

(3)梯形面積$=\dfrac{(上底+下底)\times 高}{2}=\dfrac{(上底+下底)}{2}\times 高$

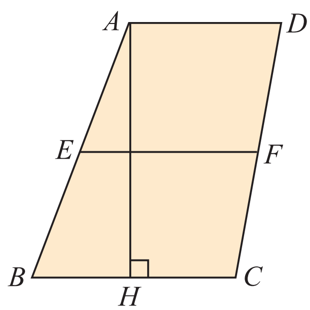
$=$梯形兩腰中點連線段的長$\times$高

例 如圖，梯形 $ABCD$ 中，$\overline{AD}\,/\!/\,\overline{BC}$，

$\overline{EF}$ 為梯形兩腰中點連線段，$\overline{AH}\perp\overline{BC}$，

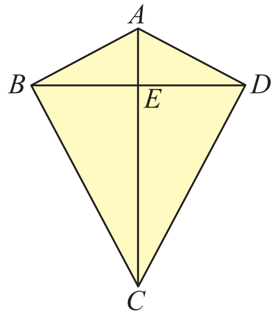
且 $\overline{AD}=6$，$\overline{BC}=8$，$\overline{AH}=10$，則 $\overline{EF}=\dfrac{6+8}{2}=7$，

梯形 $ABCD$ 的面積 $=7\times 10=70$。

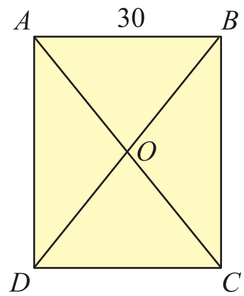


4-3自我評量

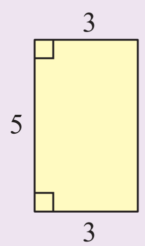
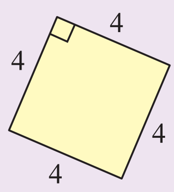
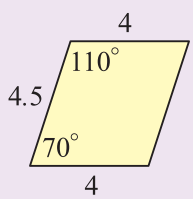
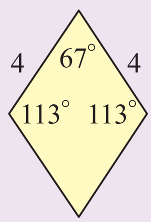
① 如圖，箏形 $ABCD$ 中，$\overline{AB}=\overline{AD}=8$，$\overline{BC}=\overline{CD}=15$，$\angle ABC=\angle ADC=90^\circ$，求 $\overline{AC}$ 及 $\overline{BD}$。 課 P198 隨堂



② 宇荃設計一個主體為四邊形 $ABCD$ 的風箏，他找了兩根長度皆為 50 公分的側桿作為風箏的對角線。如果 O 為兩根側桿的交點，$\overline{OA}=\overline{OB}=25$ 公分，$\overline{AB}=30$ 公分，求此風箏四邊形 $ABCD$ 的面積。 課 P200 隨堂

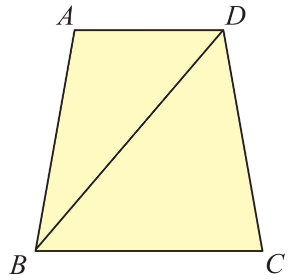


③ 在下面的四邊形中，根據所給定的邊角數據，判別它們的兩條對角線具有哪些性質。（將該圖形具有的性質在下表的欄位中打「✓」） 課 198～202 例 1～5

				
互相平分				
等長				
互相垂直				

④ 等腰梯形 $ABCD$ 中，$\overline{AD} // \overline{BC}$，若 $\angle A=100^\circ$，$\angle ABD=30^\circ$，$\overline{AB}=15$，求：(1) $\angle BDC$ (2) $\overline{BC}$ 的長。

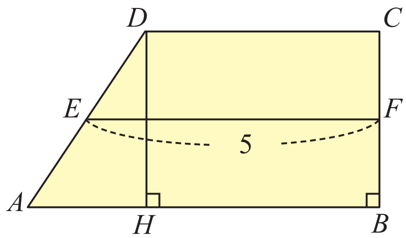
課 P204 例 6



⑤ 如圖，梯形 $ABCD$ 中，$\overline{AB} // \overline{CD}$，兩腰中點連線段的長 $\overline{EF}=5$，$\angle B=90^\circ$，$\overline{DH} \perp \overline{AB}$ 於 H 點，$\overline{AH}=2$，求：

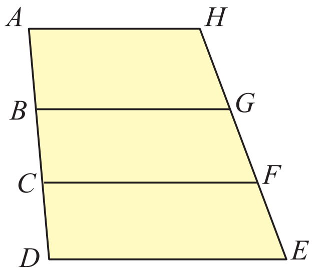
(1) $\overline{CD}$ 的長。 (2) 若 $\overline{BC}=3$，求梯形 $ABCD$ 的面積。

課 P208 例 7



⑥ 如圖，$\overline{BG}$ 為梯形 $ACFH$ 兩腰中點連線段的長，$\overline{CF}$ 為梯形 $BDEG$ 兩腰中點連線段的長，且 $\overline{AH}=16$，$\overline{CF}=20$，求 $\overline{BG}$ 與 $\overline{DE}$ 的長。

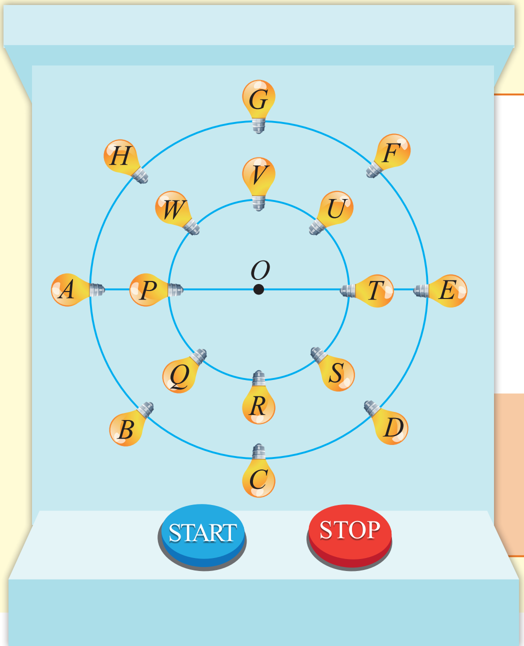
課 P208 例 7



自我挑戰

本單元為統整課程，由學生自行挑戰，教師視班級情況決定如何運用。

大新在夜市擺攤，設計一個新的遊戲機，如圖，外圍 8 個燈泡平均分布在大圓上，內圈 8 個燈泡也平均分布在小圓上。



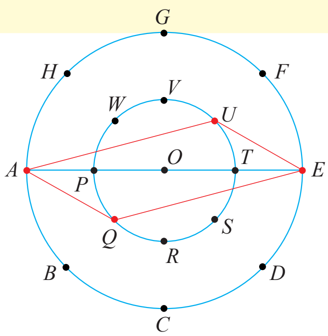
遊戲規則

❶按 START 後，各燈號的燈泡開始閃爍；按 STOP 後，依序有 4 個燈泡不閃爍保持亮著，而其它燈泡熄滅。

❷亮著的 4 個燈號形成的四邊形，可換取對應之✪數，每次以最多✪數圖形計算兌換獎品！

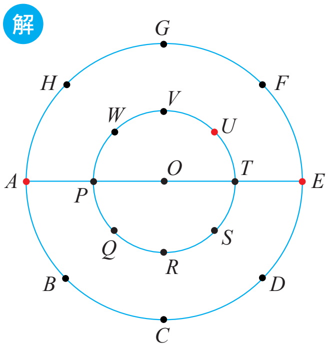
正方形	✪×6	箏形	✪×3
菱形	✪×5	梯形	✪×2
長方形	✪×4	平行四邊形	✪×1

範例 如果亮著的 4 個燈號形成四邊形 $AQEU$，如右圖，則獲得✪×1。



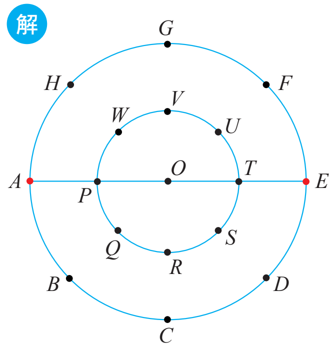
(1) 如果其中亮起的 3 個燈號為 A、E、U 三點，則第 4 個亮著的燈號為哪一點時，獲得的✪數最多？

解



(2) 如果獲得✪×4，其中亮起的 2 個燈號為 A、E 兩點，則另外 2 個亮著的燈號可能為何？

解



解答P216

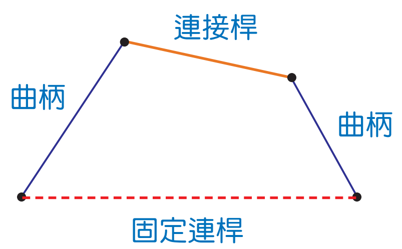
數學萬花筒 可搭配附件 12

飛天魔毯－平行四邊形的應用

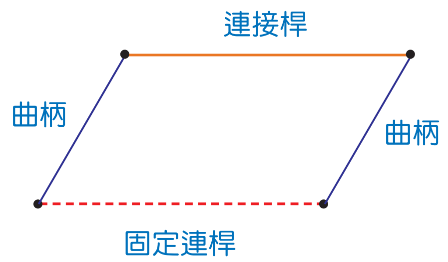
生活中有很多能進行特定動作的機器裝置，它們是由不會變形的剛體構件，透過樞軸連接組成，這些剛體構件不論形狀皆統稱為連桿。由連桿構成，能夠進行運動的機器裝置就稱為連桿機構。

最常見的連桿機構是由一個不動的固定連桿、兩個曲柄及一個連接桿所組成的四連桿機構，如圖一。

遊樂園中的飛毯就是一個四連桿機構，其中兩個曲柄等長，固定連桿與連結桿也等長，在本章我們學過兩組對邊分別等長的四邊形為平行四邊形，因此飛毯這個四連桿機構的四個樞軸就形成平行四邊形的四個頂點，如圖二。

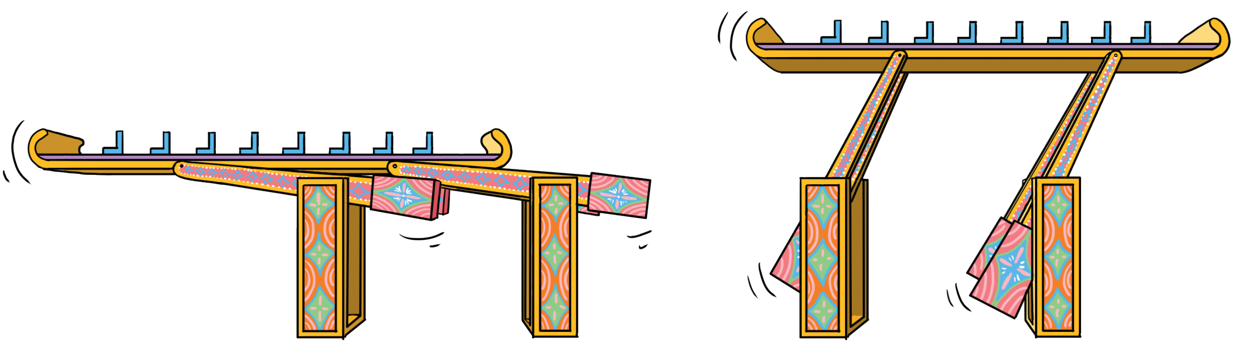


圖一　四連桿機構



圖二　形成平行四邊形的四連桿機構

由於飛毯這個四連桿機構的底部固定連桿原本就保持著水平的狀態，所以飛毯本身在迴旋舉昇的過程中也總能隨時保持著水平狀態。



自我挑戰解答

第 1 章 P46

(1)因為所有水管同時放水，水池由乾至滿需 13 小時，

有 n 個水管，每個水管每小時可放水 x 公升，則滿池為 $13nx$ 公升

答：$13nx$ 公升。

(2)設第 1 個水管放水 a_1 小時，第 2 個水管放水 a_2 小時，……，第 n 個水管放水 a_n 小時，$a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$ 形成等差數列（每隔相等時間關閉），且 $a_n=12a_1$。

$(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n)\cdot x=13nx$，

$\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}\cdot x=13nx$，$\dfrac{(a_1+12a_1)}{2}=13$，$a_1=2$

$a_n=12a_1=12\times2=24$

答：第一個關閉的水管放水 2 小時，最後一個關閉的水管放水 24 小時。

(3)$a_n=a_1+(n-1)d$，因為 $a_1=2$，$a_n=12a_1=12\times2=24$，

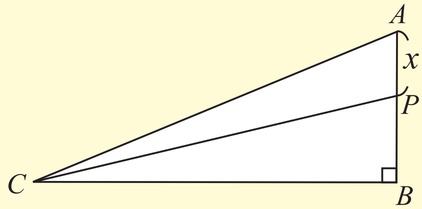
故 $(n-1)\cdot d=a_n-a_1=22$

因為 n、d 是整數，所以 d 可能是 1，2，11，22

因為 d 是大於 1 且小於 5 的整數，所以 $d=2$，則 $n=12$。

答：當 $d=2$ 時，$n=12$。

第 2 章 P78



(1)①由題意可知：

$\triangle ACP=\dfrac{1}{2}\times\overline{AP}\times\overline{BC}$，所以 $y=\dfrac{1}{2}\times x\times12=6x$

②將 $x=2$ 代入 $y=6x$ 得 $y=6\times2=12$

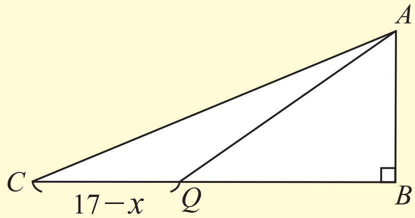
答：①$y=6x$，②12。

(2)①由題意可知：

$\overline{CQ}=5+12-x=17-x$

所以 $\triangle ACQ=\dfrac{1}{2}\times\overline{CQ}\times\overline{AB}$

即 $y=\dfrac{1}{2}\times(17-x)\times 5=-\dfrac{5}{2}x+\dfrac{85}{2}$



②將 $x=11$ 代入 $y=-\dfrac{5}{2}x+\dfrac{85}{2}$ 得

$y=-\dfrac{5}{2}\times 11+\dfrac{85}{2}=15$

答：① $y=-\dfrac{5}{2}x+\dfrac{85}{2}$，② 15。

第 3 章 P162

(1)在 $\triangle AED$ 與 $\triangle CGD$ 中，$\because \overline{AD}=\overline{CD}$，$\overline{DE}=\overline{DG}$，$\angle ADE=\angle CDG=90^\circ$，

（四邊形 $ABCD$、四邊形 $DEFG$ 都是正方形）

$\therefore \triangle AED\cong\triangle CGD$（$SAS$ 全等性質）

(2)在 $\triangle AED$ 與 $\triangle CGD$ 中，$\because \overline{AD}=\overline{CD}$，$\overline{DE}=\overline{DG}$，$\angle ADE=90^\circ-\angle CDE=\angle CDG$，

（四邊形 $ABCD$、四邊形 $DEFG$ 都是正方形）

$\therefore \triangle AED\cong\triangle CGD$（$SAS$ 全等性質）

(3) $\because \triangle AED\cong\triangle CGD$（由 (2) 得知），$\therefore \angle DCG=\angle DAE=60^\circ$（對應角相等），

故 $\angle CDG+\angle DGC=180^\circ-60^\circ=120^\circ$ …… ①

又 $\angle FGD$ 為正方形的內角，$\therefore \angle CGF+\angle DGC=90^\circ$ …… ②

由①式－②式可得 $\angle CDG-\angle CGF=120^\circ-90^\circ=30^\circ$，

即 $\angle CDG$ 與 $\angle CGF$ 相差 30°。

答：30°。

第 4 章 P213

(1)由圖可知，第 4 個燈號為 S 時，圖形為箏形，可獲得的★數最多。

答：S。

(2)獲得 4★，表示為長方形，由圖可知，另 2 個燈號可能為 B、F 或 H、D。

答：B、F 或 H、D。