給同學的話

數學能解決日常生活中有關數、量、形的問題，因此才被列入中學的重要課程。

數學的學習至少包括兩個重點，一是基本概念的建立，一是計算程序的熟練，二者缺一不可。如果同學只是記住計算程序，並且反覆練習，在小範圍的考試時可能有效。但到高中之後，教材內容加深、加廣，變得抽象而複雜時，就學不下去了。

主動學習、專注聽講、適時演算、樂於思考解題，是學習數學的不二法門。能做到這幾點，相信您一定可以學好數學。

人物介紹

博士

數學狂熱者，擅長將數學套入各種生活情境中。

傑克

幽默風趣愛搞笑，喜歡出風頭。

威利

個性憨厚，但其實是電玩高手，號稱電玩狂人。

安琪

個子嬌小天真爛漫，有點小迷糊，愛問問題，心中永遠有十萬個為什麼？

妙麗

數學一級棒，說起話來很犀利，是博士的得力小助手。

洛基

喜歡吃美食，但又愛漂亮，藉由運動維持好身材。

艾美

外表是氣質美少女，但是愛耍冷，喜歡各種藝術類活動。

國民中學

數學 第六冊

目次

Contents

3下

課中標示說明

學習前哨站

診斷學生是否已建立先備知識。

學習主題

根據該節主題切割成若干教學活動，以利同學形成階段性的數學觀念，並穩固學習的內涵。

議題

在課程內容中融入各項議題，培養學生批判思考及解決問題的能力。

例1 教學例題

與課文相關的基本題目，以實例產生呼應或作為對照說明。附有詳解，並於題號旁標示其題目類型。

探索活動

透過步驟化的學習，加強同學的思考邏輯能力，並能觀察出數學的原理原則。

跨領域

數學的應用是跨領域的，結合其他科目的學習，幫助學生統整所學。

補給站

提供與前面內容所提到的數學相關之延伸或生活常識補充，作為同學延伸思考及課外參考資料。

Thinking 動動腦

將特別值得同學思索及探討的問題，用另一個段落來呈現，以便和課文與例題有所區隔。

計算機

搭配計算機的使用教學，培養學生使用計算機的正確態度。看到計算機圖示，代表可使用計算機協助計算。

課後標示說明

隨堂練習

通常於例題之後，安排相同類型的練習題目，以增加同學自我演算練習的機會。不附解答。

補充說明

於學習內容或例題中，針對較為困難或易產生錯誤的地方，作為提示或提醒學生注意。

重點摘要

於一段概念學習之後，將其重點條列化整理，讓同學能更容易掌握學習重點。

重點回顧

將該節中重要的學習內容，作條列化的統整，方便同學作有系統的複習。

自我評量

每一節後面均安排相關的複習題目，以利於該節結束時，可以加強演練。

自我挑戰

本單元為統整課程，由學生自行挑戰，教師視班級情況決定如何運用。

數學萬花筒

提供與該章節相關的補充知識等，作為課外的參考資料。

附件標示說明

秒懂數學

當冊知識重點自我檢測，掌握國中所學數學概念。

教學附件

配合課本教學內容，透過附件實際操作，動手也動腦，加深學習成效。

資訊普拉斯

提供相關的資訊教學補充，培養學生正確使用工具的素養。

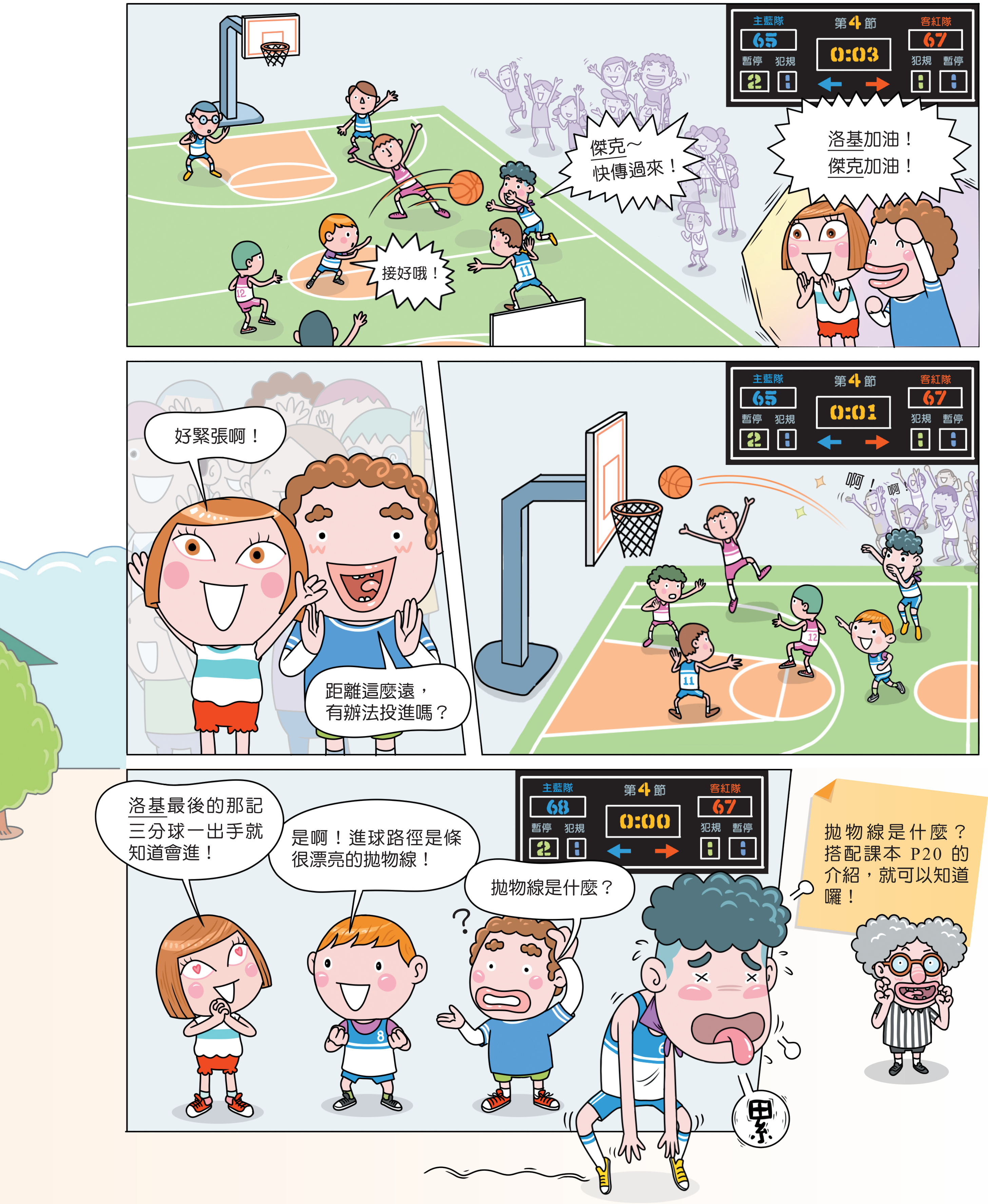
1 二次函數

1-1 簡易二次函數圖形

1. 認識二次函數
2. $y=ax^2$ 的圖形

1-2 二次函數圖形與最大值、最小值

1. $y=ax^2+k$ 的圖形
2. $y=a(x-h)^2$ 的圖形
3. $y=a(x-h)^2+k$ 的圖形
4. 二次函數的最大值或最小值


主藍隊 65 第4節 客紅隊 67
0:03
暫停 犯規 犯規 暫停
傑克～快傳過來！
洛基加油！傑克加油！
接好哦！
好緊張啊！
距離這麼遠，有辦法投進嗎？
主藍隊 65 第4節 客紅隊 67
0:01
啊！啊！
洛基最後的那記三分球一出手就知道會進！
是啊！進球路徑是條很漂亮的拋物線！
主藍隊 68 第4節 客紅隊 67
0:00
拋物線是什麼？
?
累
拋物線是什麼？搭配課本 P20 的介紹，就可以知道囉！

學習前哨站

本單元為學生自我複習，
教師可視班級情況決定如何運用。

回顧 1 函數值

8 下第 2 章

一次函數 $y=-4x+3$，在 $x=0$ 時的函數值 $y=-4\times0+3=3$；
在 $x=1$ 時的函數值 $y=-4\times1+3=-1$。

課前練習

已知一次函數 $y=3x-2$，完成下列 x 對應的函數值。

(1)在 $x=0$ 時的函數值 $y=$＿＿＿＿＿。　(2)在 $x=1$ 時的函數值 $y=$＿＿＿＿＿。

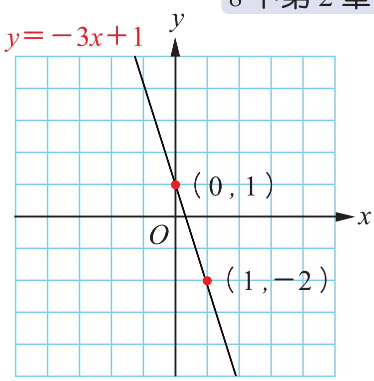
回顧 2 一次函數的圖形

8 下第 2 章

已知一次函數 $y=-3x+1$，要畫出此函數的圖形時，
先找出兩組對應的 x、y 值：

x	0	1
y	1	-2

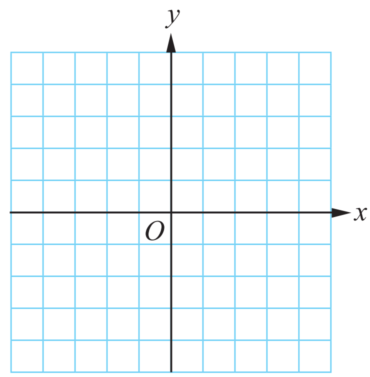
再將 $(0,1)$、$(1,-2)$ 標示在坐標平面上，並畫出通過此兩點的直線，如圖。

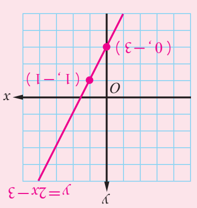


課前練習

在坐標平面上，畫出一次函數 $y=2x-3$ 的圖形。

x	0	1
y		





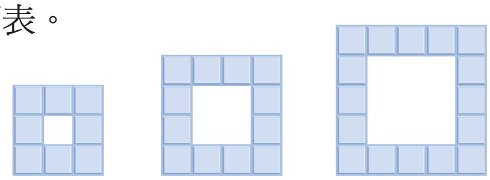
解答：1. (1) -2　(2) 1　2. -3，-1

1-1 簡易二次函數圖形

1 認識二次函數 可搭配附件 2～11

艾美將兩種大小相同的正方形瓷磚拼成正方形，如下圖。

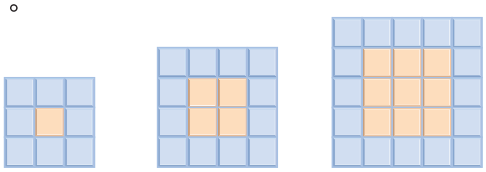
1 她圍出許多空心正方形，並將每個空心正方形的每邊瓷磚個數（x）與藍色瓷磚總個數（y）的關係整理成下表。



每邊瓷磚個數（x 個）	3	4	5	…	x
藍色瓷磚總個數（y 個）	8	12	16	…	$4x-4$

由每邊瓷磚個數 x，與其對應的藍色瓷磚總個數 y，可得 x、y 的關係式為 $y=4x-4$。由此可知，當給定一個自變數 x 的值，恰好可得到一個對應的 y 值，故 y 是 x 的函數。

2 她又圍出許多實心正方形，並將每個實心正方形的每邊瓷磚個數（x）與瓷磚總個數（y）的關係整理成下表。

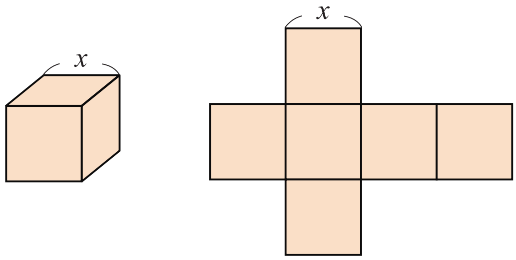


每邊瓷磚個數（x 個）	3	4	5	…	x
瓷磚總個數（y 個）	9	16	25	…	x^2

由每邊瓷磚個數 x，與其對應的瓷磚總個數 y，可得 x、y 的關係式為 $y=x^2$。由此可知，當給定一個自變數 x 的值，恰好可得到一個對應的 y 值，故 y 是 x 的函數。

隨堂練習

下圖是正方體與其展開圖，如果此正方體的邊長為 x，表面積為 y，回答下列問題：



(1) x、y 的關係式為 $y=$__________。

(2) 當給定一個邊長為 x 的值，是否恰好可以得到一個對應的表面積 y 值？

□是　□否

(3) y 是否為 x 的函數？ □是　□否

我們學過 $y=ax+b\,(a\neq 0)$，其中 x 的最高次數為 1，稱為一次函數；而形如 $y=ax^2+bx+c\,(a\neq 0)$，由於 x 的最高次數為 2，所以稱為**二次函數**，例如：$y=x^2$、$y=6x^2+3x$ 都是二次函數。

隨堂練習

判別下列哪些是常數函數？哪些是一次函數？哪些是二次函數？

(1) $y=2-x$　　(2) $y=3$

(3) $y=-3x-2x^2+1$　　(4) $y=x(x+1)$

(5) $y=-6x$

常數函數：__________

一次函數：__________

二次函數：__________

我們學過線型函數的函數值，例如：函數 $y=4x-3$，當 $x=2$ 時，其函數值為 $y=4\times2-3=5$。在二次函數中，要求 $x=a$ 時所對應的函數值，其概念也和線型函數相同，將 x 以 a 代入，即可得到所對應的值。

例1 函數值

自評 P23 第 1 題

已知函數 $y=x^2+3x+2$，分別求 $x=0$、$x=-2$ 與 $x=2$ 時所對應的函數值。

解 (1)將 $x=0$ 代入 $y=x^2+3x+2$，

得 $y=0^2+3\times0+2$
$=0+0+2$
$=2$

(2)將 $x=-2$ 代入 $y=x^2+3x+2$，

得 $y=(-2)^2+3\times(-2)+2$
$=4-6+2$
$=0$

(3)將 $x=2$ 代入 $y=x^2+3x+2$，

得 $y=2^2+3\times2+2$
$=4+6+2$
$=12$

隨堂練習

已知函數 $y=-3x^2+2$，分別求 $x=0$、$x=-1$ 與 $x=1$ 時所對應的函數值。

2 $y=ax^2$ 的圖形

八年級曾學過用描點的方式畫一次函數的圖形，發現其圖形為一條直線，同樣地，我們也將利用描點的方式探討二次函數的圖形。首先討論二次函數 $y=x^2$ 的情形，並以此作為探討的起點。

$y=x^2$ 的圖形

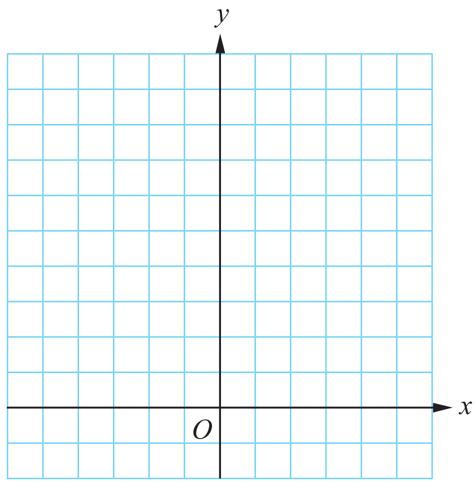
探索活動 描繪 $y=x^2$ 的點

1. (1)在下表中求出 $y=x^2$ 各 x 值所對應的 y 值。

x	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	…
y	…								…

(2)將上表中數對 (x, y) 所對應的點，描到右圖的坐標平面上。

(3)附件 2 中的圖形是滿足 $y=x^2$ 的數對 (x, y) 所對應的點，將其疊合到右圖上。



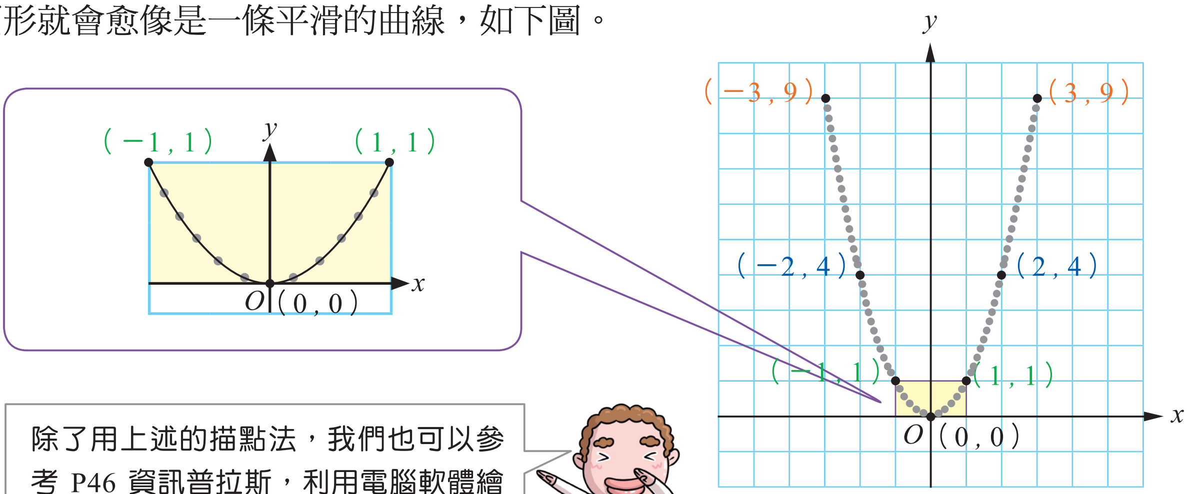
2. (1)下表是 $x=-1$ 到 $x=1$ 之間更多滿足 $y=x^2$ 的數對，求出各 x 值所對應的 y 值。

x	-0.8	-0.6	-0.4	-0.2	0.2	0.4	0.6	0.8
y								

(2)附件 3 中的圖形是上表中滿足 $y=x^2$ 的數對 (x, y) 所對應的點，將其繼續疊合到附件 2 上。

3. 附件 4 中的圖形是更多滿足 $y=x^2$ 的另外一些數對 (x, y) 所對應的點，將其繼續疊合到附件 3 上。

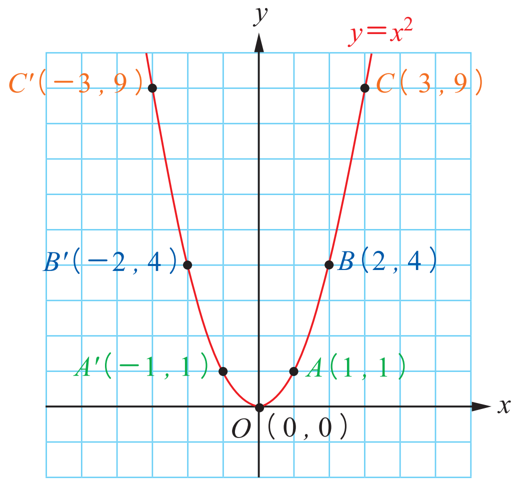
在 探索活動 中，當我們取的數對(x , y)愈多，描在坐標平面上的點就愈密，其圖形就會愈像是一條平滑的曲線，如下圖。



除了用上述的描點法，我們也可以參考 P46 資訊普拉斯，利用電腦軟體繪製二次函數的圖形。

事實上，二次函數的圖形就是一條平滑曲線。因此，畫二次函數圖形時，只要先描繪幾個點後，再將各點由左至右用平滑曲線連接起來即可。

右圖中的平滑曲線是二次函數 $y=x^2$ 的圖形。拿出附件 5，沿著 y 軸對摺，發現 y 軸兩側的圖形會疊合。因此，它是一個以 y 軸為對稱軸的線對稱圖形，其中 A、B、C 點的對稱點分別為 A'、B'、C' 點。



Thinking

觀察上圖中二次函數 $y=x^2$ 的圖形，回答下列問題：

(1) 圖形上兩對稱點 A、A' 的 y 坐標分別為何？

(2) 圖形上 B、C 兩點的 y 坐標，是否與其對稱點 B'、C' 的 y 坐標相同？

(3) 若 D 點與 D' 點為 $y=x^2$ 的圖形上的相異兩點，且它們的 y 坐標相同，則 D 點與 D' 點是否為對稱點？

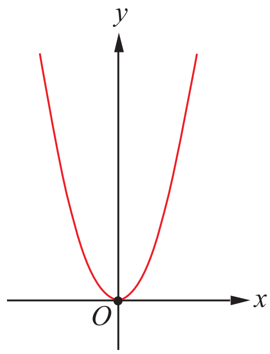
由前頁可發現 $y=x^2$ 的圖形具有下列特性：

(1)它是線對稱圖形，其**對稱軸方程式為 $x=0$（即 y 軸）**。

(2)$(0, 0)$為圖形的**最低點**。

(3)此圖形的**開口向上**，圖形從最低點往兩邊**向上延伸**。

因此，當 $|x|$ 越大時，所對應的函數值（y 值）也越大。



接下來將改變 x^2 項的係數，探討形如 $y=ax^2$ 的二次函數圖形，觀察當 a 值由 1 改變為 -1 時，$y=ax^2$ 的圖形會有什麼樣的變化？

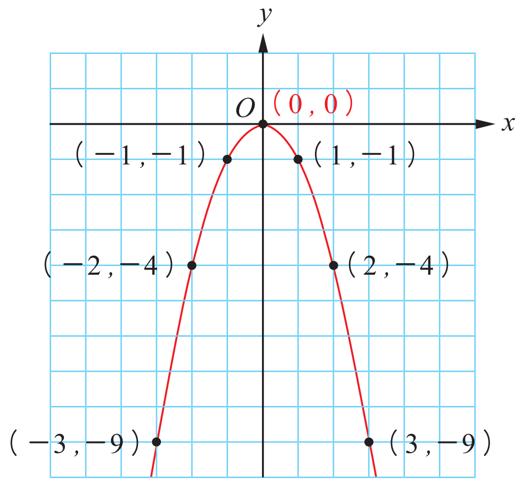
例2 $y=-x^2$ 的繪圖

在坐標平面上描繪二次函數 $y=-x^2$ 的圖形。

解 將 x 值和所對應的 y 值列表如下：

x	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	…
y	…	-9	-4	-1	0	-1	-4	-9	…

描點並仿照 $y=x^2$ 的圖形畫法，以平滑的曲線將這些點由左至右依序連接起來，如右圖。



由 例2 可發現 $y=-x^2$ 的圖形有下列特性：

(1)它是線對稱圖形，其**對稱軸方程式為 $x=0$（即 y 軸）**。

(2)$(0, 0)$為圖形的**最高點**。

(3)此圖形的**開口向下**，圖形從最高點往兩邊**向下延伸**。

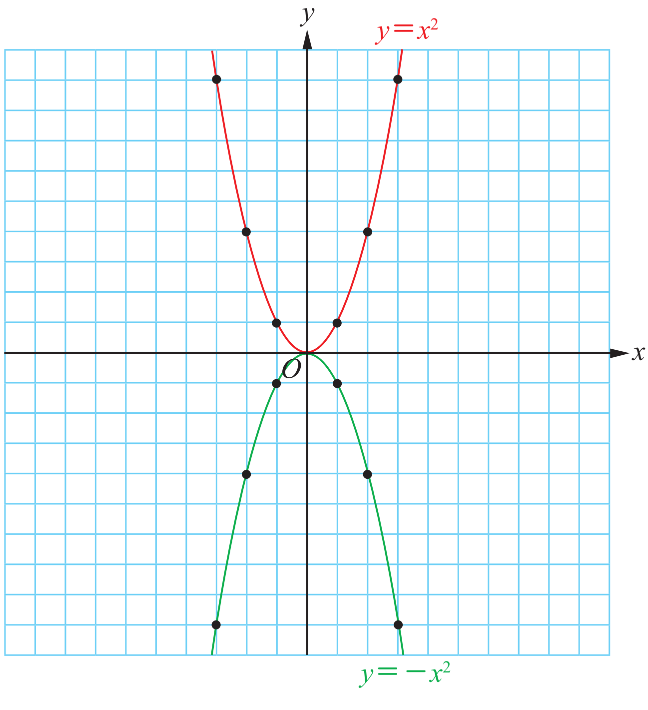
因此，當 $|x|$ 越大時，所對應的函數值（y 值）會越小。

探索活動 二次函數圖形的上下翻轉

1. 在下表中求出 $y=x^2$ 與 $y=-x^2$ 各 x 值所對應的 y 值。

x 值	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	…
$y=x^2$ 的 y 值	…								…
$y=-x^2$ 的 y 值	…								…

2. 附件 6 分別是 $y=x^2$ 和 $y=-x^2$ 的圖形。若將附件 6 中 $y=-x^2$ 的圖形以 x 軸為摺線往上摺疊，則 $y=-x^2$ 和 $y=x^2$ 的圖形是否可以完全疊合？



由 探索活動 可知，$y=x^2$ 和 $y=-x^2$ 的圖形對稱於 x 軸。

接著繼續改變 x^2 項的係數，探討形如 $y=ax^2$ 的二次函數圖形，觀察當 a 值不是 1 或 -1 時，$y=ax^2$ 圖形的變化情形。

例3 $y=ax^2$ 的繪圖

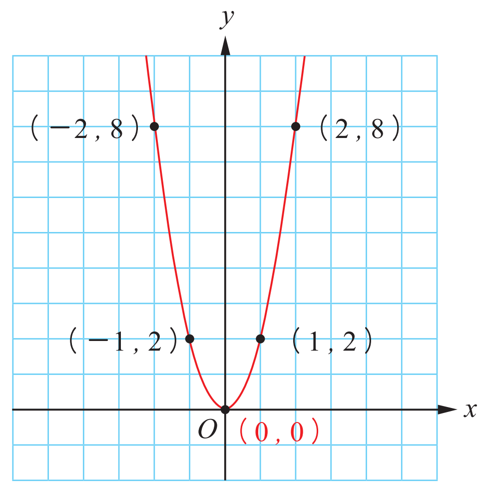
自評 P23、24 第 2、3 題

在坐標平面上描繪下列二次函數的圖形，並求此圖形的開口方向、最低或最高點坐標及對稱軸方程式：

(1) $y=2x^2$ (2) $y=-2x^2$

解 (1)將 x 值和所對應的 y 值列表如下：

x	…	-2	-1	0	1	2	…
y	…	8	2	0	2	8	…



描點並以平滑的曲線將這些點由左至右依序連接起來，如右圖。

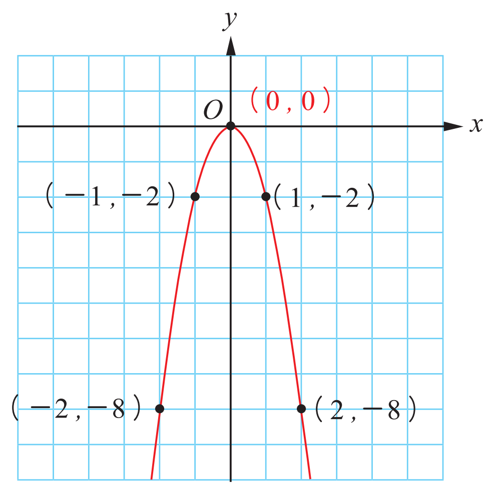
開口方向：向上。

最低點坐標：$(0, 0)$。

對稱軸方程式：$x=0$（即 y 軸）。

(2)將 x 值和所對應的 y 值列表如下：

x	…	-2	-1	0	1	2	…
y	…	-8	-2	0	-2	-8	…



描點並以平滑的曲線將這些點由左至右依序連接起來，如右圖。

開口方向：向下。

最高點坐標：$(0, 0)$。

對稱軸方程式：$x=0$（即 y 軸）。

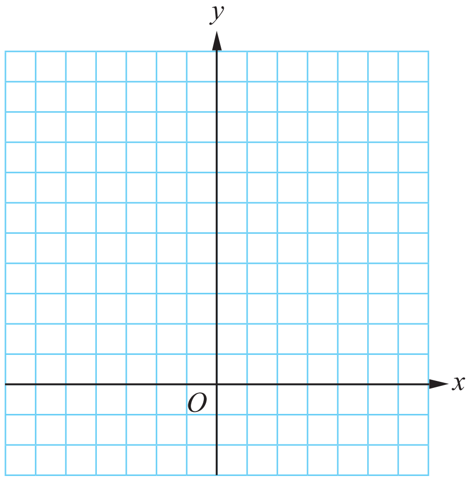
隨堂練習

自評 P23 第 2 題

在坐標平面上描繪下列二次函數的圖形，並求此圖形的開口方向、最低或最高點坐標及對稱軸方程式：

(1) $y=\frac{1}{2}x^2$

x	…	-4	-2	0	2	4	…
y	…						…



①開口方向：____________

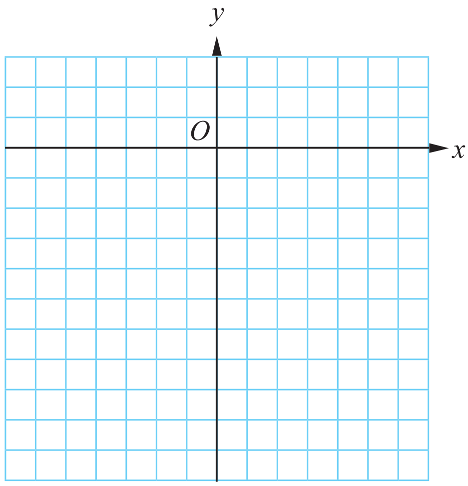
②有最______點（填入高或低），

其坐標為________

③對稱軸方程式：__________

(2) $y=-\frac{1}{2}x^2$

x	…	-4	-2	0	2	4	…
y	…						…



①開口方向：____________

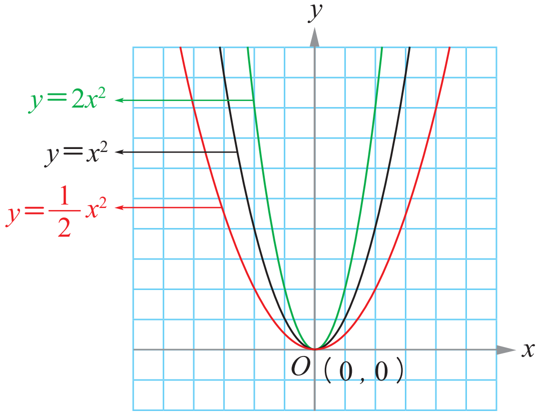
②有最______點（填入高或低），

其坐標為________

③對稱軸方程式：__________

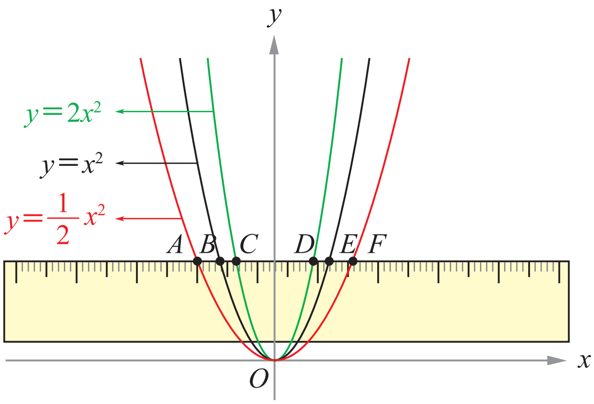
接著我們來探討二次函數圖形開口的大小。

由前面的學習可知，二次函數 $y=x^2$、$y=2x^2$、$y=\frac{1}{2}x^2$ 的圖形都是開口向上，且以(0，0)為最低點。將這些圖形都畫在同一個坐標平面上，它們的對稱軸都是 y 軸，如下圖。

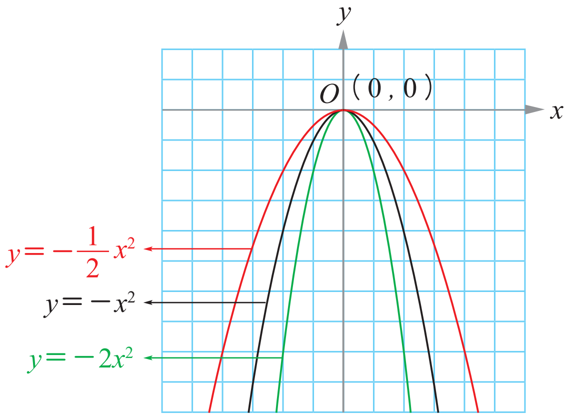


因為這三個二次函數圖形的最低點都相同，且開口方向也相同。此時，我們可以拿出一把直尺，將這把尺平行 x 軸放在圖上，如下圖，這樣就可以比較出它們的開口大小，由圖可以明顯看出 $\overline{AF}>\overline{BE}>\overline{CD}$。

所以 $y=\frac{1}{2}x^2$ 的圖形開口大於 $y=x^2$ 的圖形開口，而 $y=x^2$ 的圖形開口大於 $y=2x^2$ 的圖形開口。

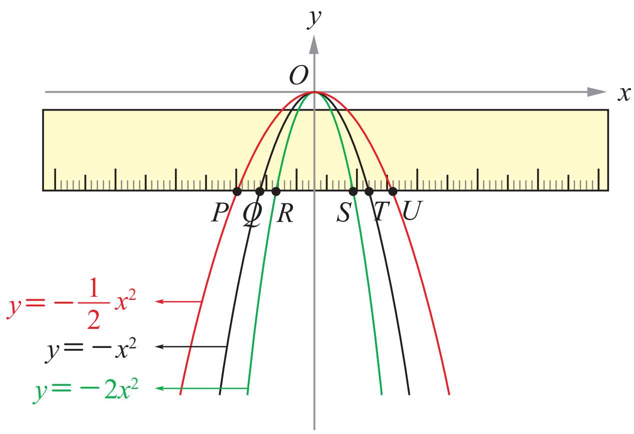


再把二次函數 $y=-x^2$、$y=-2x^2$、$y=-\frac{1}{2}x^2$ 的圖形，也畫在另一個坐標平面上，如下圖。這三個圖形的最高點都是 $(0,0)$，對稱軸都是 y 軸。



因為這三個二次函數圖形的最高點都相同，且開口方向也相同。此時，我們可以拿出一把直尺，將這把尺平行 x 軸放在圖上，如下圖，這樣就可以比較出它們的開口大小，由圖可明顯看出 $\overline{PU}>\overline{QT}>\overline{RS}$。

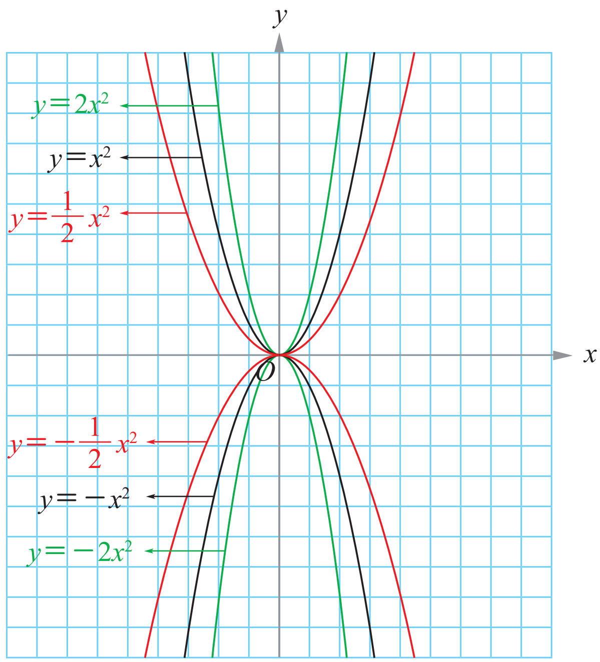
所以 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 的圖形開口大於 $y=-x^2$ 的圖形開口，而 $y=-x^2$ 的圖形開口大於 $y=-2x^2$ 的圖形開口。



在上述的這些二次函數圖形中，不論是圖形的最低點或最高點都稱為**頂點**。事實上，形如 $y=ax^2$ 的二次函數圖形，都是以 $(0,0)$ 為頂點，且通過頂點的鉛垂線就是圖形的對稱軸，對稱軸方程式為 $x=0$（即 y 軸）。

把前面所畫的六個二次函數圖形，都畫在同一個坐標平面上，如右圖。

將附件 7 中 $y=-x^2$、$y=-2x^2$、$y=-\frac{1}{2}x^2$ 的圖形，以 x 軸為摺線往上摺疊，可以發現「$y=2x^2$ 與 $y=-2x^2$」、「$y=x^2$ 與 $y=-x^2$」、「$y=\frac{1}{2}x^2$ 與 $y=-\frac{1}{2}x^2$」分別疊合且開口大小分別相等。



二次函數 $y=ax^2$ 的圖形

形如 $y=ax^2$ 的二次函數圖形，都是以 $(0,0)$ 為頂點，且對稱軸方程式為 $x=0$（即 y 軸），其圖形的特性如下：

(1) 當 $a>0$ 時，圖形的開口向上，頂點是最低點。

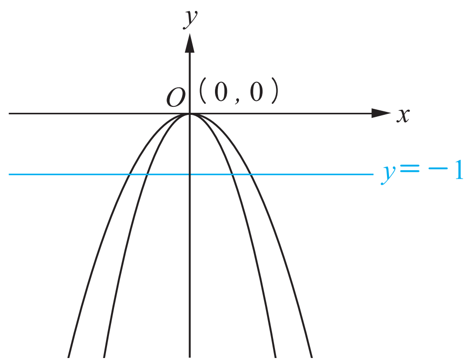
(2) 當 $a<0$ 時，圖形的開口向下，頂點是最高點。

(3) $|a|$ 愈小，其圖形開口愈大。

隨堂練習

自評 P24 第 4 題

右圖是 $y=-x^2$、$y=-3x^2$ 與 $y=-1$ 的圖形，如果 $y=-1$ 與 $y=-x^2$ 的圖形交於 A、B 兩點；$y=-1$ 與 $y=-3x^2$ 的圖形交於 C、D 兩點，比較 $\overline{AB}$ 與 $\overline{CD}$ 長度的大小。



例4 $y=ax^2$ 的圖形比較

自評 P24 第 5 題

寫出下列二次函數圖形的開口方向、頂點坐標及對稱軸方程式，並比較其開口大小：

甲：$y=2x^2$　　乙：$y=-2x^2$　　丙：$y=-\frac{5}{4}x^2$　　丁：$y=\frac{9}{4}x^2$

解 (1) ∵甲、丁兩個函數 x^2 的係數為正數，∴甲、丁的圖形開口向上。

而乙、丙兩個函數 x^2 的係數為負數，∴乙、丙的圖形開口向下。

(2) 各圖形均以 $(0,0)$ 為頂點，且均以方程式 $x=0$（即 y 軸）為對稱軸。

(3) ∵x^2 的係數的絕對值愈小，其圖形開口愈大，

$\left|-\frac{5}{4}\right|<|2|=|-2|<\left|\frac{9}{4}\right|$，

故開口大小為：丙＞甲＝乙＞丁。

第1章

隨堂練習

寫出下列二次函數圖形的開口方向、頂點坐標及對稱軸方程式，並比較其開口大小：

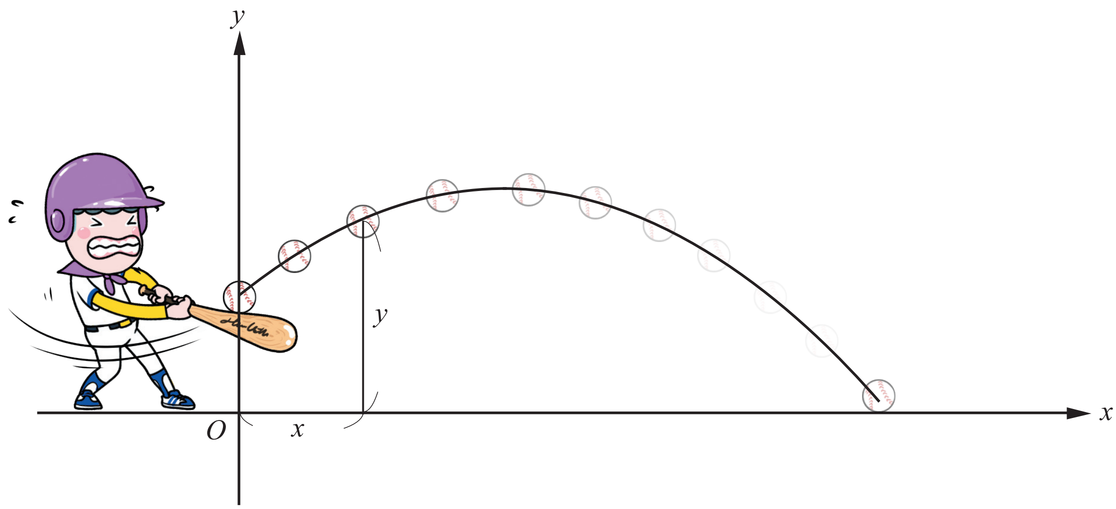
(1)

	開口方向	頂點坐標	對稱軸方程式
甲：$y=-\frac{2}{3}x^2$			
乙：$y=\frac{1}{3}x^2$			
丙：$y=\frac{2}{3}x^2$			
丁：$y=-\frac{4}{3}x^2$			

(2) 開口大小：________________

健體

你看過棒球比賽嗎？某次博士用攝影機把洛基打出的棒球路徑拍下來，並將這顆球的飛行軌跡複製在坐標平面上，如下圖。



當這顆球的水平飛行距離為 x 呎時，球離地面的高度為 y 呎，博士發現 x、y 的關係式為 $y=-\frac{1}{800}x^2+\frac{3}{8}x+\frac{31}{8}$。在這個關係式中，我們可以發現它是一個二次函數，當 $x=0$ 時，$y=\frac{31}{8}$，它表示球被擊出時，擊球點離地面的高度為 $\frac{31}{8}$ 呎。

當我們在投擲物體時，因為受到地心引力的影響，物體所經過的路線會像上圖中球飛行的軌跡一樣，這樣的軌跡稱為**拋物線**。

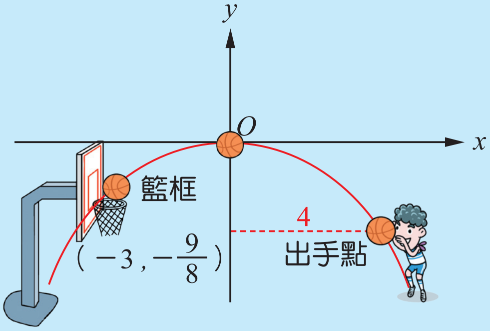
前面學到的二次函數圖形，不論開口向上或向下，它們的圖形都是拋物線，而頂點就是拋物線的最低點或最高點，且對稱軸會通過拋物線的頂點。

補給站 拋物線造型的消防局

在荷蘭中部城市 Houten，有一座很有特色的小型消防局。它從正面看過去，屋頂的輪廓是一條流暢的拋物線。設計者利用二次函數的圖形，設計出這座符合出勤動線流暢度、能從高處觀察及指揮消防車的消防局。

例5 $y=ax^2$ 圖形的應用

已知洛基命中三分球的行經路徑是拋物線的一部分。如果將路徑的最高點設為坐標平面的原點$(0,0)$，籃框的坐標為$\left(-3,-\frac{9}{8}\right)$，當洛基的出手點與 y 軸距離 4 個單位長時，出手點的坐標為何？



解 由最高點$(0,0)$可設路徑為 $y=ax^2$，

將$\left(-3,-\frac{9}{8}\right)$代入 $y=ax^2$，

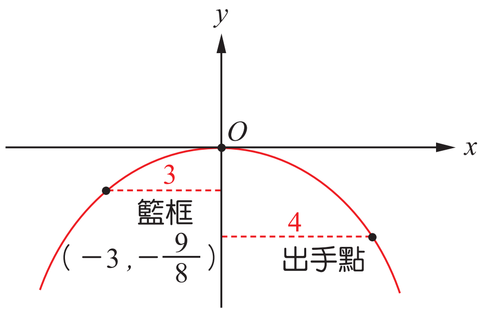
得$-\frac{9}{8}=9a$，$a=-\frac{1}{8}$，

$\therefore$球的路徑為 $y=-\frac{1}{8}x^2$。

將 $x=4$ 代入 $y=-\frac{1}{8}x^2$，

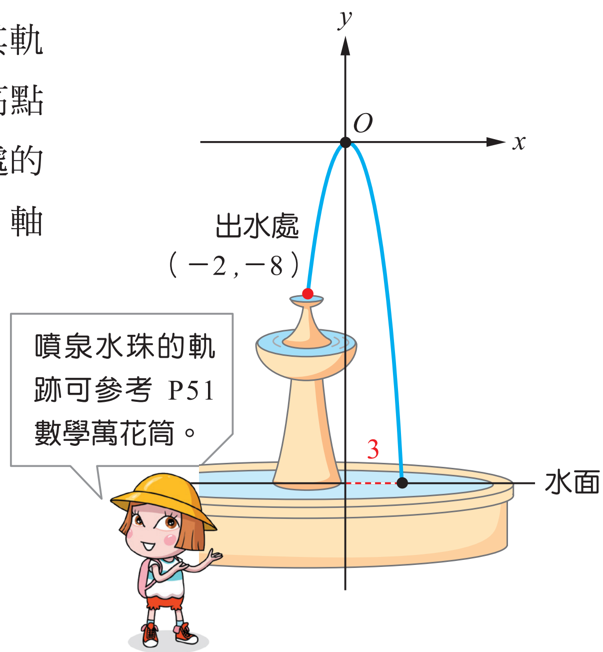
得 $y=-\frac{1}{8}\times4^2$，$y=-2$，

故洛基出手點的坐標為$(4,-2)$。



隨堂練習

右圖是某噴泉水珠移動軌跡的設計稿，其軌跡是拋物線的一部分。如果將軌跡的最高點設為坐標平面的原點$(0,0)$，噴泉出水處的坐標為$(-2,-8)$，當水珠落在水面時與 y 軸距離 3 個單位長，此時水珠的坐標為何？



重點回顧

❶ 二次函數

形如 $y=ax^2+bx+c$，其中 $a\neq 0$ 且 x 的最高次數為 2，稱為二次函數。

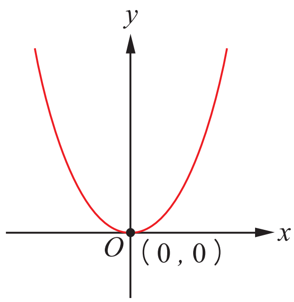
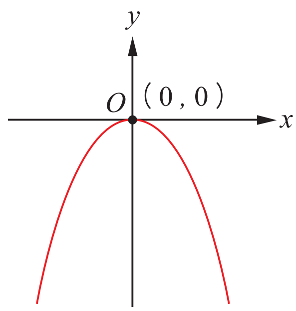
例 $y=x^2$、$y=2x^2+x-3$ 都是二次函數。

❷ 二次函數的函數值

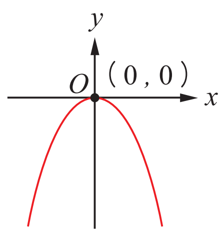
在二次函數中，將 x 以 a 代入所得到的值，即為 $x=a$ 所對應的函數值。

❸ 二次函數 $y=ax^2$ 的圖形

(1)

條件	$a>0$	$a<0$
圖示		
開口方向	向上	向下
頂點	(0, 0)	
最高(低)點	頂點為最低點	頂點為最高點
對稱軸方程式	$x=0$（y 軸）	

例 如右圖，$y=-3x^2$ 的圖形開口向下，且頂點(0, 0)為圖形的最高點，對稱軸方程式為 $x=0$（即 y 軸）。



(2) $|a|$ 愈小，其圖形開口愈大。

例 二次函數 $y=2x^2$、$y=-x^2$、$y=4x^2$、$y=-3x^2$ 中，因為 $|-1|<|2|<|-3|<|4|$，所以它們的開口從大到小依序為 $y=-x^2$、$y=2x^2$、$y=-3x^2$、$y=4x^2$。

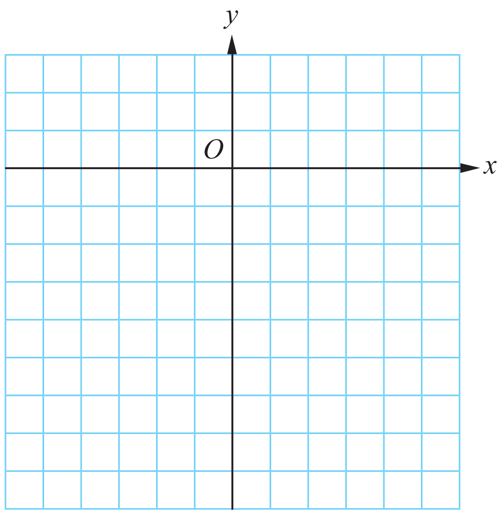
1-1 自我評量

① 已知函數 $y=x^2-9x-10$，分別求 $x=-1$ 與 $x=10$ 時所對應的函數值。 課 P9 例 1

② 在坐標平面上描繪下列二次函數的圖形，並求此圖形的開口方向、最低或最高點坐標及對稱軸方程式： 課 P14 例 3、P15 隨堂

(1) $y=-\frac{3}{2}x^2$

x	…	-2	-1	0	1	2	…
y	…						…



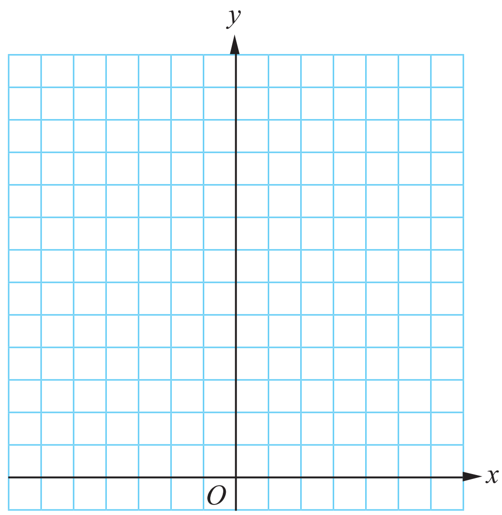
①開口方向：________

②有最____點（填入高或低），其坐標為______

③對稱軸方程式：________

(2) $y=\frac{1}{6}x^2$

x	…	-6	-3	0	3	6	…
y	…						…

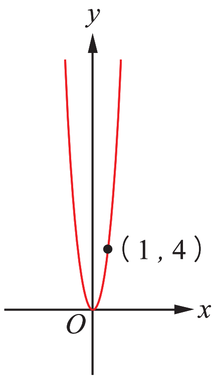


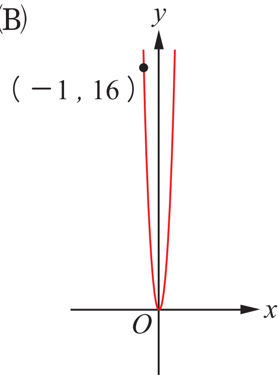
①開口方向：________

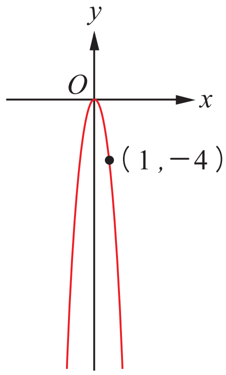
②有最____點（填入高或低），其坐標為______

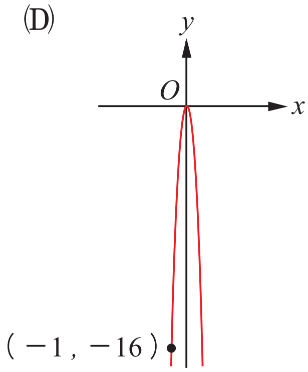
③對稱軸方程式：________

3 下列何者為二次函數 $y=-4x^2$ 可能的圖形？ 課 P14 例 3

(A)


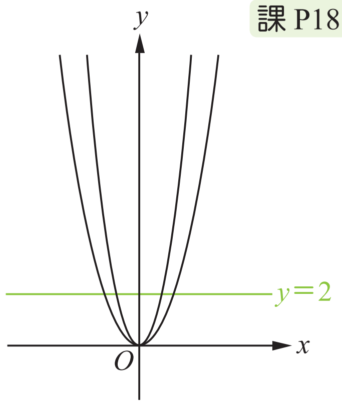
(B)


(C)


(D)


4 右圖為 $y=1.5x^2$、$y=3x^2$ 與 $y=2$ 的圖形，如果 $y=2$ 與 $y=1.5x^2$ 的圖形交於 A、B 兩點；$y=2$ 與 $y=3x^2$ 的圖形交於 C、D 兩點，比較 $\overline{AB}$ 與 $\overline{CD}$ 長度的大小。

課 P18 隨堂



5 寫出下列二次函數圖形的開口方向、頂點坐標及對稱軸方程式，並比較其開口大小：

課 P19 例 4

(1)

	開口方向	頂點坐標	對稱軸方程式
甲：$y=-x^2$			
乙：$y=3x^2$			
丙：$y=\frac{3}{2}x^2$			

(2)開口大小：__________ > __________ > __________。

1-2 二次函數圖形與最大值、最小值

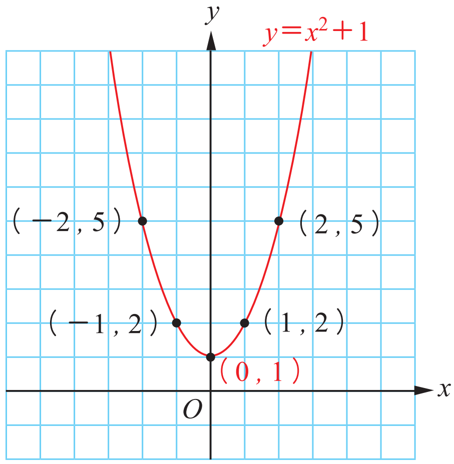
1 $y=ax^2+k$ 的圖形

在前一節中，我們學到所有二次函數的圖形都是拋物線，且形如 $y=ax^2$ 的二次函數，其圖形都是以 $(0,0)$ 為最高點或最低點的拋物線。那麼，形如 $y=ax^2+k$，$k\neq 0$ 的二次函數圖形，會是怎樣的拋物線呢？

以 $y=x^2+1$ 為例，下表中的 x 值和所對應的 y 值均滿足 $y=x^2+1$。

x	⋯	-2	-1	0	1	2	⋯
y	⋯	5	2	1	2	5	⋯

將上表中數對 (x, y) 所對應的點描繪在右圖的坐標平面上，並將各點由左至右用平滑曲線連接。



二次函數 $y=x^2+1$ 的圖形是拋物線，具有下列特性：

(1) 圖形**開口向上**。

(2) 頂點 **$(0, 1)$** 為圖形的**最低點**。

(3) 它是線對稱圖形，其**對稱軸方程式為 $x=0$（即 y 軸）**。

隨堂練習

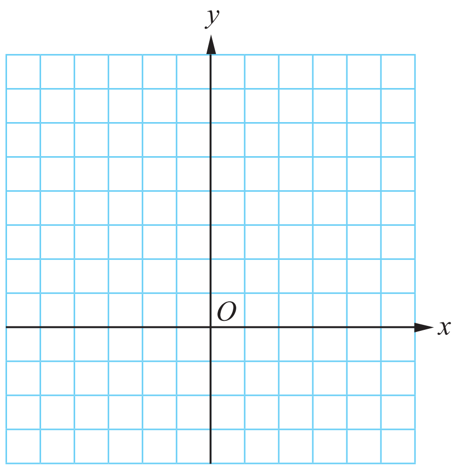
在坐標平面上描繪二次函數 $y=x^2-1$ 的圖形，並求此圖形的開口方向、頂點坐標及對稱軸方程式。

x	⋯	-2	-1	0	1	2	⋯
y	⋯						⋯

開口方向：________

頂點坐標：________

對稱軸方程式：________



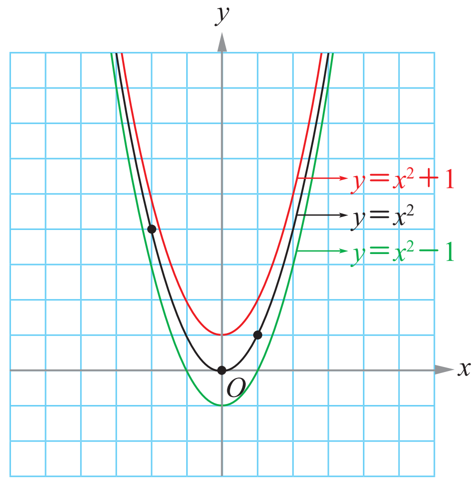
探索活動 $y=x^2$ 圖形的上下平移

右圖是二次函數 $y=x^2$、

$y=x^2+1$、

$y=x^2-1$ 的圖形。

回答下列問題：



(1) 已知 $(-2, 4)$、$(0, 0)$、$(1, 1)$ 三點都在 $y=x^2$ 的圖形上，若將此三點向上平移 1 個單位，則移動後的點是否會落在 $y=x^2+1$ 的圖形上？

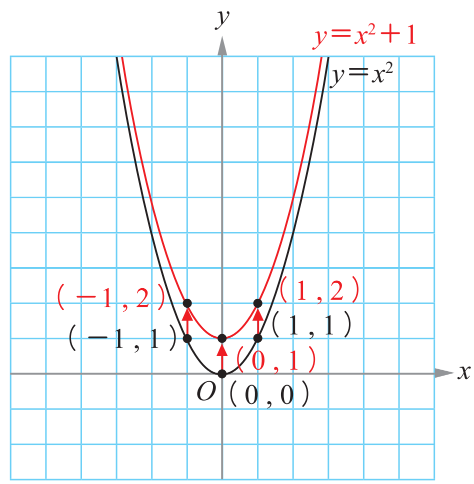
(2) 附件 8 的圖形是由 $y=x^2$ 拿掉坐標軸得到的圖形。將附件 8 疊在 $y=x^2$ 的圖形上，再將附件向上或下平移，回答下列問題：

① 將附件上 $y=x^2$ 的圖形向上平移 1 個單位後，是否會與 $y=x^2+1$ 的圖形疊合？

② 將附件上 $y=x^2$ 的圖形向下平移 1 個單位後，是否會與 $y=x^2-1$ 的圖形疊合？

由 探索活動 可知，將 $y=x^2$ 的圖形向上平移 1 個單位可得 $y=x^2+1$。

因為平移時圖形上的每一個點都會做相同的移動，所以 $y=x^2$ 圖形的頂點 $(0, 0)$ 也會向上平移 1 個單位到達 $(0, 1)$，而 $(0, 1)$ 就是 $y=x^2+1$ 圖形的頂點。因此，將 $y=x^2$ 的圖形上下平移時，只要考慮其頂點的平移即可。



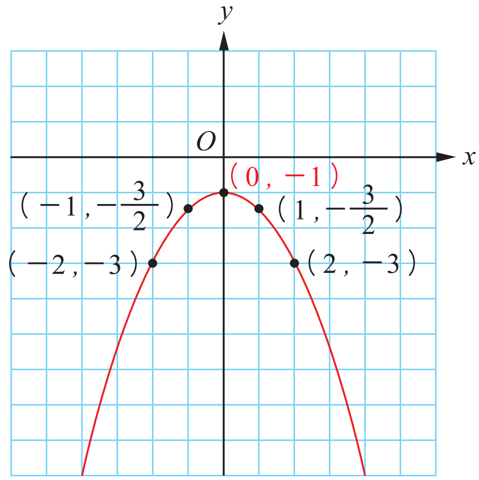
例1 $y=ax^2+k$ 的繪圖（$a<0$）

自評 P48 第 2 題

在坐標平面上描繪二次函數 $y=-\frac{1}{2}x^2-1$ 的圖形，並求此圖形的開口方向、頂點坐標及對稱軸方程式。

解 將 x 值和所對應的 y 值列表如下：

x	…	-2	-1	0	1	2	…
y	…	-3	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{3}{2}$	-3	…



描點並以平滑的曲線將這些點由左至右依序連接起來，如右圖。

開口方向：向下。

頂點坐標：$(0,-1)$。

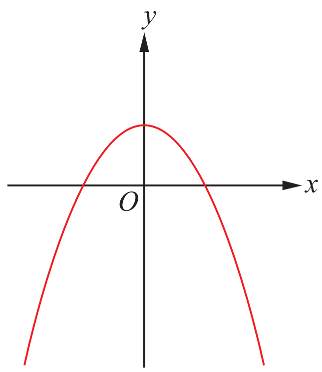
對稱軸方程式：$x=0$（即 y 軸）。

隨堂練習

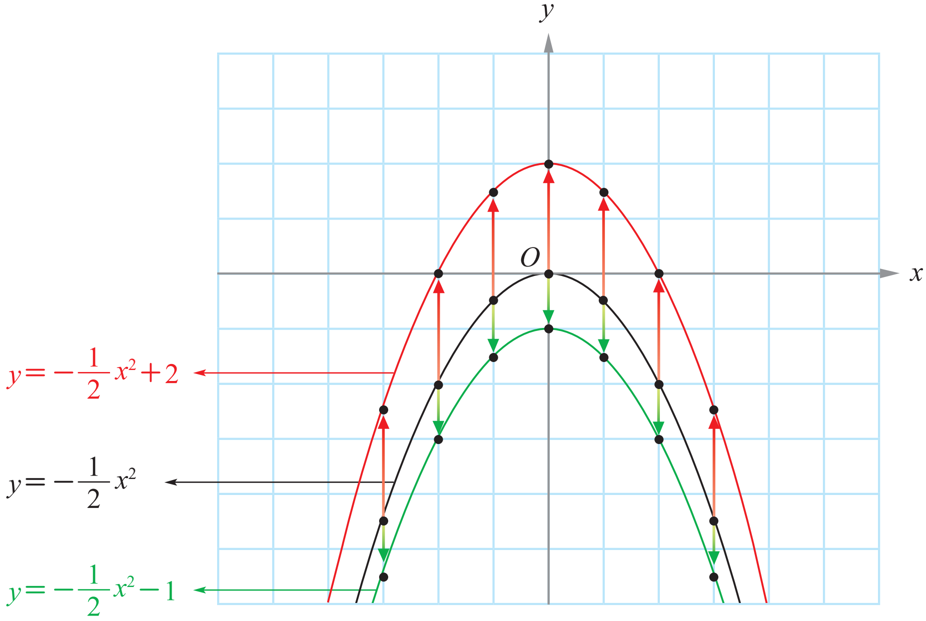
右圖中的拋物線可能為下列哪一個二次函數的圖形？

(A) $y=-\frac{1}{2}x^2-2$　(B) $y=-\frac{1}{2}x^2+2$

(C) $y=\frac{1}{2}x^2-2$　(D) $y=\frac{1}{2}x^2+2$



下圖是二次函數 $y=-\frac{1}{2}x^2$、$y=-\frac{1}{2}x^2+2$、$y=-\frac{1}{2}x^2-1$ 的圖形。



拿出附件 9，將它疊在 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 的圖形上，再將此附件的圖形向上或下平移後發現：

(1)將附件上 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 的圖形向上平移 2 個單位，可與 $y=-\frac{1}{2}x^2+2$ 的圖形疊合。

(2)將附件上 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 的圖形向下平移 1 個單位，可與 $y=-\frac{1}{2}x^2-1$ 的圖形疊合。

由於將 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 的圖形上下平移時，圖形上的每一點都會做相同的移動，因此，將 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 的圖形上下平移時，只要考慮其頂點的平移即可。

二次函數 $y=ax^2+k$ 的圖形

形如 $y=ax^2+k$，$k\neq0$ 的二次函數圖形，是由 $y=ax^2$ 的圖形上下平移而得。它們都是以 **$(0, k)$** 為頂點，方程式 **$x=0$（即 y 軸）** 為對稱軸的拋物線。

(1)當 $a>0$ 時，圖形的開口向上，頂點是最低點。

(2)當 $a<0$ 時，圖形的開口向下，頂點是最高點。

隨堂練習

1. 在下表的空格內，填入適當文字或符號。

函數 \ 項目	開口方向	頂點坐標	圖形的平移	對稱軸方程式
$y=3x^2+2$	向上	$(0, 2)$	由 $y=3x^2$ 的圖形向上平移______個單位可得。	
$y=3x^2-1$			由 $y=3x^2$ 的圖形向______平移 1 個單位可得。	$x=0$（y 軸）
$y=-2x^2-2$		$(0, -2)$	由 $y=-2x^2$ 的圖形向______平移______個單位可得。	
$y=-2x^2+1$			由 $y=-2x^2$ 的圖形向______平移______個單位可得。	$x=0$（y 軸）

2. 二次函數 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 圖形的頂點坐標為__________，
若將 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 的圖形向上平移 3 個單位後，可得 $y=-\frac{1}{2}x^2+k$ 的圖形，
且平移後圖形的頂點坐標為__________，由此頂點坐標可知 $k=$__________。

3. 二次函數 $y=5x^2-3$ 圖形的頂點 A 坐標為__________，
二次函數 $y=5x^2+2$ 圖形的頂點 B 坐標為__________，
且頂點 A 可由頂點 B 向________平移________個單位而得，
因此二次函數 $y=5x^2-3$ 的圖形是由 $y=5x^2+2$ 的圖形
向________平移________個單位而得。

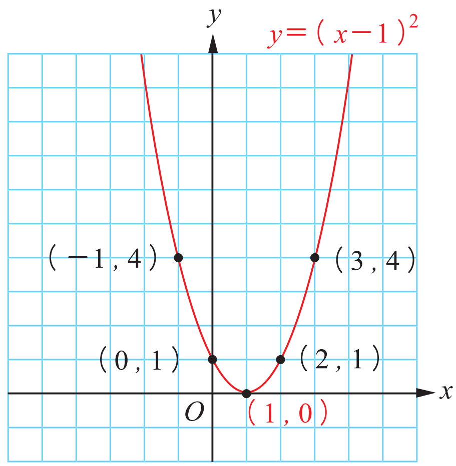
2 $y=a(x-h)^2$ 的圖形

在前面已探討形如 $y=ax^2$ 與 $y=ax^2+k$ 的二次函數圖形，接下來要探討形如 $y=a(x-h)^2$，$h\neq0$ 的二次函數圖形。

以 $y=(x-1)^2$ 為例，下表中的 x 值和所對應的 y 值均滿足 $y=(x-1)^2$。

x	…	-1	0	1	2	3	…
y	…	4	1	0	1	4	…

將上表中數對 (x, y) 所對應的點描繪在右圖的坐標平面上，並將各點由左至右用平滑曲線連接。



二次函數 $y=(x-1)^2$ 的圖形是拋物線，具有下列特性：

(1) 圖形**開口向上**。

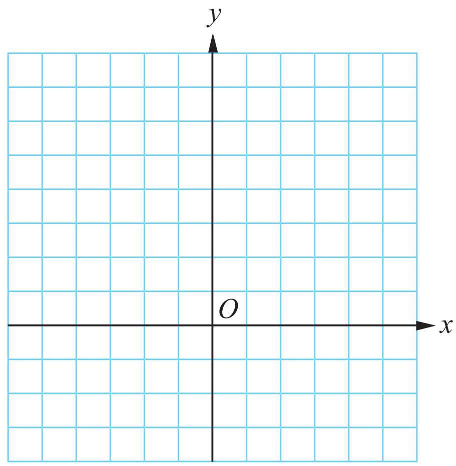
(2) 頂點 **$(1, 0)$** 為圖形的**最低點**。

(3) 它是線對稱圖形，其**對稱軸方程式為 $x=1$**。

隨堂練習

在坐標平面上描繪二次函數 $y=(x+1)^2$ 的圖形，並求此圖形的開口方向、頂點坐標及對稱軸方程式。

x	…	-3	-2	-1	0	1	…
y	…						…



開口方向：__________

頂點坐標：__________

對稱軸方程式：__________

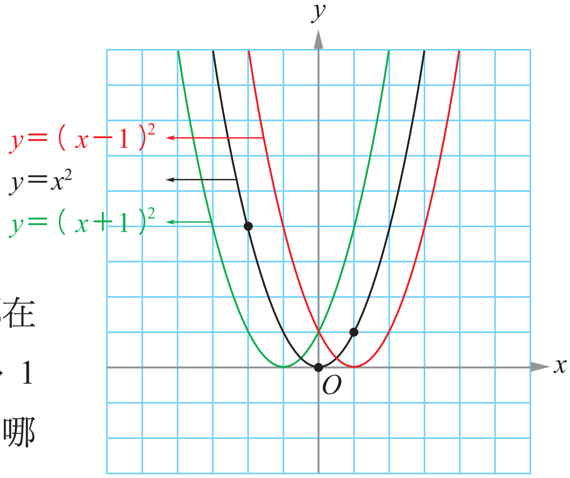
探索活動 $y=x^2$ 圖形的左右平移

右圖是二次函數 $y=x^2$、

$y=(x-1)^2$、

$y=(x+1)^2$ 的圖形。

回答下列問題：



(1)已知$(-2,4)$、$(0,0)$、$(1,1)$三點都在 $y=x^2$ 的圖形上，若將此三點向右平移 1 個單位，則移動後的點都會落在上圖中哪一個二次函數的圖形上？

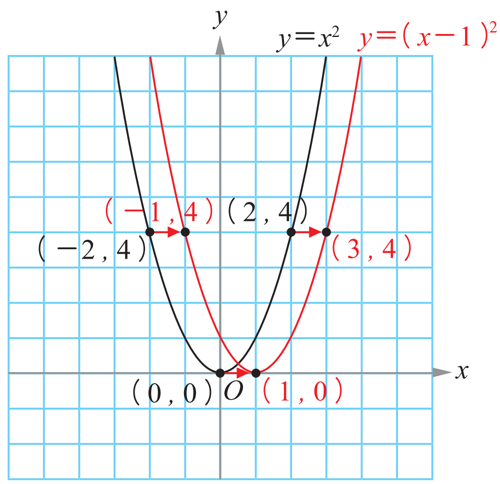
(2)附件 8 的圖形是由 $y=x^2$ 拿掉坐標軸得到的圖形。將附件 8 疊在 $y=x^2$ 的圖形上，再將附件向左或右平移，回答下列問題：

①將附件上 $y=x^2$ 的圖形向________平移 1 個單位，可與 $y=(x-1)^2$ 的圖形疊合。

②將附件上 $y=x^2$ 的圖形向________平移 1 個單位，可與 $y=(x+1)^2$ 的圖形疊合。

由 探索活動 可知，將 $y=x^2$ 的圖形向右平移 1 個單位可得 $y=(x-1)^2$。

因為平移時圖形上的每一個點都會做相同的移動，所以 $y=x^2$ 圖形的頂點$(0,0)$也會向右平移 1 個單位到達$(1,0)$，而$(1,0)$就是 $y=(x-1)^2$ 圖形的頂點。因此，將 $y=x^2$ 的圖形左右平移時，只要考慮其頂點的平移即可。



第 1 章

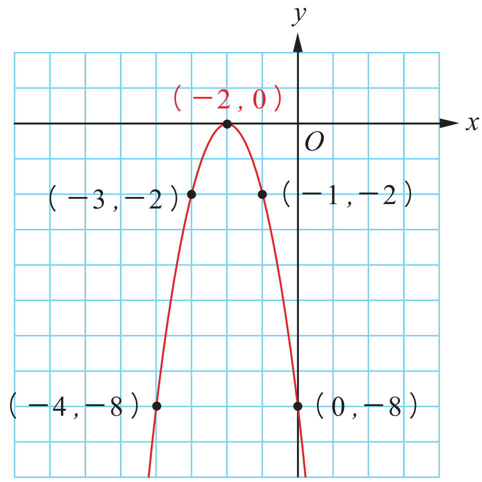
例2 $y=a(x-h)^2$ 的繪圖

自評 P48 第 2 題

在坐標平面上描繪二次函數 $y=-2(x+2)^2$ 的圖形，並求此圖形的開口方向、頂點坐標及對稱軸方程式。

解 將 x 值和所對應的 y 值列表如下：

x	…	-4	-3	-2	-1	0	…
y	…	-8	-2	0	-2	-8	…



描點並以平滑的曲線將這些點由左至右依序連接起來，如右圖。

開口方向：向下。

頂點坐標：$(-2, 0)$。

對稱軸方程式：$x=-2$。

隨堂練習

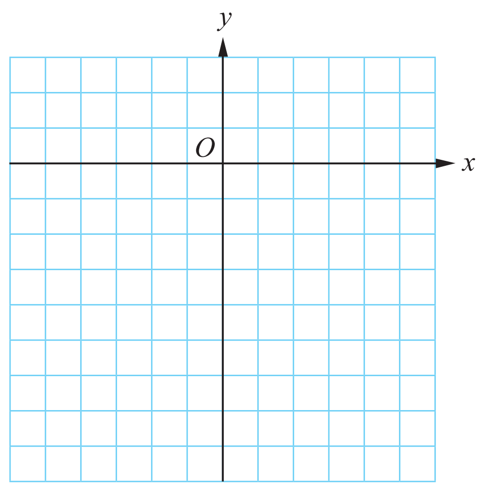
在坐標平面上描繪二次函數 $y=-2(x-1)^2$ 的圖形，並求此圖形的開口方向、頂點坐標及對稱軸方程式。

x	…	-1	0	1	2	3	…
y	…						…

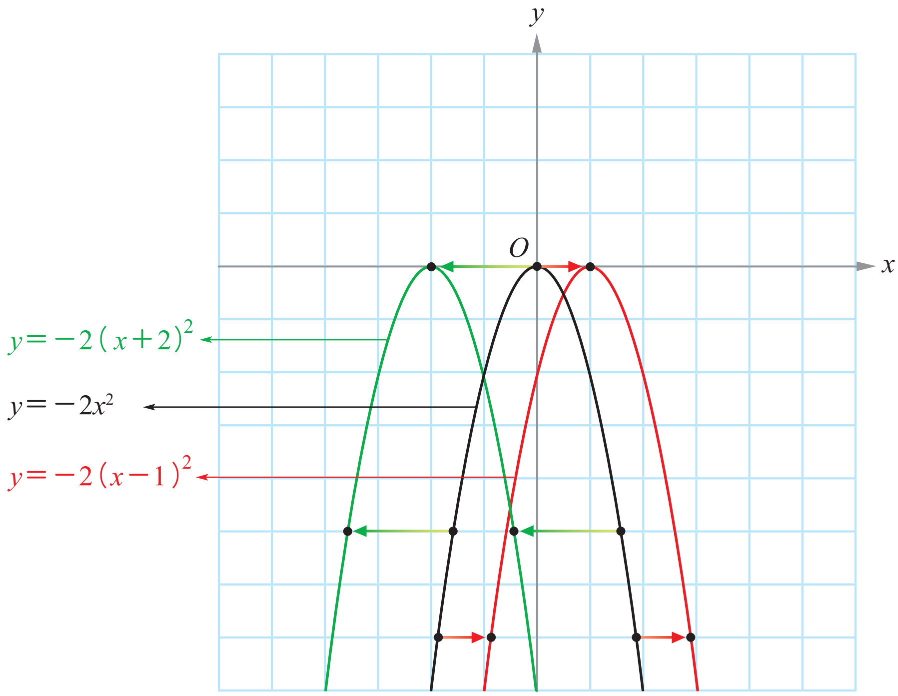
開口方向：________________

頂點坐標：________________

對稱軸方程式：____________



下圖是二次函數 $y=-2x^2$、$y=-2(x-1)^2$、$y=-2(x+2)^2$ 圖形。



拿出附件 10，將它疊在 $y=-2x^2$ 的圖形上，再將此附件的圖形向左或右平移後發現：

(1)將附件上 $y=-2x^2$ 的圖形向右平移 1 個單位，可與 $y=-2(x-1)^2$ 的圖形疊合。

(2)將附件上 $y=-2x^2$ 的圖形向左平移 2 個單位，可與 $y=-2(x+2)^2$ 的圖形疊合。

由於將 $y=-2x^2$ 的圖形左右平移時，圖形上的每一點都會做相同的移動。因此，將 $y=-2x^2$ 的圖形左右平移時，只要考慮其頂點的平移即可。

二次函數 $y=a(x-h)^2$ 的圖形

形如 $y=a(x-h)^2$，$h\neq 0$ 的二次函數圖形，是由 $y=ax^2$ 的圖形左右平移而得。它們都是以 $(h,0)$ 為頂點，方程式 $x=h$ 為對稱軸的拋物線。

(1)當 $a>0$ 時，圖形的開口向上，頂點是最低點。

(2)當 $a<0$ 時，圖形的開口向下，頂點是最高點。

隨堂練習

1. 在下表的空格內，填入適當的文字或符號。 自評 P48 第 1 題

項目 / 函數	開口方向	頂點坐標	圖形的平移	對稱軸方程式
$y=(x-1)^2$	向上		由 $y=x^2$ 的圖形向右平移_____個單位可得。	$x=1$
$y=(x+1)^2$		$(-1,0)$	由 $y=x^2$ 的圖形向_____平移 1 個單位可得。	
$y=-2(x-1)^2$		$(1,0)$	由 $y=-2x^2$ 的圖形向_____平移_____個單位可得。	
$y=-2(x+2)^2$			由 $y=-2x^2$ 的圖形向_____平移_____個單位可得。	$x=-2$

2. 二次函數 $y=-5(x-1)^2$ 的圖形，經下列哪一個選項的操作後，會與 $y=-5(x+3)^2$ 的圖形完全疊合？
(A)向左平移 3 個單位　(B)向右平移 3 個單位
(C)向左平移 4 個單位　(D)向右平移 4 個單位

3. 二次函數 $y=\frac{1}{2}(x+2)^2$ 的圖形，向右平移 3 個單位，可以和下列哪一個二次函數的圖形完全疊合？
(A) $y=\frac{1}{2}(x+5)^2$　(B) $y=\frac{1}{2}(x-1)^2$
(C) $y=\frac{1}{2}(x+1)^2$　(D) $y=\frac{1}{2}(x-5)^2$

3 $y=a(x-h)^2+k$ 的圖形

從前面的學習，我們知道：

(1)將形如 $y=ax^2$ 的圖形向右平移 h 個單位，可得形如 $y=a(x-h)^2$ 的圖形。

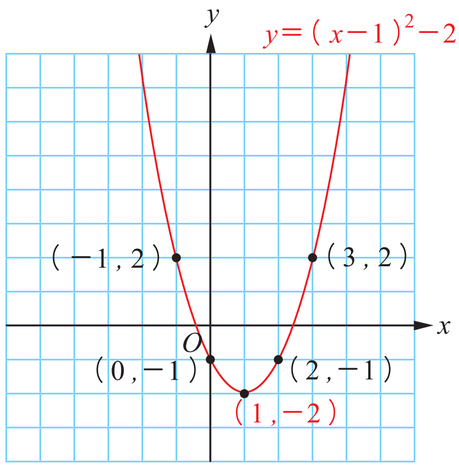
(2)將形如 $y=ax^2$ 的圖形向上平移 k 個單位，可得形如 $y=ax^2+k$ 的圖形。

那麼，如果將 $y=ax^2$ 的圖形向右平移 h 個單位，再向上平移 k 個單位，是否會變成形如 $y=a(x-h)^2+k$ 的圖形呢？

以 $y=(x-1)^2-2$ 為例，下表中的 x 值和所對應的 y 值均滿足 $y=(x-1)^2-2$。

x	…	-1	0	1	2	3	…
y	…	2	-1	-2	-1	2	…

將上表中數對 (x,y) 所對應的點描繪在右圖的坐標平面上，並將各點由左至右用平滑曲線連接。



二次函數 $y=(x-1)^2-2$ 的圖形是拋物線，具有下列特性：

(1)圖形**開口向上**。

(2)頂點坐標 **$(1,-2)$** 為圖形的**最低點**。

(3)它是線對稱圖形，其**對稱軸方程式為 $x=1$**。

隨堂練習

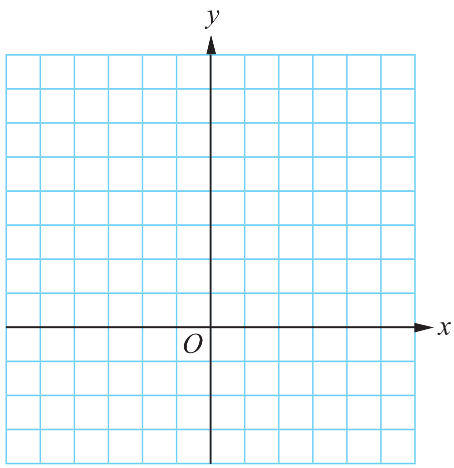
在坐標平面上描繪二次函數 $y=(x+1)^2+2$ 的圖形，並求此圖形的開口方向、頂點坐標及對稱軸方程式。

x	…	-3	-2	-1	0	1	…
y	…						…

開口方向：__________

頂點坐標：__________

對稱軸方程式：__________



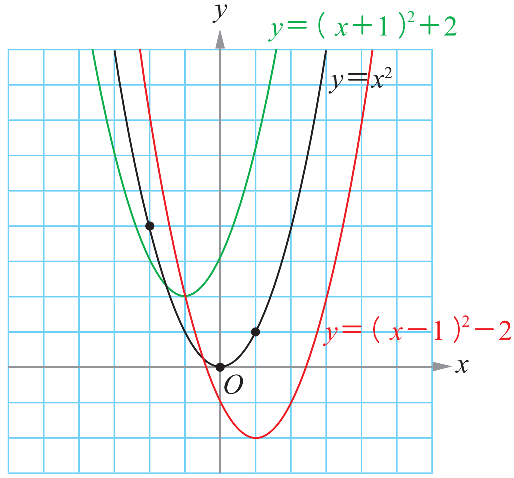
探索活動 $y=x^2$ 圖形的平移

右圖是二次函數 $y=x^2$、

$y=(x-1)^2-2$、

$y=(x+1)^2+2$ 的圖形，

回答下列問題：



(1)已知$(-2,4)$、$(0,0)$、$(1,1)$三點都在 $y=x^2$ 的圖形上，若將此三點先向右平移 1 個單位，再向下平移 2 個單位，則移動後的點都會落在右圖中哪一個二次函數的圖形上？

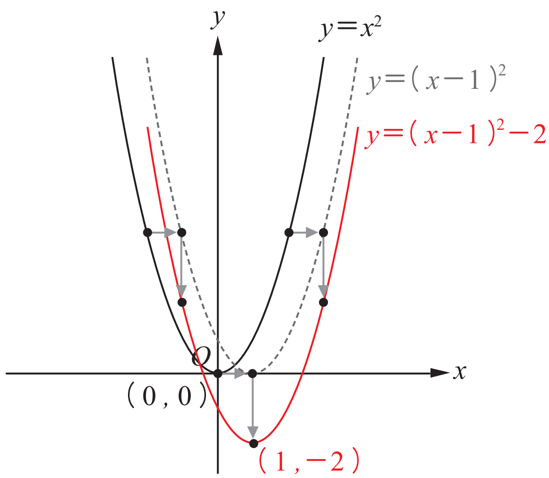
(2)附件 8 的圖形是由 $y=x^2$ 拿掉坐標軸得到的圖形。將附件 8 疊在 $y=x^2$ 的圖形上，再將附件先向左或右平移，再向上或下平移，回答下列問題：

①將附件上 $y=x^2$ 的圖形先向______平移 1 個單位，再向______平移 2 個單位，可與 $y=(x-1)^2-2$ 的圖形疊合。

②將附件上 $y=x^2$ 的圖形先向______平移 1 個單位，再向______平移 2 個單位，可與 $y=(x+1)^2+2$ 的圖形疊合。

由 探索活動 可知，將 $y=x^2$ 的圖形先向右平移 1 個單位，可得 $y=(x-1)^2$；再向下平移 2 個單位，可得 $y=(x-1)^2-2$。

因為平移時圖形上的每一個點都會做相同的移動，所以 $y=x^2$ 圖形的頂點$(0,0)$也會向右平移 1 個單位，再向下平移 2 個單位到達$(1,-2)$，而$(1,-2)$就是 $y=(x-1)^2-2$ 圖形的頂點。因此，將 $y=x^2$ 的圖形上下左右平移時，只要考慮其頂點的平移即可。



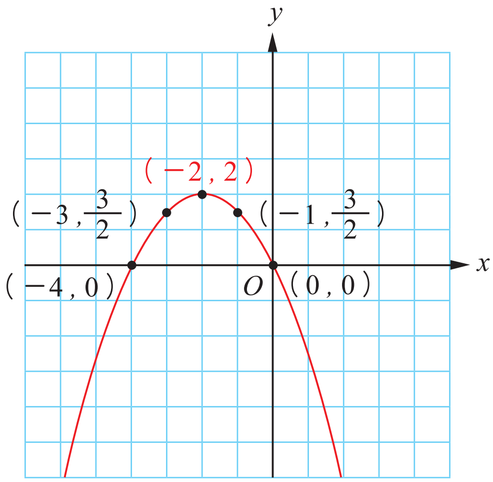
例3 $y=a(x-h)^2+k$ 的繪圖

自評 P48 第 2 題

在坐標平面上描繪二次函數 $y=-\frac{1}{2}(x+2)^2+2$ 的圖形，並求此圖形的開口方向、頂點坐標及對稱軸方程式。

解 將 x 值和所對應的 y 值列表如下：

x	…	-4	-3	-2	-1	0	…
y	…	0	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{3}{2}$	0	…



描點並以平滑的曲線將這些點由左至右依序連接起來，如右圖。

開口方向：向下。

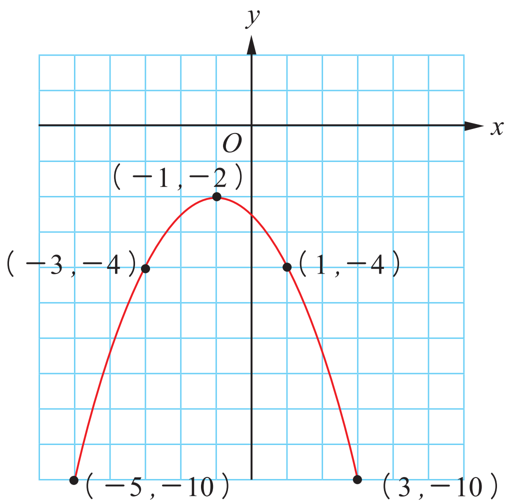
頂點坐標：$(-2,2)$。

對稱軸方程式：$x=-2$。

隨堂練習

自評 P48 第 3 題

下圖為二次函數 $y=-\frac{1}{2}(x+1)^2-2$ 的圖形，並求此圖形的開口方向、頂點坐標及對稱軸方程式。

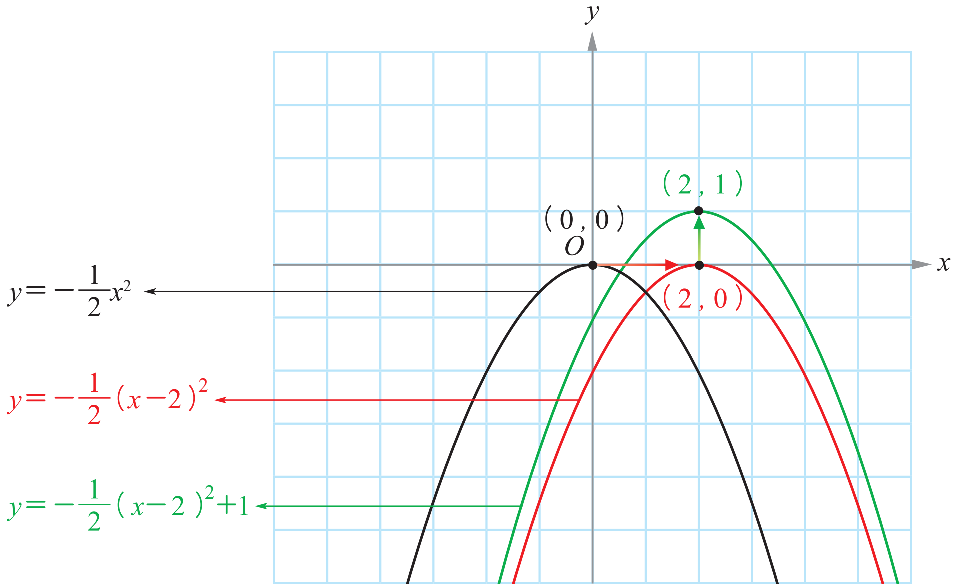


開口方向：________

頂點坐標：________

對稱軸方程式：________

下圖是二次函數 $y=-\frac{1}{2}x^2$、$y=-\frac{1}{2}(x-2)^2$、$y=-\frac{1}{2}(x-2)^2+1$ 的圖形。



拿出附件 9，將它疊在 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 的圖形上，再將此附件的圖形平移後發現：

(1) 將附件上 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 的圖形向右平移 2 個單位，
可與 $y=-\frac{1}{2}(x-2)^2$ 的圖形疊合。

(2) 再將附件上 $y=-\frac{1}{2}(x-2)^2$ 的圖形繼續向上平移 1 個單位，
可與 $y=-\frac{1}{2}(x-2)^2+1$ 的圖形疊合。

由於將 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 的圖形平移時，圖形上的每一個點都會做相同的移動。因此，將 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 的圖形平移時，只要考慮其頂點的平移即可。

二次函數 $y=a(x-h)^2+k$ 的圖形

二次函數 $y=a(x-h)^2+k$，$h\neq 0$，$k\neq 0$ 的圖形都是拋物線，
其特性如下：

(1) 圖形的開口大小與 $y=ax^2$ 相同。
① 當 $a>0$ 時，圖形開口向上。② 當 $a<0$ 時，圖形開口向下。

(2) 圖形的頂點坐標為 (h, k)，對稱軸方程式為 $x=h$。

(3) 圖形可由 $y=ax^2$ 平移而得；頂點由 $(0, 0)$ 平移到 (h, k)。

隨堂練習

在下表的空格內，填入適當的文字或符號。

項目 / 函數	開口方向	頂點坐標	圖形的平移	對稱軸方程式
$y=(x+1)^2-2$			由 $y=x^2$ 的圖形， 水平向＿＿平移＿＿個單位， 鉛直向＿＿平移＿＿個單位。	
$y=-\frac{1}{2}(x-2)^2-1$			由 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 的圖形， 水平向＿＿平移＿＿個單位， 鉛直向＿＿平移＿＿個單位。	

我們知道，在坐標平面上二次函數 $y=2x^2$ 圖形的頂點坐標為 $(0,0)$，$y=2(x-1)^2$ 圖形的頂點坐標為 $(1,0)$，$y=2(x-1)^2+3$ 圖形的頂點坐標為 $(1,3)$，且它們彼此間經過平移後，可以疊合在一起。同樣地，若二次函數圖形的頂點坐標為 (h,k)，且平移後可與 $y=2x^2$ 圖形疊合時，則這個二次函數必為 $y=2(x-h)^2+k$ 的形式。

隨堂練習

已知二次函數 $y=a(x-h)^2+k$，其圖形的頂點坐標為 (h,k)。由給定的頂點坐標與 a 值，完成下列表格。

項目 / 頂點坐標	a 值	h 值	k 值	二次函數
$(0,0)$	-1	0	0	$y=-x^2$
$(2,0)$	3			
$(0,3)$	-2			
$(-2,4)$	6			
$(3,-5)$	$-\frac{1}{5}$			

例4 二次函數圖形的平移

將二次函數 $y=-3(x-2)^2-4$ 的圖形，向左平移 3 個單位，再向上平移 6 個單位後，可得到另一個二次函數 $y=a(x-h)^2+k$ 的圖形，求此二次函數。

解 $y=-3(x-2)^2-4$ 的頂點為 $(2,-4)$，

由 $(2,-4)$ 向左平移 3 個單位，

再向上平移 6 個單位，

則另一個圖形的頂點坐標

為 $(2-3,-4+6)=(-1,2)$，

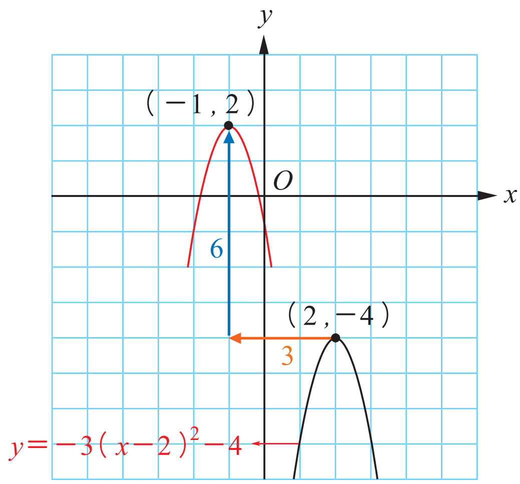
$\therefore h=-1$，$k=2$，

$\because$ 此圖形的開口方向及大小

與 $y=-3(x-2)^2-4$ 的圖形相同，

$\therefore a=-3$，

故此圖形的二次函數為 $y=-3(x+1)^2+2$。



隨堂練習

將二次函數 $y=3(x+1)^2+2$ 的圖形，向右平移 4 個單位，再向下平移 5 個單位後，可得到另一個二次函數 $y=a(x-h)^2+k$ 的圖形，求：

(1) 平移後的頂點坐標。

(2) 平移後的二次函數。

例5 $y=a(x-h)^2+k$ 的應用

自評 P49 第 4 題

將二次函數 $y=2x^2$ 的圖形平移後，可得 $y=a(x-h)^2+k$ 的圖形，其對稱軸方程式為 $x=1$，且通過坐標平面上的點$(-3,5)$，求 a、h 與 k 的值。

解 $\because$ $y=a(x-h)^2+k$ 圖形的開口方向及大小與 $y=2x^2$ 的圖形相同，

$\therefore$ $a=2$，

又方程式 $x=1$ 為其對稱軸，

且對稱軸為通過頂點的鉛垂直線，

$\therefore$ $h=1$，

因此函數為 $y=2(x-1)^2+k$。

$\because$ 圖形通過點$(-3,5)$，

將$(-3,5)$代入 $y=2(x-1)^2+k$，

可得 $5=2(-3-1)^2+k$

$5=32+k$

$k=-27$

故 $a=2$、$h=1$、$k=-27$。

$\because$對稱軸方程式為 $x=1$，
$\therefore$頂點坐標為$(1,k)$，
可設二次函數 $y=a(x-1)^2+k$。

隨堂練習

二次函數 $y=a(x-h)^2+k$ 的圖形，其對稱軸方程式為 $x=-3$，且通過坐標平面上的點$(-2,3)$，若將它平移後，可得 $y=-2x^2$ 的圖形，求 a、h 與 k 的值。

4 二次函數的最大值或最小值

從前面的學習可知，形如 $y=a(x-h)^2+k$ 的二次函數，其圖形為拋物線。我們可由圖形的最高點或最低點，以及頂點坐標 (h, k)，得到該函數的最大值或最小值。

例6 二次函數的最大值或最小值

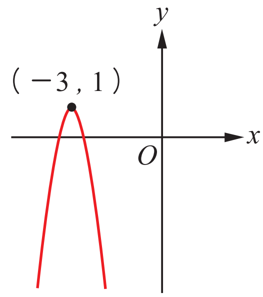
自評 P49 第 5 題

判別二次函數 $y=-5(x+3)^2+1$ 在 x 值為多少時，y 有最大值或最小值，並求出其值。

解 $\because$ $y=-5(x+3)^2+1$ 的圖形開口向下，

頂點 $(-3, 1)$ 為最高點。

$\therefore$ 在 $x=-3$ 時，函數 y 有最大值 1。



隨堂練習

判別下列二次函數在 x 值為多少時，y 有最大值或最小值，並求出其值。

(1) $y=-3(x-1)^2+2$

(2) $y=2(x+2)^2-4$

最大值或最小值

形如 $y=a(x-h)^2+k$ 的二次函數，有最大值或最小值：

(1) 當 $a>0$ 時，圖形開口向上，在 $x=h$ 時，函數 y 有最小值 k。

(2) 當 $a<0$ 時，圖形開口向下，在 $x=h$ 時，函數 y 有最大值 k。

補給站 由不等式判別二次函數 $y=a(x-h)^2+k$ 的最大值或最小值

求二次函數 $y=a(x-h)^2+k$ 的最大值或最小值，除了由圖形的最高點或最低點，配合頂點坐標 (h,k) 得到，也可以由不等式來討論。

❶ $y=4(x-3)^2+5$

$\because$ 不論 x 的值為何，$(x-3)^2\geq 0$，

$\therefore 4(x-3)^2\geq 0$（同乘以**正數「4」**），

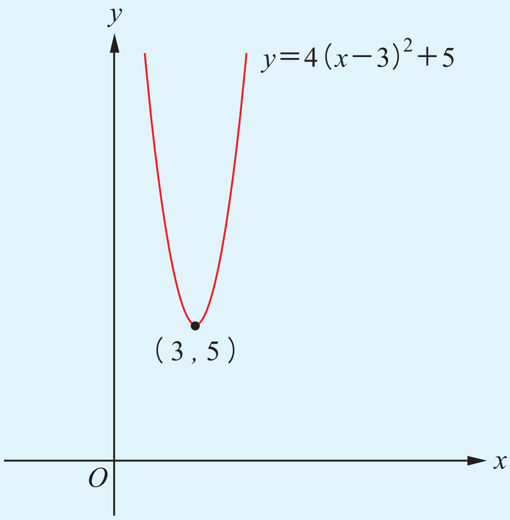
故 $4(x-3)^2+5\geq 5$，

即函數值 $y\geq 5$。

又 $x=3$ 時，$4(x-3)^2+5=5$，

$\therefore$ 在 $x=3$ 時，函數 y 有**最小值** 5。

這與右圖中 $y=4(x-3)^2+5$ 圖形的最低點為 $(3,5)$ 吻合。



❷ $y=-4(x-3)^2+5$

$\because$ 不論 x 的值為何，$(x-3)^2\geq 0$，

$\therefore -4(x-3)^2\leq 0$（同乘以**負數「$-4$」**），

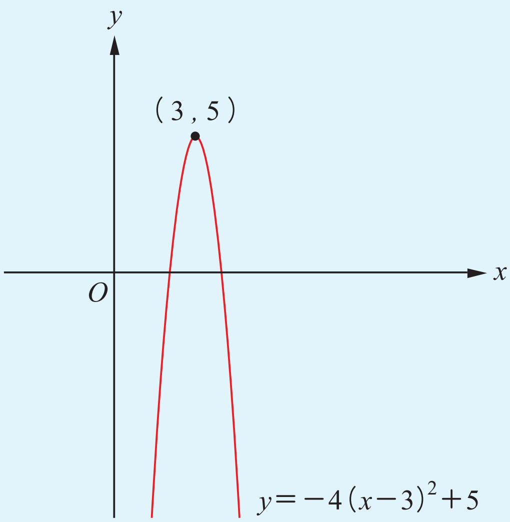
故 $-4(x-3)^2+5\leq 5$，

即函數值 $y\leq 5$。

又 $x=3$ 時，$-4(x-3)^2+5=5$，

$\therefore$ 在 $x=3$ 時，函數 y 有**最大值** 5。

這與右圖中 $y=-4(x-3)^2+5$ 圖形的最高點為 $(3,5)$ 吻合。



綜合上述內容，二次函數 $y=a(x-h)^2+k$ 的最大值或最小值也可由不等式推得：

(1) $a>0$，二次函數 $y=a(x-h)^2+k$ 在 $x=h$ 時，有**最小值** k，
這與函數圖形的最低點為 (h,k) 吻合。

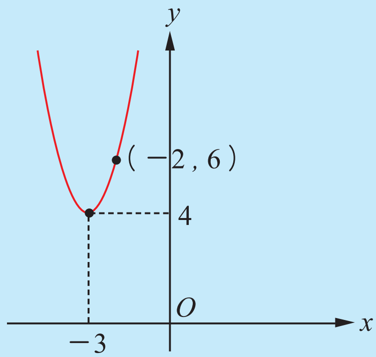
(2) $a<0$，二次函數 $y=a(x-h)^2+k$ 在 $x=h$ 時，有**最大值** k，
這與函數圖形的最高點為 (h,k) 吻合。

例7 由最大值或最小值求二次函數

右圖是二次函數 $y=a(x-h)^2+k$ 的圖形，若此函數在 $x=-3$ 時，y 有最小值 4，且通過坐標平面上的點 $(-2,6)$，求：

(1)此二次函數的頂點坐標。

(2)此二次函數。



解 (1)$\because$ 二次函數圖形在 $x=-3$ 時，函數 y 有最小值 4，

$\therefore$ 頂點坐標為 $(-3,4)$。

(2)$\because$ 頂點坐標為 $(-3,4)$，故 $h=-3$、$k=4$，

因此函數為 $y=a(x+3)^2+4$。

又圖形通過點 $(-2,6)$，

$\therefore$ 將 $(-2,6)$ 代入 $y=a(x+3)^2+4$，

可得 $6=a(-2+3)^2+4$，$a=2$，

故二次函數為 $y=2(x+3)^2+4$。

隨堂練習

若 $y=a(x-h)^2+k$ 的圖形，在 $x=3$ 時，函數 y 有最大值 -1，且 $|a|=2$，求：

(1)此二次函數的頂點坐標。

(2)此二次函數。

前面學過二次函數的畫圖，並知道二次函數圖形的開口方向、頂點坐標與對稱軸方程式。接下來，我們可利用其圖形的特性，來判別二次函數的圖形與 x 軸的交點個數。

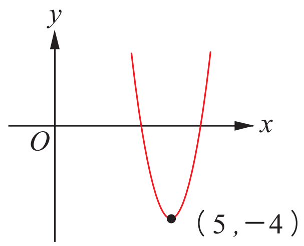
例8 圖形與 x 軸的交點個數

自評 P49 第 6 題

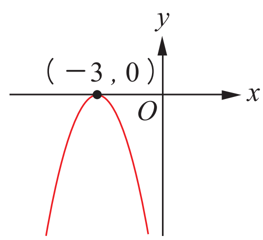
判別下列二次函數的圖形與 x 軸的交點個數：

(1) $y=2(x-5)^2-4$　(2) $y=-(x+3)^2$　(3) $y=-3(x+2)^2-1$

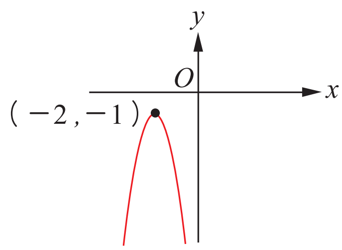
解 (1) $y=2(x-5)^2-4$ 圖形的頂點 $(5,-4)$ 在 x 軸下方，開口向上，因此其圖形與 x 軸會有 2 個交點。



(2) $y=-(x+3)^2$ 圖形的頂點 $(-3,0)$ 恰在 x 軸上，因此其圖形與 x 軸恰有 1 個交點。



(3) $y=-3(x+2)^2-1$ 圖形的頂點 $(-2,-1)$ 在 x 軸下方，開口向下，因此其圖形與 x 軸沒有交點。



隨堂練習

1. 已知二次函數 $y=-2(x+a)^2+b$ 的頂點為 $(2,3)$，求其圖形與 x 軸的交點個數。

2. 已知二次函數 $y=3(x-h)^2$，求其圖形與 x 軸的交點個數。

本單元為補充課程，
教師視班級情況決定如何使用。

desmos

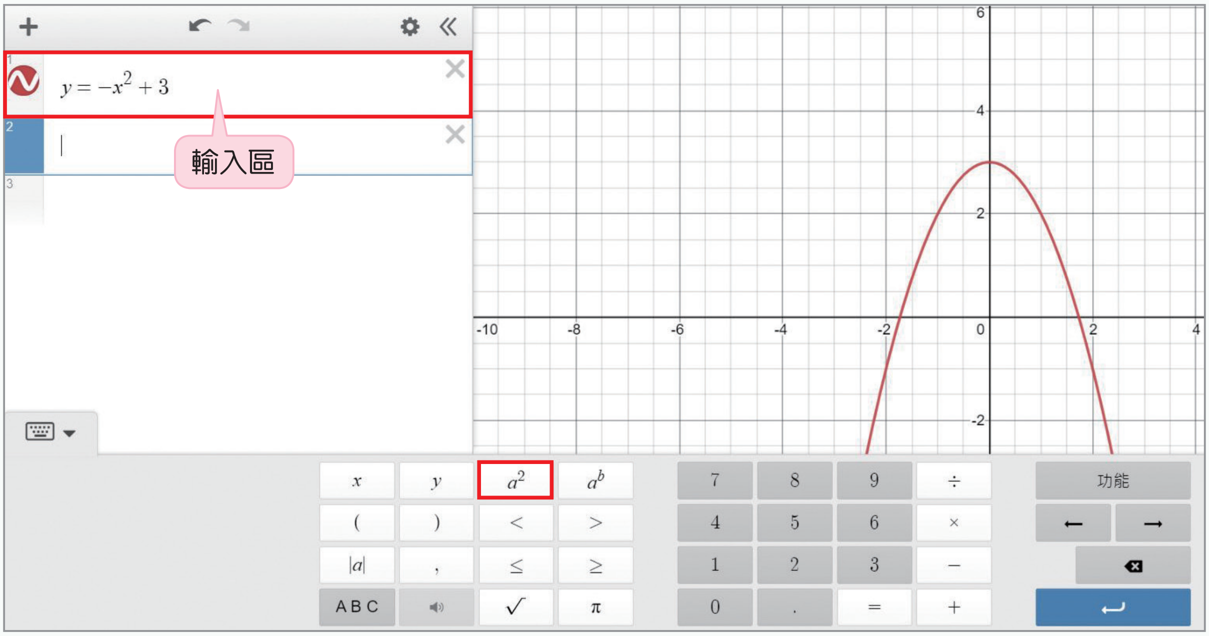
二次函數

繪製二次函數圖形

我們可以使用 desmos 數學軟體繪製二次函數的圖形，其方法如下：

步驟 1：瀏覽器輸入網址：http://desmos.com/，點選 繪圖計算機 ，
並點擊左下角 ⌨ ▲ 。

步驟 2：在 輸入區 輸入「$y=-x^2+3$」，即可得到其二次函數圖形。

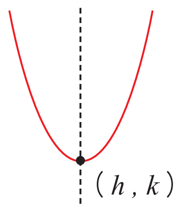
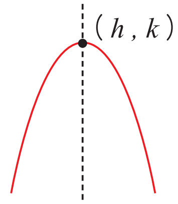


輸入 x^2 時，可利用下方計算機鍵 a^2 。

重點回顧

❶ 二次函數 $y=a(x-h)^2+k$ 的圖形

(1)

條件	$a>0$	$a<0$
圖示		
開口方向	向上	向下
頂點	(h,k)	
對稱軸方程式	$x=h$	

(2) 當 $h=0$ 時，$y=a(x-h)^2+k$ 的圖形即為 $y=ax^2+k$ 的圖形。

(3) 當 $k=0$ 時，$y=a(x-h)^2+k$ 的圖形即為 $y=a(x-h)^2$ 的圖形。

❷ 二次函數圖形的平移

二次函數圖形平移時，圖形上的每一個點都會做相同的移動，因為頂點比較容易觀察，所以只要考慮頂點的平移即可。

❸ 最大值或最小值

形如 $y=a(x-h)^2+k$ 的二次函數，有最大值或最小值：

(1) 當 $a>0$ 時，圖形開口向上，頂點 (h,k) 為最低點；
　在 $x=h$ 時，函數 y 有最小值 k。

(2) 當 $a<0$ 時，圖形開口向下，頂點 (h,k) 為最高點；
　在 $x=h$ 時，函數 y 有最大值 k。

1-2自我評量

① 若二次函數 $y=-5x^2$ 的圖形向左平移 4 個單位後，可得 $y=a(x-h)^2$ 的圖形，求 a 及 h 的值。 課 P34 隨堂 1

② 寫出下列二次函數圖形的開口方向、頂點坐標及對稱軸方程式，並比較其開口大小： 課 P27～37 例 1～3

(1)

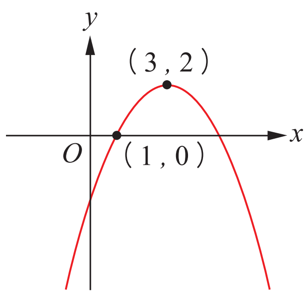
	開口方向	頂點坐標	對稱軸方程式
甲：$y=-4x^2+5$			
乙：$y=3(x-2)^2-6$			
丙：$y=-2(x+\frac{1}{2})^2$			

(2)開口大小：________ > ________ > ________ 。

③ 右圖的拋物線可能為下列哪一個二次函數的圖形？ 課 P37 隨堂

(A) $y=-(x-2)^2+3$　(B) $y=-(x-3)^2+2$

(C) $y=-\frac{1}{2}(x-3)^2+2$　(D) $y=-\frac{1}{3}(x-2)^2+3$



④ 若將二次函數 $y=3x^2$ 的圖形平移後，可得 $y=a(x-h)^2+k$ 的圖形，其對稱軸方程式為 $x=-2$，且通過點 $(-1, 2)$，求平移後的二次函數。 課 P41 例 5

⑤ 求下列各二次函數在 x 值為多少時，y 會得到最大值或最小值，並求其值。

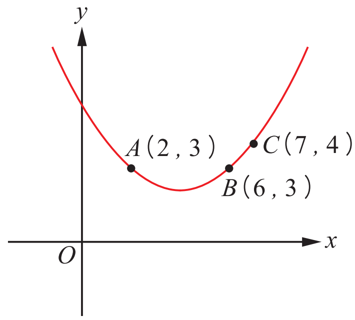
(1) $y=-\frac{3}{4}(x-7)^2$　　(2) $y=4(x+\frac{2}{3})^2-3$ 課 P42 例 6

⑥ 判別下列二次函數的圖形與 x 軸的交點個數： 課 P45 例 8

(1) $y=-2x^2+3$　　(2) $y=2(x-3)^2+5$

自我挑戰

本單元為統整課程，由學生自行挑戰，教師視班級情況決定如何運用。



二次函數 $y=a(x-h)^2+k$ 的圖形通過坐標平面上的 $A(2,3)$、$B(6,3)$、$C(7,4)$ 三點，回答下列問題：

(1)連接 $\overline{AB}$，求 $\overline{AB}$ 的長度。

解

(2)求此二次函數的對稱軸方程式。

解

(3)求 $C(7,4)$ 在此圖形上的對稱點。

解

解答P124

數學萬花筒

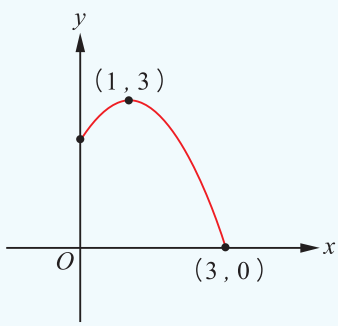
用二次函數表示拋物線的軌跡

自然

物體拋擲的軌跡是二次函數的圖形，以噴水池為例，噴泉水珠移動的軌跡可用二次函數來說明。

設計師要修建一座圓形的噴水池，他計畫在水池中心安裝一根鉛直的水管，並且在水管的頂端放置一個噴水頭，噴出的軌跡呈拋物線。如果他打算讓此軌跡的最高點與水池中心的水平距離為 1 公尺、高度為 3 公尺，且水珠落在水面時與水池中心的水平距離也剛好是 3 公尺。那麼，水管的噴水頭必須架設在離地面多少公尺的高度呢？

如圖，我們把水珠移動的軌跡畫在坐標平面上，軌跡最高點的位置為 $(1,3)$，落地處為 $(3,0)$。假設軌跡與水池中心的水平距離為 x 公尺時，其對應的高度為 y 公尺，則兩者的關係式滿足 $y=a(x-1)^2+3$。



將 $(3,0)$ 代入 $y=a(x-1)^2+3$，

可得 $0=a\times(3-1)^2+3$

$a=-\dfrac{3}{4}$

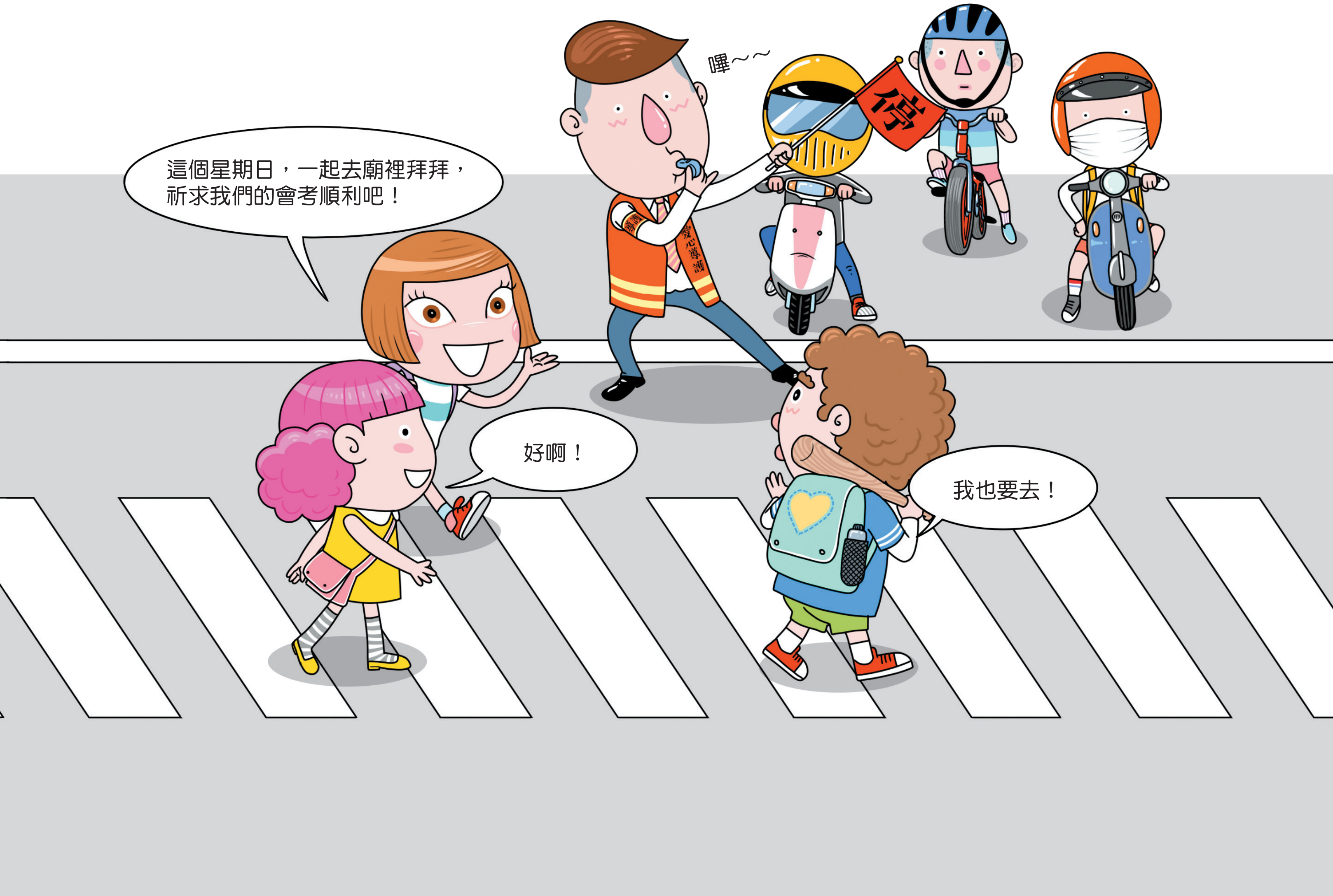
因此 $y=-\dfrac{3}{4}(x-1)^2+3$

當 $x=0$ 時，$y=-\dfrac{3}{4}(0-1)^2+3=-\dfrac{3}{4}+3=2\dfrac{1}{4}=2.25$，

也就是說，噴水頭高度必須離地面 2.25 公尺。

學會了這個方法，你就可以看出噴泉水珠移動軌跡所隱含的數學。

2 統計與機率




這些人在做什麼？
擲筊啊！
聖筊
陰面
陽面
唉呦～聖筊！
感謝天公伯！
聖筊耶！
擲筊會出現這些情況喔～
陰 陽
陽 陰
陰 陰
陽 陽
為甚麼有人一次就聖筊，
有的人卻一次也擲不到？
可是筊杯的兩面
一凸一平，機率
會一樣嗎？
擲筊時，出現的機率
會一樣嗎？配合課本
P79 的補給站，就知
道囉！

學習前哨站

本單元為學生自我複習，
教師可視班級情況決定如何運用。

回顧 1　求中位數

7 下第 5 章

由小到大排列的 10 筆資料，中位數是第 5、6 筆資料的平均；
由小到大排列的 11 筆資料，中位數是第 6 筆資料。

課前練習

一組資料有 10 個數，將資料由小到大排列分別是 1、2、4、5、8、10、12、12、15、18，其中位數是________。

回顧 2　求中位數（已分組資料）

7 下第 5 章

某健身房會員的年齡分布如右表：
因為健身房會員人數 30 是偶數，
故最中間的兩位是第 15 位與第 16 位，
$4+6=10$，
$10+12=22$，
所以此健身房會員年齡的中位數在 30～40 歲這一組。

年齡（歲）	次數（人）
10～20	4
20～30	6
30～40	12
40～50	8
合計	30

課前練習

某俱樂部會員體重分布如右表，回答下列問題：
(1) 男會員體重的中位數在__________公斤這一組。
(2) 女會員體重的中位數在__________公斤這一組。

體重（公斤）	男	女
40～45	7	27
45～50	8	35
50～55	23	43
55～60	21	16
60～65	52	6
65～70	39	8
合計	150	135

解答：1. 6　2. (1) 60～65　(2) 50～55

2-1 四分位數與盒狀圖

可搭配附件 12

1 四分位數

體育老師打算在洛基與傑克兩人之中，選出一位在運動會上與其他班級的選手進行射箭比賽，以下是他們兩人的練習記錄。

得分（分）	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
洛基					下	一	丅	下	丅	一	下
傑克				一	下			𝍵	𝍵		下

當資料數量較龐大時，除了用相對次數、累積相對次數、平均數、中位數與眾數來表示資料的特性，還可以用其他不同的方法來協助我們分析與了解資料的分布情形。

當人們想用一個數值來代表一組資料時，通常會用平均數或是中位數，但是如果想要更進一步了解資料的分布情形，則會略嫌不足。例如：將洛基與傑克射箭的分數分別由小到大排列，如下圖。

4、4、4、5、6、
6、7、7、7、8、
8、9、10、10、10

平均數：7、中位數：7

3、4、4、4、7、
7、7、7、8、8、
8、8、10、10、10

平均數：7、中位數：7

這兩組資料的平均數與中位數都是 7，但數值的分布卻不同。為了進一步了解資料分布的情形，將各組資料分別由小到大排列，再分成四等分，此時便可用各組資料 $\frac{1}{4}$、$\frac{2}{4}$、$\frac{3}{4}$ 位置的數值來了解資料分布的情形，上述位置的數值稱為**四分位數**。

其中，資料的 $\frac{1}{4}$ 位置，稱為**第 1 四分位數**，簡記為 Q_1；

資料的 $\frac{2}{4}$ 位置，稱為**第 2 四分位數**，簡記為 Q_2，也就是中位數；

資料的 $\frac{3}{4}$ 位置，稱為**第 3 四分位數**，簡記為 Q_3。

七年級學過中位數的取法，如下圖，也可以透過下面的算式求出（資料由小到大排列）。

資料有奇數筆（7 筆資料）	資料有偶數筆（8 筆資料）
○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ 4 筆 中位數 4 筆	○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ 4 筆 中位數 4 筆 （兩數平均）
$7\times\frac{1}{2}=3.5$（不是整數）， 中位數是第 4 筆資料。	$8\times\frac{1}{2}=4$（是整數）， 中位數是第 4、5 筆資料的平均。

無論哪一種取法，都是為了要使小於或等於中位數的資料至少占全部資料的 $\frac{1}{2}$，且大於或等於中位數的資料也至少占全部資料的 $\frac{1}{2}$。

在計算四分位數時，我們也用相同的方法，以洛基和傑克的射箭分數來分析，將 15 筆射箭分數由小到大排列。

第 1 四分位數（Q_1）：$15\times\frac{1}{4}=3.75$（不是整數），故取比 3.75 大的最小整數 4，

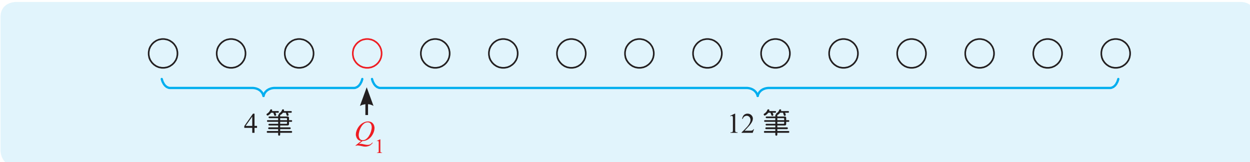
即 Q_1 為第 4 筆資料。

第 1 四分位數（Q_1）在整體資料中的位置，需符合兩個條件：

(1) 小於或等於 Q_1 的資料筆數至少占全部資料筆數的 $\frac{1}{4}$，

(2) 大於或等於 Q_1 的資料筆數至少占全部資料筆數的 $\frac{3}{4}$。

因此，Q_1 為第 4 筆資料時，小於或等於 Q_1 的資料共有 4 筆，大於或等於 Q_1 的資料筆數有 12 筆，滿足以上兩個條件。



第 2 四分位數（Q_2）：$15\times\frac{2}{4}=7.5$（不是整數），故取比 7.5 大的最小整數 8，

即 Q_2 為第 8 筆資料。

第 3 四分位數（Q_3）：$15\times\frac{3}{4}=11.25$（不是整數），故取比 11.25 大的最小整數 12，

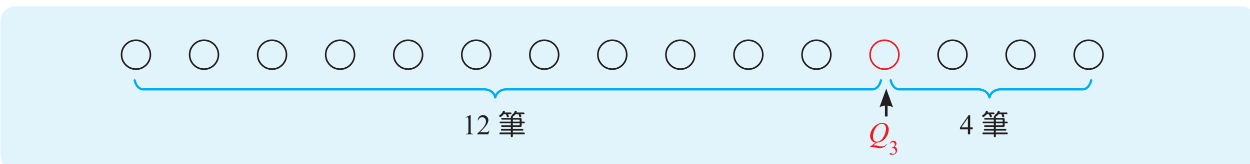
即 Q_3 為第 12 筆資料。

第 3 四分位數（Q_3）在整體資料中的位置，需符合兩個條件：

(1) 小於或等於 Q_3 的資料筆數至少占全部資料筆數的 $\frac{3}{4}$，

(2) 大於或等於 Q_3 的資料筆數至少占全部資料筆數的 $\frac{1}{4}$。

因此，Q_3 為第 12 筆資料時，小於或等於 Q_3 的資料共有 12 筆，大於或等於 Q_3 的資料筆數有 4 筆，滿足以上兩個條件。



洛基	4	4	4	5	6	6	7	7	7	8	8	9	10	10	10
傑克	3	4	4	4	7	7	7	7	8	8	8	8	10	10	10

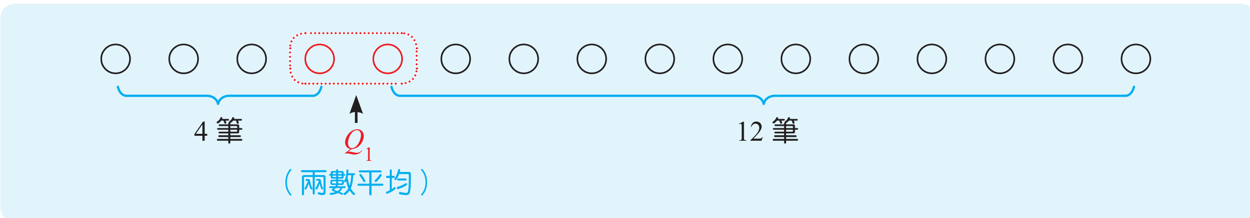
Q_3

洛基和傑克各射 15 支箭，他們的平均數與中位數都相同，於是體育老師決定以第 3 四分位數做為評選的依據。洛基射箭分數的第 3 四分位數是 9 分，表示他射到 9 分以上的箭至少有 4 支；而傑克射箭分數的第 3 四分位數是 8 分，表示他射到 9 分以上的箭至多有 3 支，因此選擇洛基參加比賽。

如果資料有 16 筆資料，那麼四分位數要怎麼求呢？

第 1 四分位數(Q_1)：$16\times\frac{1}{4}=4$（是整數），故取第 4、5 筆資料的平均為 Q_1。

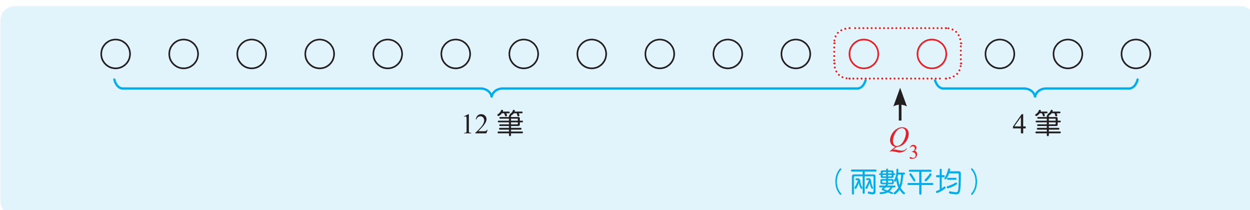
因為在第 4 筆和第 5 筆之間的所有數字（包含第 4 筆和第 5 筆）都可以滿足第 1 四分位數(Q_1)在整體資料中的位置，需符合小於或等於 Q_1 的資料筆數至少占全部資料筆數的 $\frac{1}{4}$；且大於或等於 Q_1 的資料筆數至少占全部資料筆數的 $\frac{3}{4}$，所以我們取其平均來表示。



至於第 2 四分位數與第 3 四分位數也是用同樣的方法。

第 2 四分位數(Q_2)：$16\times\frac{2}{4}=8$（是整數），故取第 8、9 筆資料的平均為 Q_2。

第 3 四分位數(Q_3)：$16\times\frac{3}{4}=12$（是整數），故取第 12、13 筆資料的平均為 Q_3。



第 m 四分位數（Q_m）的算法

將 n 筆資料由小到大排列，並計算 $n\times\dfrac{m}{4}$ 的值（$m=1$、2、3），

(1) 如果 $n\times\dfrac{m}{4}$ 不是整數，令 T 是大於 $n\times\dfrac{m}{4}$ 的最小正整數，
則 Q_m 是「第 T 筆資料」。

(2) 如果 $n\times\dfrac{m}{4}$ 是整數，令 $T=n\times\dfrac{m}{4}$，則 Q_m 是「第 T 筆資料與第（$T+1$）筆資料的平均數」。

例 1　求四分位數（奇數筆）

大英國中九年一班共有女生 17 人，該班女生的身高（單位：公分）由小到大排列分別為 150、151、151、153、155、157、158、158、159、163、163、164、165、167、168、169、170，求該班女生身高的 Q_1、Q_2、Q_3。

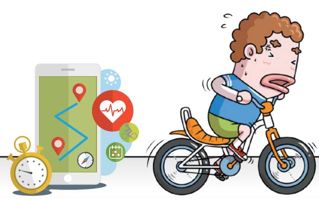
解　$17\times\dfrac{1}{4}=4.25$，$Q_1$ 是由小到大排列的第 5 筆資料，即 155 公分。

$17\times\dfrac{2}{4}=8.5$，Q_2 是由小到大排列的第 9 筆資料，即 159 公分。

$17\times\dfrac{3}{4}=12.75$，$Q_3$ 是由小到大排列的第 13 筆資料，即 165 公分。

隨堂練習

威利使用手機軟體記錄三月每日的運動時間（單位：分鐘），由小到大排列分別為 20、23、25、25、28、30、32、32、35、35、38、39、40、43、44、46、48、50、50、52、55、56、58、60、63、70、72、76、80、84、90，求威利在三月運動時間的 Q_1、Q_2、Q_3。



例2 求四分位數（偶數筆）

自評 P72 第 1 題(1)

大英國中九年一班共有男生 14 人，該班男生的身高由小到大排列，如下表：

編號	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
身高（公分）	154	155	157	159	160	161	162	164	166	167	170	173	174	177

求該班男生身高的 Q_1、Q_2、Q_3。

解 $14\times\frac{1}{4}=3.5$，Q_1 是由小到大排列的第 4 筆資料，即 159 公分。

$14\times\frac{2}{4}=7$，Q_2 是由小到大排列的第 7、8 筆資料的平均，

即 $\frac{162+164}{2}=163$ 公分。

$14\times\frac{3}{4}=10.5$，Q_3 是由小到大排列的第 11 筆資料，即 170 公分。

隨堂練習

萬能公司有 12 名員工，其每月薪水（單位：千元）由小到大排列，如下表：

編號	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
薪水（千元）	25	25	30	30	30	30	32	32	38	38	43	57

求每月薪水的 Q_1、Q_2、Q_3。

例3 已分組資料求四分位數

自評 P72 第 2 題

大英國中九年級共 300 人，數學成績如下表：

分數(分)	30～40	40～50	50～60	60～70	70～80	80～90	90～100
人數(人)	20	40	60	60	40	60	20

求九年級數學成績的 Q_1、Q_2、Q_3 分別在哪一組？

解 製作累積次數分配表，如右表。

$300\times\frac{1}{4}=75$，Q_1 是由小到大排列的第 75、76 筆資料的平均，即在 50～60 分這一組。

$300\times\frac{2}{4}=150$，Q_2 是由小到大排列的第 150、151 筆資料的平均，即在 60～70 分這一組。

$300\times\frac{3}{4}=225$，Q_3 是由小到大排列的第 225、226 筆資料的平均，即在 80～90 分這一組。

分數(分)	累積人數(人)
30～40	20
40～50	60
50～60	120
60～70	180
70～80	220
80～90	280
90～100	300

隨堂練習

某社區住戶共有 193 人，其年齡分布如下表：

年齡(歲)	10～20	20～30	30～40	40～50	50～60
人數(人)	15	27	25	40	61
年齡(歲)	60～70	70～80	80～90	90～100	
人數(人)	13	4	6	2	

求此社區人口年齡分布的 Q_1、Q_2、Q_3 分別在哪一組？

全距與四分位距

在全部資料中，**最大數值與最小數值的差稱為全距**。例如：氣象報告說今日的溫差是 10 度，是指今日溫度最高溫與最低溫相差 10 度，即當天溫度的全距是 10 度。**通常全距愈小表示資料愈集中，全距愈大表示資料愈分散**。

以妙麗和艾美的七次數學小考分數為例：

妙麗	艾美
30、45、50、60、70、75、90	60、65、70、70、75、80、80

妙麗這七次小考分數的全距是 60 分，艾美這七次小考分數的全距是 20 分。由此可知，艾美這七次小考的分數比較集中。

因為全距的計算只採用最大數值與最小數值，未考慮中間數值。如果要進一步了解中間數值的集中情形，可使用**第 3 四分位數（Q_3）與第 1 四分位數（Q_1）的差來了解，我們將（Q_3-Q_1）的值稱為四分位距**，而四分位距愈小，表示資料愈集中於中位數附近。接下來，我們來練習使用全距與四分位距判讀資料的集中情形。

隨堂練習

自評 P73 第 3 題

承上述課文，如果老師又考了兩次小考，則兩人九次小考分數由小到大排列如下，其中紅字分別為第 1、2、3 四分位數，回答下列問題：

妙麗	艾美
30、45、50、60、60、70、70、75、90	40、60、65、70、70、75、80、80、100

(1)妙麗和艾美這九次數學小考分數的全距各為多少分？

(2)妙麗和艾美這九次數學小考分數的四分位距各為多少分？

(3)利用全距和四分位距判別這九次小考，誰的分數較集中於自己的中位數附近？

接下來，將資料的最大值、最小值、四分位數等畫在統計圖中，這樣可以讓我們更清楚看出全距與四分位距的呈現狀況。

2 盒狀圖

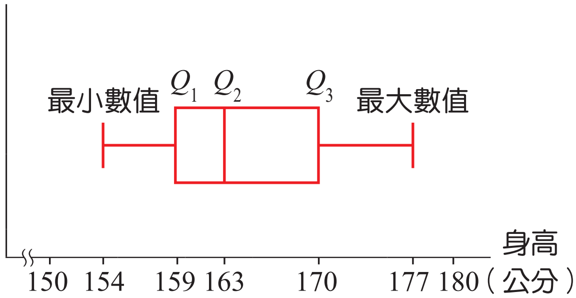
為了更容易了解資料中間（Q_1～Q_3）的分布情形，我們將資料中的最小數值、第 1 四分位數、中位數、第 3 四分位數與最大數值全部用一個統計圖形表示，稱此圖形為**盒狀圖**。

繪製盒狀圖的方法如下：

步驟 1：畫出互相垂直的橫軸與縱軸，並於橫軸上標出適當的單位。
步驟 2：從 Q_1 到 Q_3 之間，畫出長方形盒子。
步驟 3：中間的長方形盒子裡，用直線標示出中位數的位置。
步驟 4：從中間的長方形盒子向外畫直線，延伸到最大值與最小值。
步驟 5：在最大值與最小值處分別加直線段。

第 2 章

在 例2 中曾提到：大英國中九年一班共有男生 14 人，該班男生身高的第 1 四分位數（Q_1）為 159 公分，第 3 四分位數（Q_3）為 170 公分、中位數（Q_2）為 163 公分。另外，身高的最大數值為 177 公分，最小數值為 154 公分。



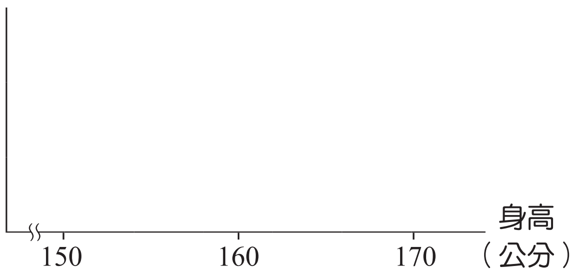
大英國中九年一班男生身高盒狀圖

我們將利用這班男生身高的資料，依照上述步驟，繪製盒狀圖如上。

隨堂練習

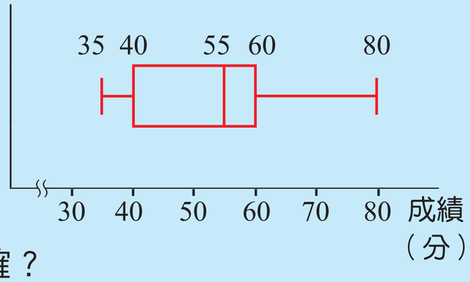
自評 P72 第 1 題(2)

大英國中九年一班共有女生 17 人，該班女生身高的最大數值為 170 公分、最小數值為 150 公分、第 1 四分位數為 155 公分、第 3 四分位數為 165 公分、中位數為 159 公分，依據所給予的資料，製作該班女生身高的盒狀圖。



例4 判讀盒狀圖

安琪全班 40 人參加學校數學能力測驗，右圖為全班成績的盒狀圖，回答下列問題：



(1)全班成績都在 35 分到 80 分嗎？

(2)全班成績的四分位距為多少分？

(3)安琪成績 58 分，在班上的排名敘述何者正確？

(A)在第 11～20 名之間 (B)在第 21～30 名之間 (C)在第 31～40 名之間

解

(1) ∵最低分為 35 分，最高分為 80 分，∴全班成績都在 35 分到 80 分。

(2)由上圖可知，∵$Q_1=40$，$Q_3=60$，∴四分位距$=60-40=20$(分)。

(3) ∵成績 58 分在 55～60 分之間，

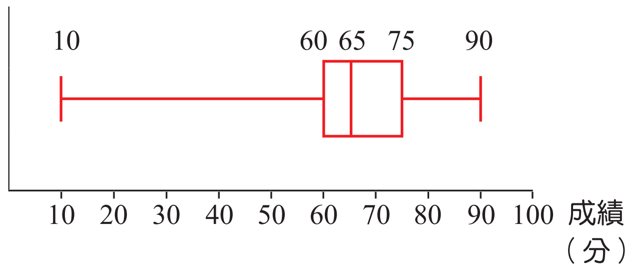
由盒狀圖可知在中位數和第 3 四分位數之間，

$40\times\frac{1}{2}=20$，$40\times\left(1-\frac{3}{4}\right)=10$，

∴成績 58 分大約排在第 11～20 名之間，故選(A)。

隨堂練習

威利全班有 32 人參加學校的英文聽力測驗，下圖為全班測驗成績的盒狀圖，回答下列問題：



(1)此次測驗的四分位距為多少分？

(2)若威利的成績是 63 分，則威利在班上的排名敘述何者正確？

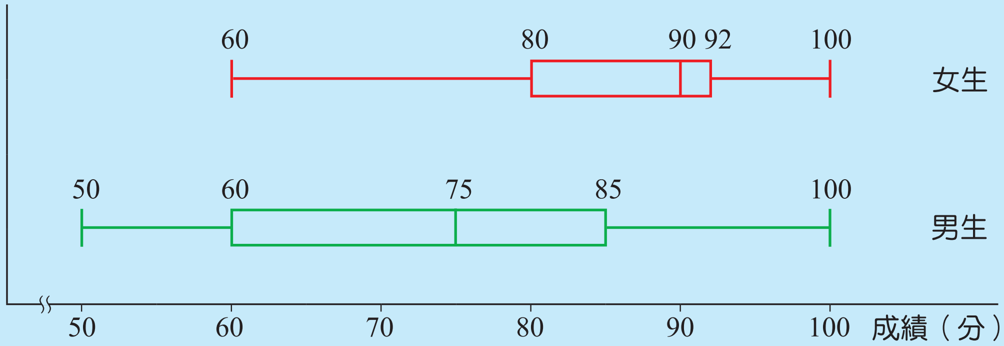
(A)在第 1～8 名之間 (B)在第 9～16 名之間

(C)在第 17～24 名之間 (D)在第 25～32 名之間

同時分析討論兩組以上性質相近的資料時，可以將盒狀圖畫在一起，這樣可以更清楚的看出這些資料分布的情形。

例5 判讀盒狀圖

下圖是永欣國中九年級男、女生各 100 人的第一次段考數學成績盒狀圖，依據盒狀圖回答下列問題：



(1) 女生成績的中位數與男生成績的中位數相差多少分？

(2) 女生成績的四分位距與男生成績的四分位距相差多少分？

解

(1) ∵女生成績的中位數為 90 分，

男生成績的中位數為 75 分，

$90-75=15$，

∴中位數相差 15 分。

(2) ∵女生成績的 Q_1 為 80 分，Q_3 為 92 分，

$92-80=12$，

∴女生的四分位距為 12 分。

∵男生成績的 Q_1 為 60 分，Q_3 為 85 分，

$85-60=25$，

∴男生的四分位距為 25 分。

又 $25-12=13$，

故女生成績的四分位距與男生成績的四分位距相差 13 分。

我們可以藉由 例5 的圖中資訊進行以下探討：

❶ 女生和男生的成績分布範圍，哪一個較廣？

⑴女生成績的全距為 100－60＝40（分），

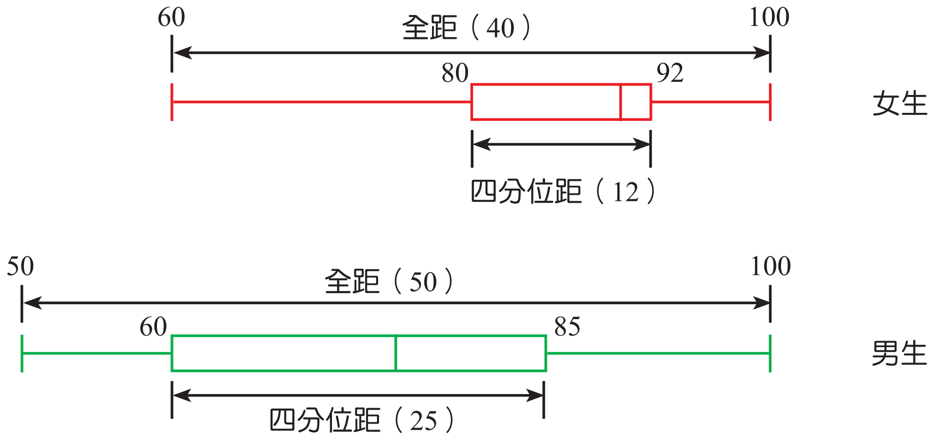
男生成績的全距為 100－50＝50（分），

表示男生成績從最低到最高的分布範圍比女生廣。

⑵女生成績的四分位距為 92－80＝12（分），

男生成績的四分位距為 85－60＝25（分），

表示男生成績從 Q_1 到 Q_3 的分布範圍比女生廣。



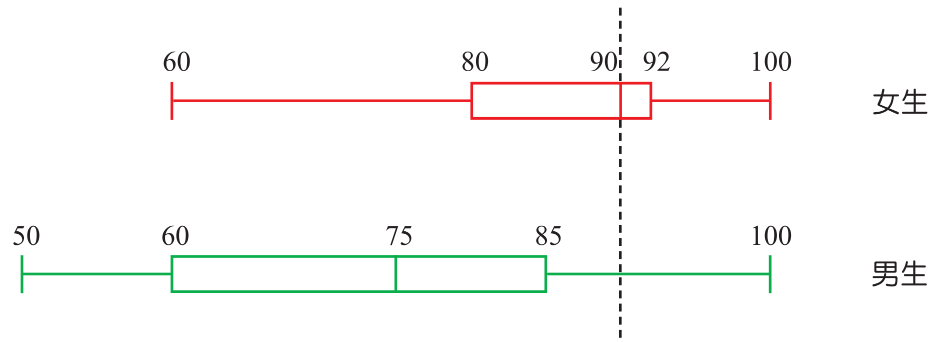
❷女生和男生中，哪一個的成績在 90 分以上人數較多？

⑴因為女生成績的中位數為 90 分，表示約有一半的女生成績達 90 分以上。

⑵因為男生成績的 Q_3 是 85 分，表示約有 $\frac{1}{4}$ 的男生成績大於或等於 85 分。

⑶因為男、女生人數都是 100 人，所以 90 分以上的女生約有 50 人；

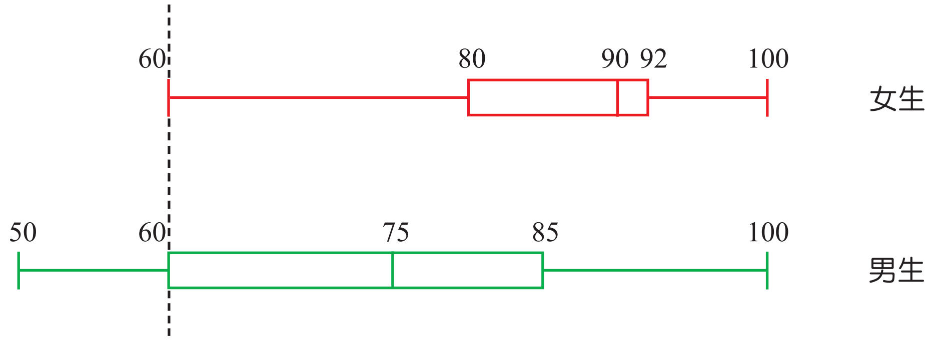
而男生 85 分以上約有 25 人，所以 90 分以上的人數，以女生較多。



❸不及格的人都是女生或男生？

(1)因為女生最低分為 60 分，所以女生沒有人不及格。

(2)因為男生最低分為 50 分，所以男生一定有人不及格。



盒狀圖可以橫著畫，也可以直著畫，例如下方的 隨堂練習 ，盒狀圖即是直的。

第 2 章

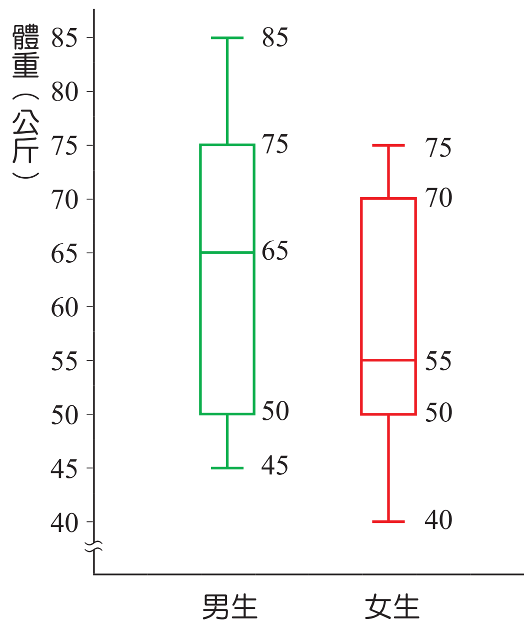
隨堂練習

自評 P73 第 4 題

下圖是永欣國中九年級男、女生體重的盒狀圖，依據盒狀圖回答下列問題：

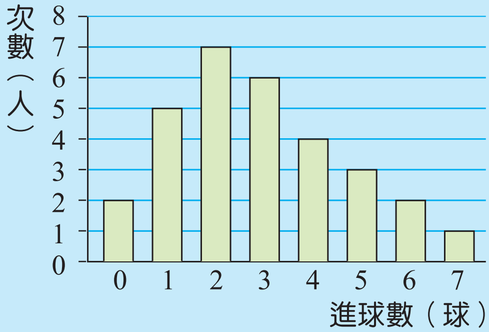
(1)女生體重的中位數與男生體重的中位數相差多少公斤？

(2)女生體重的四分位距與男生體重的四分位距相差多少公斤？



例6 由長條圖繪製盒狀圖

右圖是九年十班學生 30 人投籃進球次數的長條圖，繪製進球數的盒狀圖。



解 求出 Q_1、Q_2、Q_3、最小值與最大值。

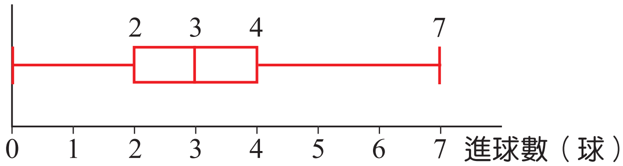
①$30\times\frac{1}{4}=7.5$，進球數是由小到大排列的第 8 人，$\therefore Q_1=2$（球）。

②$30\times\frac{2}{4}=15$，進球數是由小到大排列的第 15、16 人的平均，$\therefore Q_2=3$（球）。

③$30\times\frac{3}{4}=22.5$，進球數是由小到大排列的第 23 人，$\therefore Q_3=4$（球）。

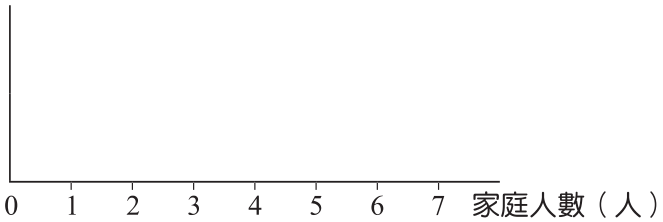
④進球數的最小值是 0 球，最大值是 7 球。

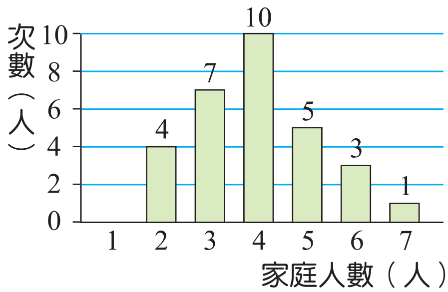
由上述內容所繪製的盒狀圖如右：



隨堂練習

右圖是妙麗班上同學 30 人的家庭人數長條圖，繪製家庭人數的盒狀圖。



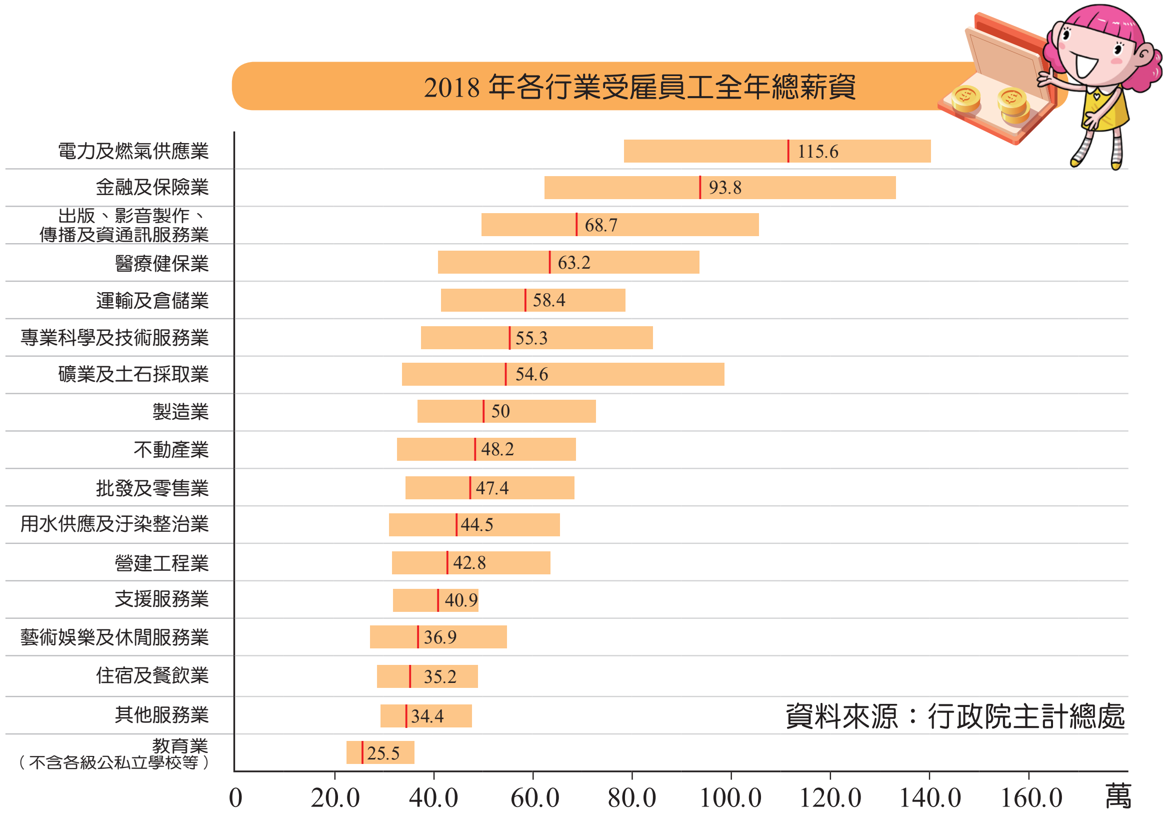


哪一種行業的收入是領頭羊？

行政院主計總處公布 2018 年受僱員工全年薪資的中位數為 49 萬元，平均每月約 4.1 萬元。全年總薪資平均數為 62.9 萬元，近 67% 員工薪資低於平均數。在薪資統計中，因為薪水往往受到極端高薪而拉高整體平均，所以平均數與中位數出現落差是常態。掌握分布落於中間 50% 的薪資，較能了解全民薪資狀況。

下圖為各行業受僱員工全年總薪資，因為沒有畫出最高及最低薪資，所以只呈現盒狀圖盒子的部分。圖中橘色長條越往右，表示此行業薪資較高；而橘色長條的長短，則顯示此行業薪資的四分位距，因此，我們可以由圖形概略得知各行業的薪資集中情形。例如：「電力及燃氣供應業」是產業常勝軍，2018 年電力及燃氣供應業全年總薪資中位數為 115.6 萬元。

全年總薪資中位數未達 40 萬元的行業分別為「藝術娛樂及休閒服務業」、「住宿及餐飲業」、「其他服務業」及「教育業」(泛指補教業)。主計總處指出，可能因為這些產業有不少部分工時員工，影響了年薪總額的計算。



本單元為補充課程，
教師視班級情況決定如何使用。

盒狀圖

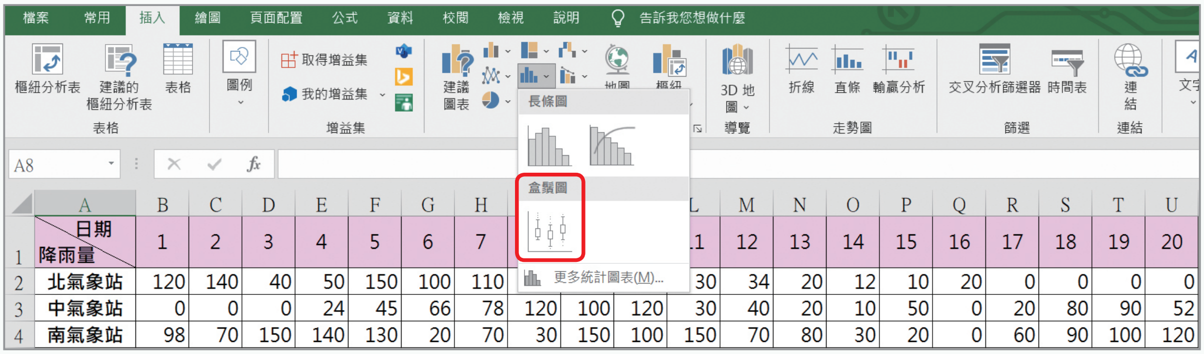
利用試算表繪製盒狀圖 科技

我們可以利用電腦軟體繪製統計圖，這樣會更方便有效率且美觀。

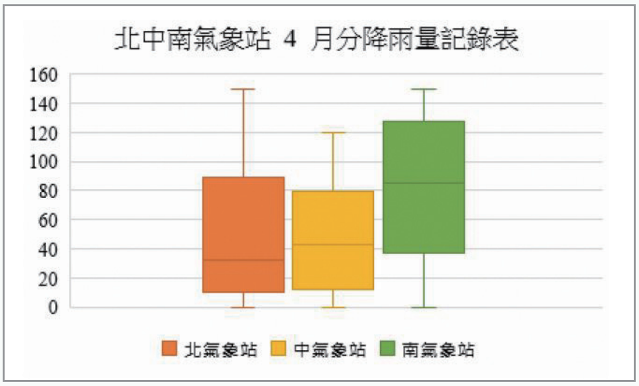
步驟 1： 開啟 EXCEL（需使用 2016 以後的版本），並將臺灣北中南三個氣象站某年 4 月 1 日至 20 日的降雨情形，記錄成下表，資料輸入如下。

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U
1	日期 降雨量	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
2	北氣象站	120	140	40	50	150	100	110	55	30	40	30	34	20	12	10	20	0	0	0	0
3	中氣象站	0	0	0	24	45	66	78	120	100	120	30	40	20	10	50	0	20	80	90	52
4	南氣象站	98	70	150	140	130	20	70	30	150	100	150	70	80	30	20	0	60	90	100	120

步驟 2： 選取**步驟 1** 的資料範圍 A2：U4，並在「插入」功能區選擇  的「盒鬚圖」，即可出現盒狀圖。（註：在 EXCEL 軟體中，盒狀圖稱為盒鬚圖。）



步驟 3： 輸入圖表標題及單位，即可完成。



重點回顧

1 四分位數

⑴將資料由小到大排列，

①在全部資料 $\frac{1}{4}$ 位置的數值稱為第 1 四分位數，以 Q_1 表示。

②在全部資料 $\frac{2}{4}$ 位置的數值稱為第 2 四分位數，以 Q_2 表示。

③在全部資料 $\frac{3}{4}$ 位置的數值稱為第 3 四分位數，以 Q_3 表示。

⑵將 n 筆資料由小到大排列，並計算 $n\times\frac{m}{4}$ 的值（$m=1$、2、3），

①如果 $n\times\frac{m}{4}$ 不是整數，令 T 是大於 $n\times\frac{m}{4}$ 的最小正整數，

則 Q_m 是「第 T 筆資料」。

②如果 $n\times\frac{m}{4}$ 是整數，令 $T=n\times\frac{m}{4}$，則 Q_m 是「第 T 筆資料與第（$T+1$）筆資料的平均數」。

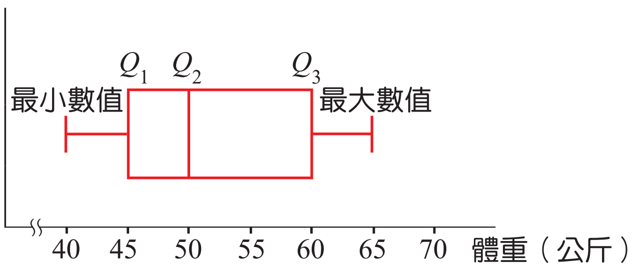
2 全距、四分位距與盒狀圖

⑴全部資料中，最大數值與最小數值的差稱為全距。

⑵第 3 四分位數與第 1 四分位數的差（Q_3-Q_1）稱為四分位距。

⑶將整體資料中最小數值、第 1 四分位數、中位數、第 3 四分位數與最大數值，這五個資料繪製成長方形盒子圖，稱為盒狀圖。

例 下圖是笠楊班上同學體重的盒狀圖。



⑴全距為 $65-40=25$（公斤）。

⑵四分位距為 $60-45=15$（公斤）。

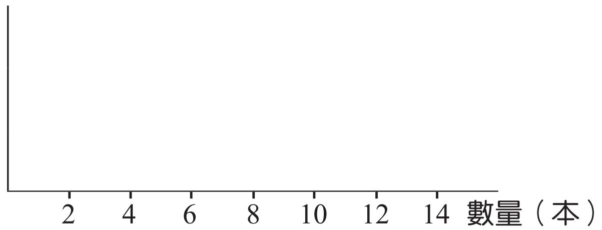
2-1 自我評量

1 九年丁班學生購買課外書籍的數量如下表，回答下列問題：

數量（本）	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
次數（人）	2	3	5	6	8	9	6	4	4	2	1

(1)該班學生購買課外書籍數量的 Q_1 與 Q_3 是多少？ 課 P60 例 2

(2)繪製該班學生購買課外書籍數量的盒狀圖。 課 P63 隨堂



2 下表是九年乙班 40 位學生體重的累積次數分配表，回答下列問題： 課 P61 例 3

(1)該班學生體重的 Q_1 在哪一組？

(2)該班學生體重的 Q_3 在哪一組？

體重（公斤）	累積人數（人）
45～50	4
50～55	12
55～60	17
60～65	24
65～70	32
70～75	40

③ 大和國中九年級 90 位學生，身高(單位：公分)由矮到高排列，如下表：

145	145	146	146	147	150	150	150	150	150
151	151	151	152	152	153	153	153	153	153
154	154	155	155	155	155	155	155	155	155
155	155	155	156	156	156	158	158	159	160
161	161	162	162	162	163	163	163	163	163
164	164	164	164	164	165	165	165	165	165
168	168	168	168	169	169	169	170	170	172
173	174	174	175	175	175	175	175	176	176
176	177	177	179	180	180	181	181	182	182

(1)求該校九年級學生身高的全距為多少公分？ 課 P62 隨堂

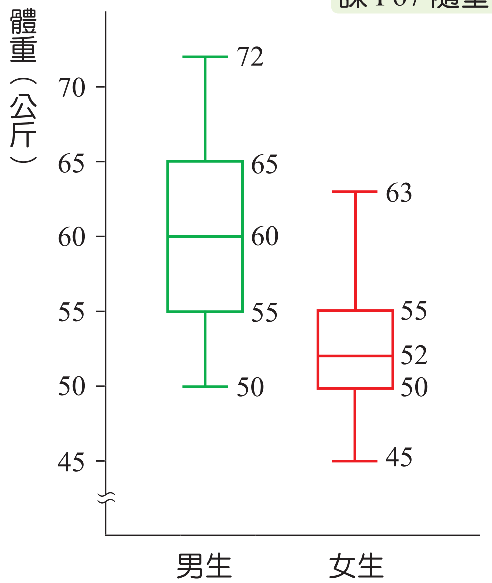
(2)求該校九年級學生身高的四分位距為多少公分？ 課 P62 隨堂

④ 大仁國中男、女生各有 200 人，下圖是他們的體重盒狀圖，回答下列問題：

課 P67 隨堂

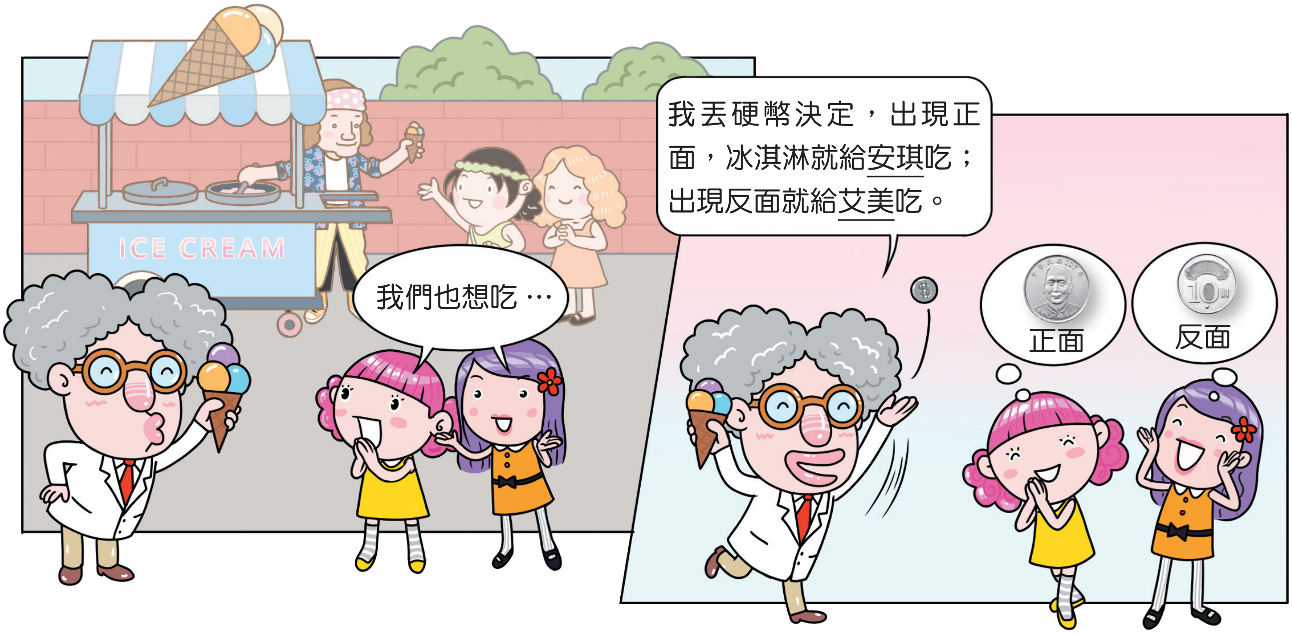
(1)男生體重的中位數與女生體重的中位數相差多少公斤？

(2)體重在 50～55 公斤這一組中，男生與女生人數何者較多？



2-2 機率

1 試驗與機率




正面　　反面

生活中，我們常用投擲硬幣作決定，投擲硬幣會出現正面、反面兩種可能。如果硬幣出現正反面的可能性都相同，我們也可以說投擲硬幣發生正面或反面的機會相同，稱這個硬幣是**公正的**。在數學上，我們稱出現正面和反面的**機率**都是 $\frac{1}{2}$。

同樣的，投擲一顆骰子可能會出現 1、2、3、4、5、6 點的情形，我們假設每一種點數出現的可能性都相同，或者說發生六種點數的機會都相同，稱這個骰子是公正的。


1 點　2 點　3 點　4 點　5 點　6 點

當所有可能出現的結果有 n 種，且每一種結果發生的機會都相同，則稱每一種結果發生的機率是 $\frac{1}{n}$，所有可能出現結果的機率總和是 1。例如：投擲一顆公正的骰子，各種點數出現的機率都是 $\frac{1}{6}$。

Thinking

投擲一枚公正硬幣兩次，是否一定會出現一次正面和一次反面呢？

像投擲硬幣或骰子這種可重複執行的程序，稱為試驗。在試驗中，任何想要觀察的情況都可稱為**事件**，事件可能發生，也可能不會發生。例如：投擲一顆公正的骰子一次，「出現 4 點」、「出現偶數點」、「出現奇數點」、「出現 7 點」、…… 等都是事件。

投擲一顆公正的骰子所有可能出現的點數有 6 種，若其中 A 事件表示出現的點數為偶數，當出現的點數是 2 點、4 點或 6 點時，我們就說這個事件發生了。因為 A 事件可能的結果有 3 種，所以 A 事件發生的機率為 $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$。

某事件發生的機率

如果一個試驗所有可能的結果有 n 種，這 n 種結果發生的機會都相同，若 A 事件包含了其中 m 種（$m \leq n$）可能的結果，我們就說 A 事件發生的機率是 $\frac{m}{n}$。

$$A\text{ 事件發生的機率}=\frac{A\text{ 事件所含可能結果的個數}}{\text{試驗所有可能結果的個數}}$$

因為任何事件可能結果的個數，一定小於或等於試驗中所有可能結果的個數，所以任何事件發生的機率 P 都滿足 $0 \leq P \leq 1$，若事件的機率是 1，表示此事件一定會發生；若事件的機率是 0，表示此事件肯定不會發生。

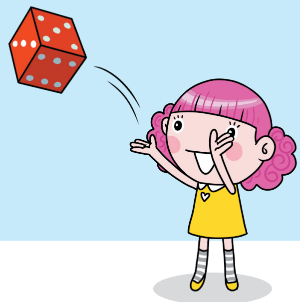
例 1 求擲骰子的機率

投擲一顆公正的骰子，回答下列問題：

(1)出現 3 點的機率是多少？

(2)出現奇數點的機率是多少？

(3)出現 7 點的機率是多少？



解 (1)∵每一面出現的機率都一樣，

所有可能的結果有 1、2、3、4、5、6，共 6 種，

故出現 3 點的機率是 $\frac{1}{6}$。

(2)∵點數為奇數有 1、3、5，共 3 種，

∴出現奇數點的機率是 $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$。

(3)∵點數不會出現 7 點，

∴出現 7 點的機率是 0。

隨堂練習

投擲一顆公正的骰子，回答下列問題：

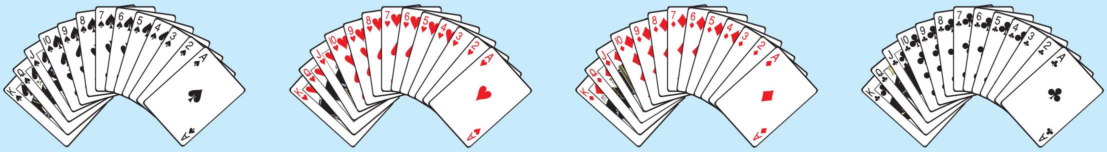
(1)點數大於 4 的機率是多少？

(2)點數小於 4 的機率是多少？

(3)點數小於 7 的機率是多少？

例2 求抽撲克牌的機率

自評 P86 第 1 題



如圖，一副撲克牌有 52 張（不含鬼牌），分為黑桃（♠）、紅心（♥）、方塊（♦）及梅花（♣）4 種花色，每種花色各有 13 張，分別是 A、2、3、4、5、6、7、8、9、10、J、Q、K，從撲克牌中任取 1 張，回答下列問題：

(1) 抽到方塊 2 的機率是多少？

(2) 抽到 J、Q、K 的機率是多少？

解 (1) 一副撲克牌有 52 張，每張的花色和點數都不同，

從這副牌中任取 1 種花色和點數的機率是 $\frac{1}{52}$，

$\therefore$ 抽到方塊 2 的機率是 $\frac{1}{52}$。

(2) $\because$ 一副撲克牌，有四種花色，每一種花色都有 J、Q、K 各 1 張，

$\therefore$ 一副撲克牌共有 12 張牌是 J、Q、K，

故抽到 J、Q、K 的機率是 $\frac{12}{52}=\frac{3}{13}$。

隨堂練習

一副撲克牌有 52 張（不含鬼牌），從撲克牌中任取 1 張，則：

(1) 抽到 A 的機率是多少？

(2) 抽到花色是黑桃的機率是多少？

如圖，一袋中有 12 顆相同大小的球，分別是 5 顆紅球、4 顆藍球與 3 顆綠球，每一球被取出的機率都相等，如果從袋中任意取出一球，那麼在這 3 種顏色的球中，取出紅球、藍球、綠球的機率是否皆為 $\frac{1}{3}$ 呢？

因為每一球被取出的機率都相等，而袋中有 5 顆紅球、4 顆藍球、3 顆綠球，所以從這 12 顆球中，任取一球為紅球的機率是 $\frac{5}{12}$，藍球的機率是 $\frac{4}{12}$，綠球的機率是 $\frac{3}{12}$。

例3 求取球的機率

自評 P86 第 2 題

老師為了分配打掃區域，在一個袋子中放入 10 顆相同大小的球，分別是 7 顆紅球、3 顆白球，每顆球被取出的機率都相等。

老師說：「抽中紅球，表示打掃教室；抽中白球，表示打掃外掃區。」

若傑克是第 1 個從袋中取球的人，則他打掃教室的機率是多少？

解 ∵每顆球被取出的機率相等，而袋中有 7 顆紅球，

∴從這 10 顆球中，任意取出一球為紅球的機率是 $\frac{7}{10}$，

所以傑克打掃教室的機率是 $\frac{7}{10}$。

隨堂練習

星光百貨舉辦刮刮樂活動，預計發出 1000 張刮刮樂給前 1000 名入場的客人，所有獎品如右表。如果洛基為當天第一位貴賓，且每張刮刮樂被洛基拿到的機率相等，回答下列問題：

(1) 洛基抽中汽車的機率是多少？

(2) 洛基抽中禮券的機率是多少？

獎品	數量
汽車	1
腳踏車	10
1000 元禮券	20
500 元禮券	100

如果博士不是以硬幣的正反面決定，而是以投擲礦泉水瓶蓋來作決定冰淇淋給誰，你覺得這是公平的嗎？

探索活動 投擲瓶蓋的試驗

1. 拿一個礦泉水瓶蓋，用相同的高度及方式，連續投擲瓶蓋 20 次到桌面，將自己投擲的結果填入下表。

瓶蓋朝上

瓶蓋朝下

結果	次數（次）					合計
	自己	同學 1	同學 2	同學 3	同學 4	
瓶蓋朝上次數（次）						
瓶蓋朝下次數（次）						
合計						

2. 再找同學四人，將投擲的結果統計在上表。

3. 根據統計的結果，瓶蓋朝上和瓶蓋朝下出現的次數是否相同？

由 探索活動 可知，投擲一個礦泉水瓶蓋，瓶蓋朝上或朝下的機率不一定相等，也就是瓶蓋朝上或下的機率不一定是 $\frac{1}{2}$。若每一種結果發生的機率不完全相等時，則每一種結果發生的機率未必是 $\frac{1}{n}$。

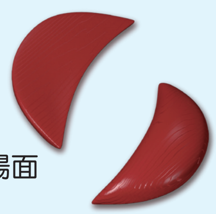
補給站 擲筊

社會

擲筊是一種道教與民間信仰問卜的儀式，普遍流傳於傳統華人社會。

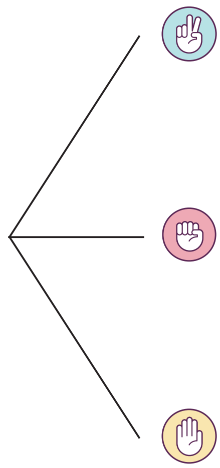
「筊杯」多用竹、木等材質做成立體的新月形狀。通常擲筊是二個為一對，如果擲出一個是陽面，另一個是陰面，即為聖杯。

因為筊杯的陰陽兩面，一面是平面，一面是凸面，且使用後也可能磨損等原因，因此，陽面、陰面出現的機率並不相等。

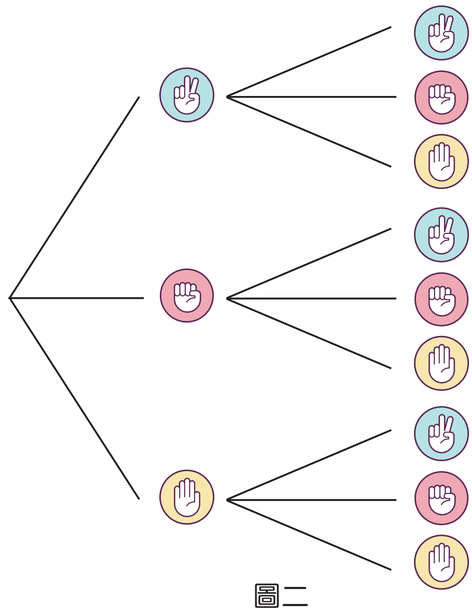


2 樹狀圖

討論兩種不同事件同時出現的機率，我們可以把可能出現的結果逐一畫出來分析。例如：如果出剪刀、石頭或布的機率相等，我們可以畫出猜拳所有可能的結果，如圖一，像這樣的圖稱為**樹狀圖**。而如果兩個人進行猜拳遊戲，則所有可能的結果也可以用樹狀圖表示，如圖二。



圖一



圖二

隨堂練習

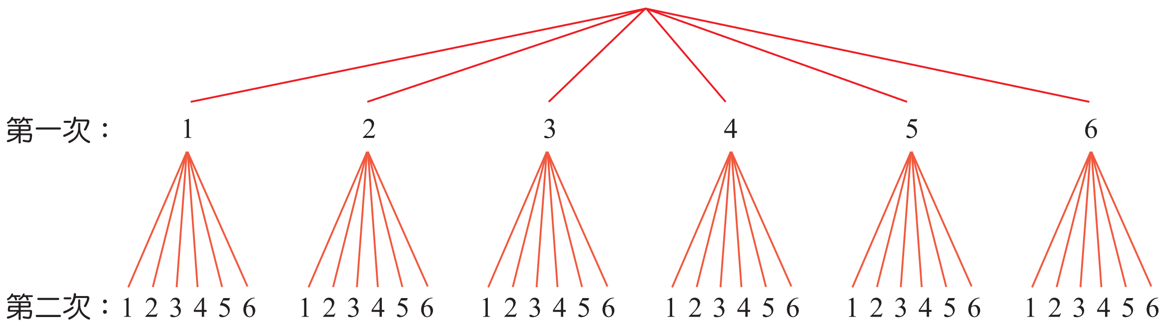
自評 P86、87 第 3、4 題

傑克有紅、黃、藍、綠四件不同顏色的上衣，A、B、C 三條不同樣式的褲子，任一件上衣都可以和任一條褲子搭配，回答下列問題：

(1) 今天傑克要外出，想從四件上衣與三條褲子中，各任意選出一種，則共有多少種選擇方式？

(2) 若每一件上衣與每一條褲子被選到的機會都相同，則選到紅色上衣搭配 A 褲子的機率是多少？

我們可以利用樹狀圖來討論投擲一顆公正骰子兩次的情形，由下圖可發現，投擲一顆公正骰子兩次的情形共有 36 種，每一種情形出現的機率都相等。



這 36 種情形可以用數對來表示，設第一次骰子的點數是 a 點，第二次骰子的點數是 b 點。用數對 (a, b) 記錄這兩次骰子出現點數的情形，可能會出現的數對有 36 種，如下：

(1，1)、(1，2)、(1，3)、(1，4)、(1，5)、(1，6)、
(2，1)、(2，2)、(2，3)、(2，4)、(2，5)、(2，6)、
(3，1)、(3，2)、(3，3)、(3，4)、(3，5)、(3，6)、
(4，1)、(4，2)、(4，3)、(4，4)、(4，5)、(4，6)、
(5，1)、(5，2)、(5，3)、(5，4)、(5，5)、(5，6)、
(6，1)、(6，2)、(6，3)、(6，4)、(6，5)、(6，6)。

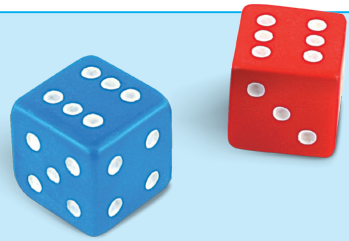
例4 求擲兩顆骰子的機率

自評 P87 第 5 題

同時投擲藍色及紅色兩顆公正的骰子，回答下列問題：

(1)點數和為 7 的機率是多少？

(2)點數和大於 9 的機率是多少？



解 設藍色骰子的點數是 a 點，紅色骰子的點數是 b 點，則可能出現的數對有 36 種，如下：

(1, 1)、(1, 2)、(1, 3)、(1, 4)、(1, 5)、(1, 6)、
(2, 1)、(2, 2)、(2, 3)、(2, 4)、(2, 5)、(2, 6)、
(3, 1)、(3, 2)、(3, 3)、(3, 4)、(3, 5)、(3, 6)、
(4, 1)、(4, 2)、(4, 3)、(4, 4)、(4, 5)、(4, 6)、
(5, 1)、(5, 2)、(5, 3)、(5, 4)、(5, 5)、(5, 6)、
(6, 1)、(6, 2)、(6, 3)、(6, 4)、(6, 5)、(6, 6)。

(1)點數和為 7 的情形有：

(1, 6)、(2, 5)、(3, 4)、(4, 3)、(5, 2)、(6, 1)，共 6 種，

故點數和為 7 的機率是 $\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$。

(2)點數和大於 9 的情形只有 10 點、11 點與 12 點，

點數和為 10 的情形有：(4, 6)、(5, 5)、(6, 4)，共 3 種，

點數和為 11 的情形有：(5, 6)、(6, 5)，共 2 種，

點數和為 12 的情形有：(6, 6)，共 1 種，

∴出現點數和大於 9 的情形共有 6 種，其機率是 $\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$。

隨堂練習

同時投擲兩顆公正的骰子，求下列各點數和的機率。

點數和	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
機率	$\frac{\quad}{36}$	$\frac{\quad}{36}$	$\frac{\quad}{36}$	$\frac{\quad}{36}$	$\frac{\quad}{36}$	$\frac{\quad}{36}$	$\frac{\quad}{36}$	$\frac{\quad}{36}$	$\frac{\quad}{36}$	$\frac{\quad}{36}$	$\frac{\quad}{36}$

例5 樹狀圖的應用

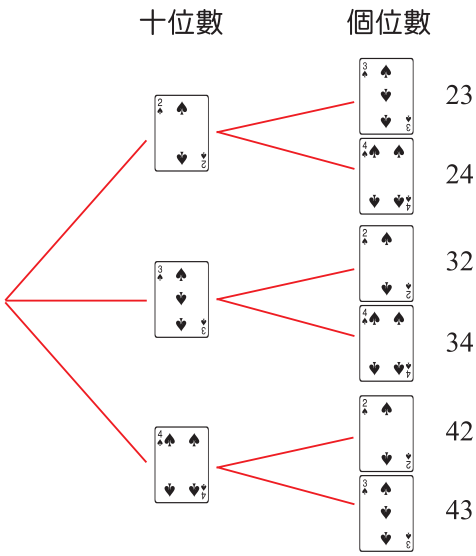
自評 P87 第 6 題

用 、、 三張撲克牌，任意抽取兩張排成一個二位數，則：

⑴排出的二位數為偶數的機率是多少？

⑵排出的二位數大於 40 的機率是多少？

解 將所有可能排出的二位數，用樹狀圖排列如下：



共可排出 6 個不同的二位數，每一個數出現的機率都相等。

⑴排出的偶數有 24、32、34、42 共 4 個，故排出偶數的機率是 $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$。

⑵排出大於 40 的數有 42、43 共 2 個，故排出大於 40 的機率是 $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$。

隨堂練習

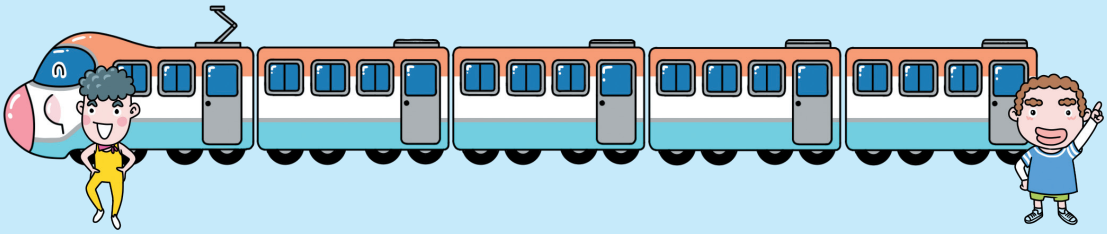
承 例5，回答下列問題：

⑴排出的二位數為 3 的倍數的機率是多少？

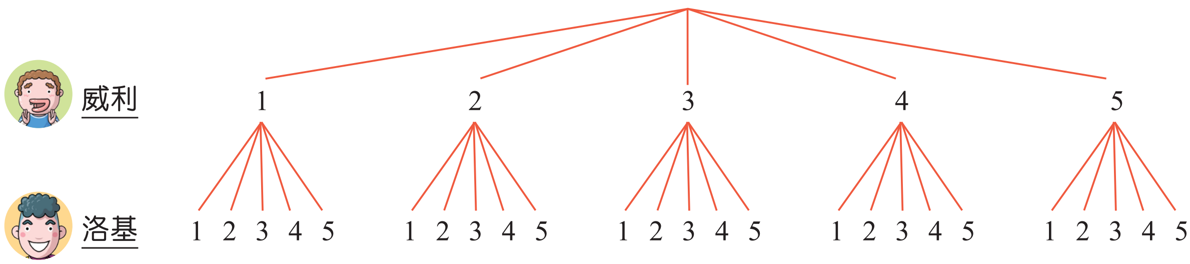
⑵排出的二位數為質數的機率是多少？

例6 樹狀圖的應用

威利、洛基兩人坐同一班火車前往 A 地，已知此班火車共有 5 節車廂，假設購票買到每個車廂的機會都相同，則兩人剛好買到同車廂座位的機率是多少？



解 設此 5 節車廂的編號為 1、2、3、4、5，則威利、洛基從車廂上車的情況如下方的樹狀圖所示：



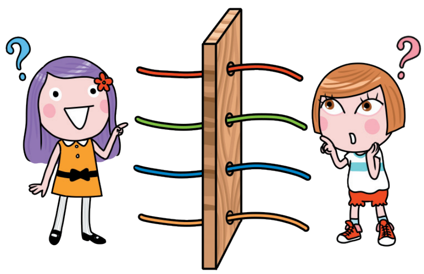
共有 $5\times5=25$（種）情況，其中兩人從同一節車廂上車的情況有

$(1, 1)$、$(2, 2)$、$(3, 3)$、$(4, 4)$、$(5, 5)$，共 5 種。

$\therefore$兩人剛好買到同車廂座位的機率是 $\dfrac{5}{25}=\dfrac{1}{5}$。

隨堂練習

如圖，有四條繩子穿過一片木板，艾美與妙麗兩人分別站在木板的左、右兩邊，並各選一條繩子。若每邊每條繩子被選中的機會相同，則兩人選到同一條繩子的機率是多少？



重點回顧

❶ 機率

假設一個試驗所有可能的結果有 n 種，若每一種結果發生的機會都相同，我們就說每一種結果發生的機率都是 $\frac{1}{n}$ 。

例 投擲一枚拾元硬幣可能出現的情形有正、反面 2 種，若每種結果發生的機會都相同，我們就說正面或反面發生的機率都是 $\frac{1}{2}$ 。

❷ 事件

在試驗中，任何想要觀察的情況都可以稱為事件。

例 投擲一顆公正的骰子一次，「出現偶數點」、「出現 1 點」、…… 等都是事件。

❸ 某事件發生的機率

如果一個試驗所有可能的結果有 n 種，這 n 種結果發生的機會都相同，若 A 事件包含了其中 m 種（$m\leq n$）可能的結果，我們就說 A 事件發生的機率是 $\frac{m}{n}$，且 $0\leq\frac{m}{n}\leq 1$。

(1) A 事件發生的機率 $=\dfrac{A\text{ 事件所含可能結果的個數}}{\text{試驗所有可能結果的個數}}$，且發生的機率都是一個從 0 到 1 的數值。

(2) 若事件的機率是 1，表示此事件一定會發生。

(3) 若事件的機率是 0，表示此事件肯定不會發生。

例 投擲一顆公正的骰子一次，若每一種結果發生的機會都相同，則：

(1) 出現偶數點的機率是 $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$ 。

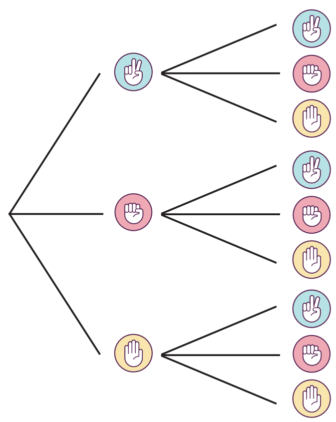
(2) 出現點數小於 7 點的機率是 $\frac{6}{6}=1$。

(3) 出現 7 點的機率是 0。

❹ 樹狀圖

將所有可能出現結果以樹枝狀畫出，稱為樹狀圖。

例 猜拳遊戲中，可能出現剪刀、石頭、布。
兩個人猜拳，其可能出現的結果，如右圖。



2-2自我評量

① 班上共有 30 位同學，老師依每位同學的座號製作 30 支籤，編號為 1、2、3、4、……、29、30，每一支籤被抽出的機率都相等，任意抽出一支籤，則此籤的號碼是 4 的倍數的機率是多少？ 課 P77 例 2

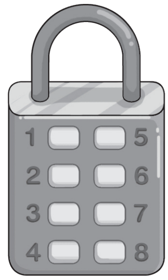
② 如圖，有一個轉盤共等分為 20 格，其中有 5 格為黃色，7 格為藍色，其餘為白色。若安琪轉動轉盤，則： 課 P78 例 3

(1)停在黃色的機率是多少？

(2)停在白色的機率是多少？

③ 假設男孩與女孩出生的機率相等，在一個有 2 名小孩的家庭中，2 名都是女孩的機率是多少？ 課 P80 隨堂

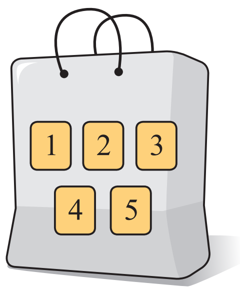
④ 威利使用號碼鎖來鎖腳踏車，號碼鎖樣式如右圖。威利忘記自己設定的號碼，只記得左右兩邊各設一個數字，則威利一次就猜對號碼的機率是多少？ 課 P80 隨堂



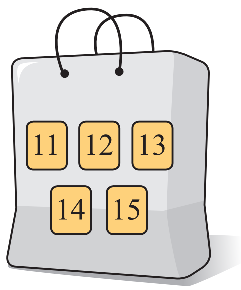
第 2 章

⑤ 同時投擲兩顆公正的骰子，則點數和小於 5 的機率是多少？ 課 P82 例 4

⑥ 已知甲袋有 5 張相同大小的卡片，號碼為 1、2、3、4、5，乙袋有 5 張相同大小的卡片，號碼為 11、12、13、14、15。假設每張卡片被取出的機率都相等，分別從甲、乙兩袋各取一張卡片，則此兩張卡片上的號碼總和為偶數的機率是多少？ 課 P83 例 5



甲袋



乙袋

自我挑戰

本單元為統整課程，由學生自行挑戰，教師視班級情況決定如何運用。

桌上放有甲、乙兩個箱子，其中甲箱內有 49 顆球，分別標記號碼 1～49，乙箱內沒有球。已知艾美從甲箱內拿出 25 顆球放入乙箱後，發現乙箱內球的號碼的第 1 四分位數為 10，回答下列問題，並寫出你的計算過程。

⑴若此時乙箱內有 a 顆球的號碼小於 10，有 b 顆球的號碼大於 10，求 a、b 的值。

解

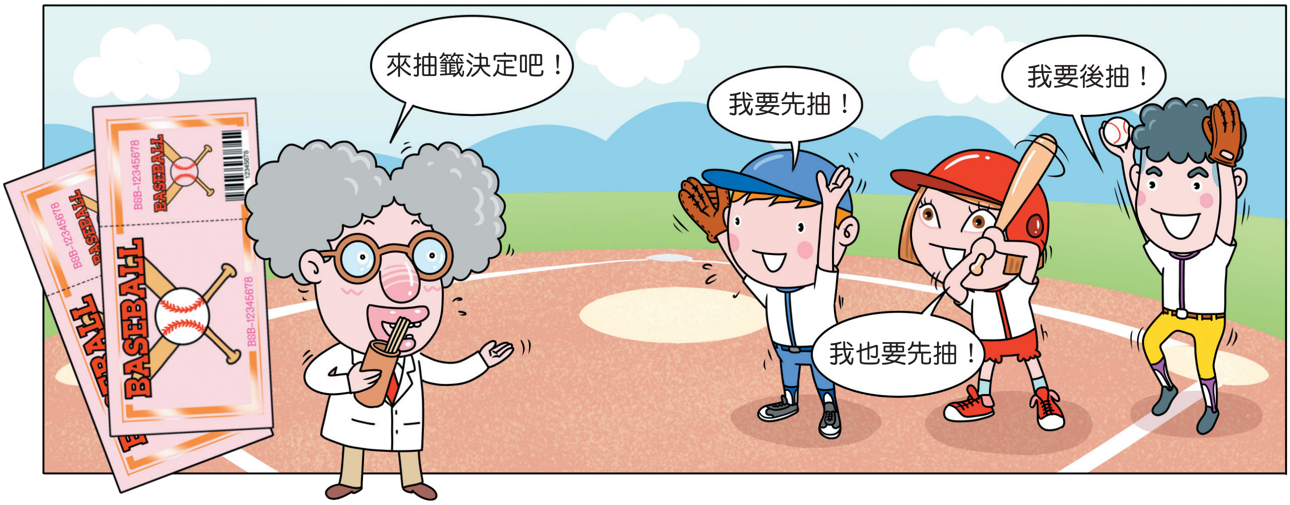
⑵承⑴，若從甲箱剩餘的球中抽一球，則此球號碼大於 10 的機率是多少？

解

解答P125

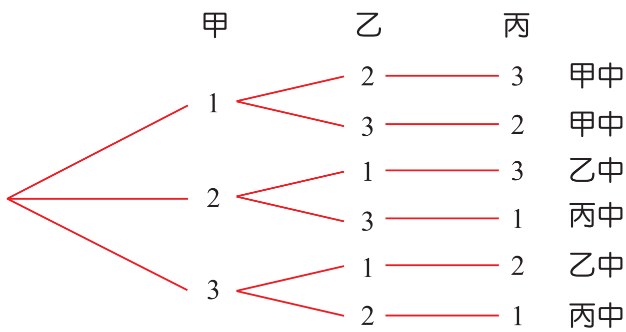
數學萬花筒

先抽還是後抽中獎機會高？



博士有兩張棒球賽門票，想要帶一個學生去，博士利用抽籤決定誰可以去，你覺得先抽比較好呢？還是後抽比較好呢？

為了討論這個議題，我們把三個學生假設為甲、乙、丙抽籤，在籤筒裡做了三支籤，分別寫上號碼 1、2、3。三人輪流抽籤，抽到的號碼用樹狀圖排列，可得下列六種情形，如果抽到 1 號籤則可以去看棒球比賽。

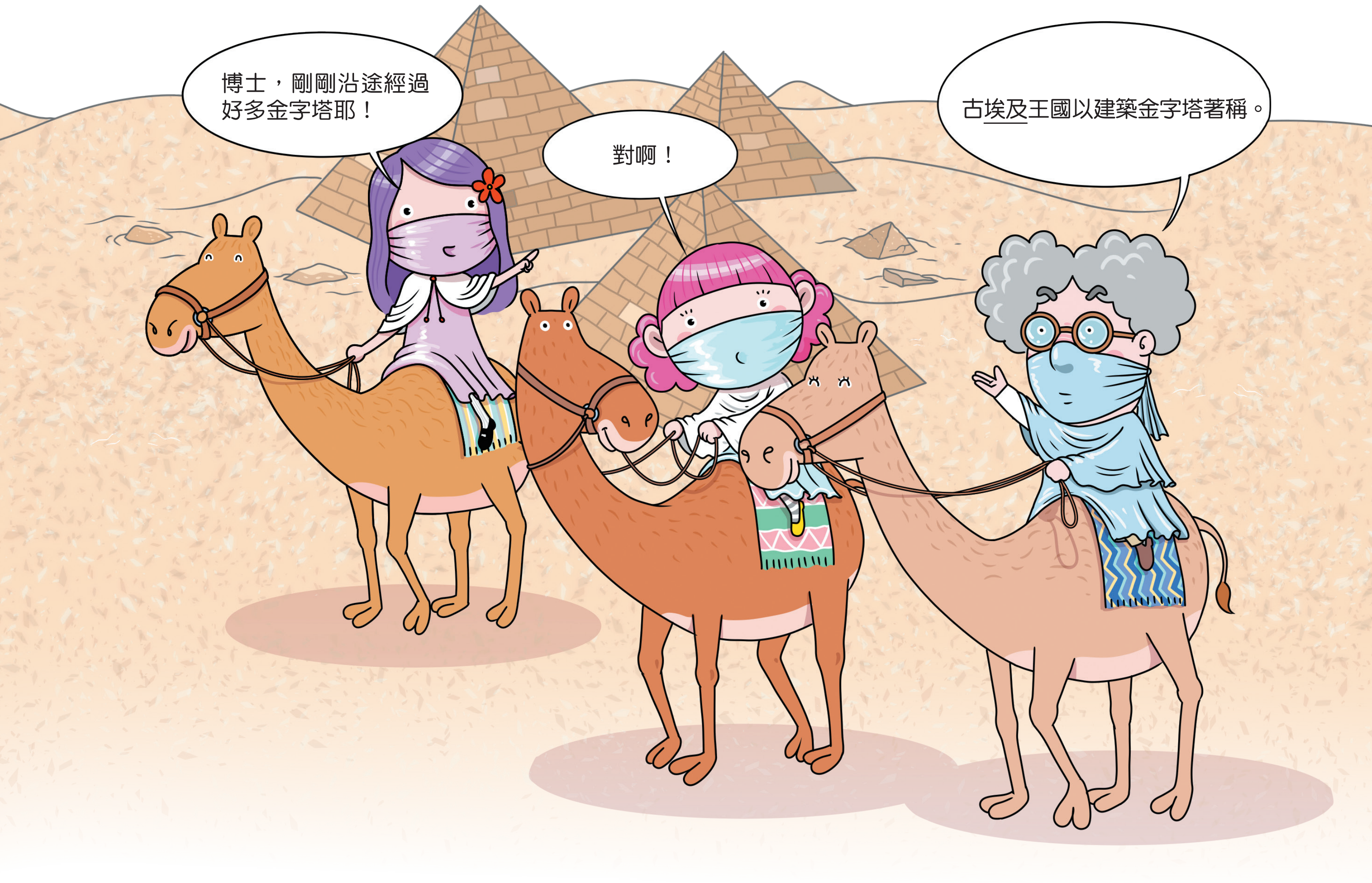


由上述樹狀圖可知甲、乙、丙中獎的機率皆是 $\frac{1}{3}$。

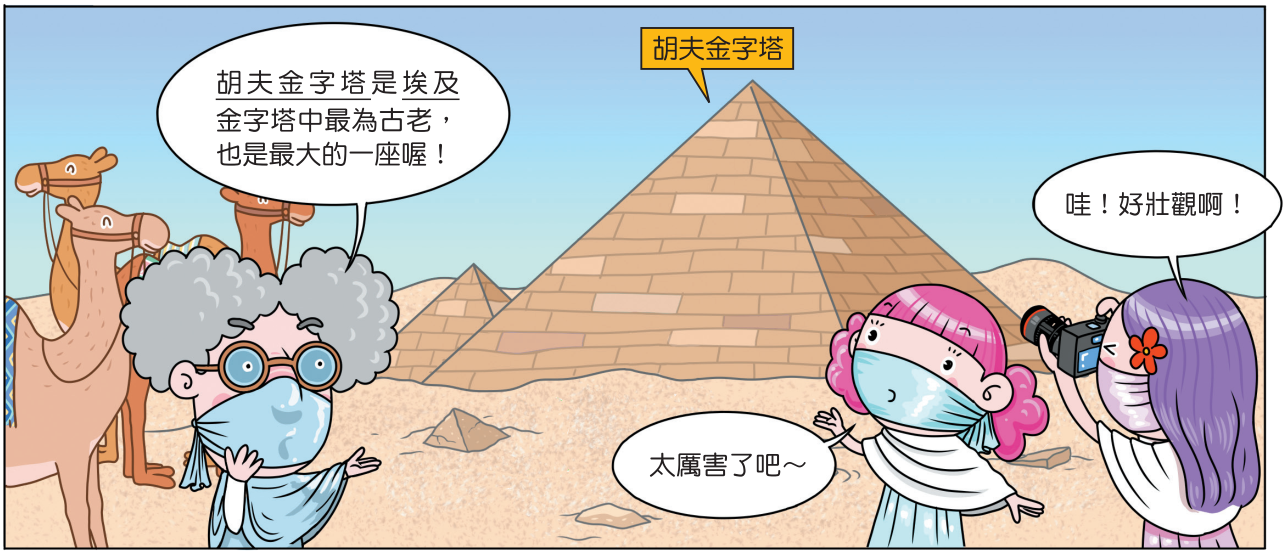
同樣的，如果有 n 支籤由 n 個人抽，每人抽 1 支籤，其中只有 1 支籤中獎，不管先抽或者後抽，中獎的機率都是 $\frac{1}{n}$，每個人抽中的機率都是相等的。

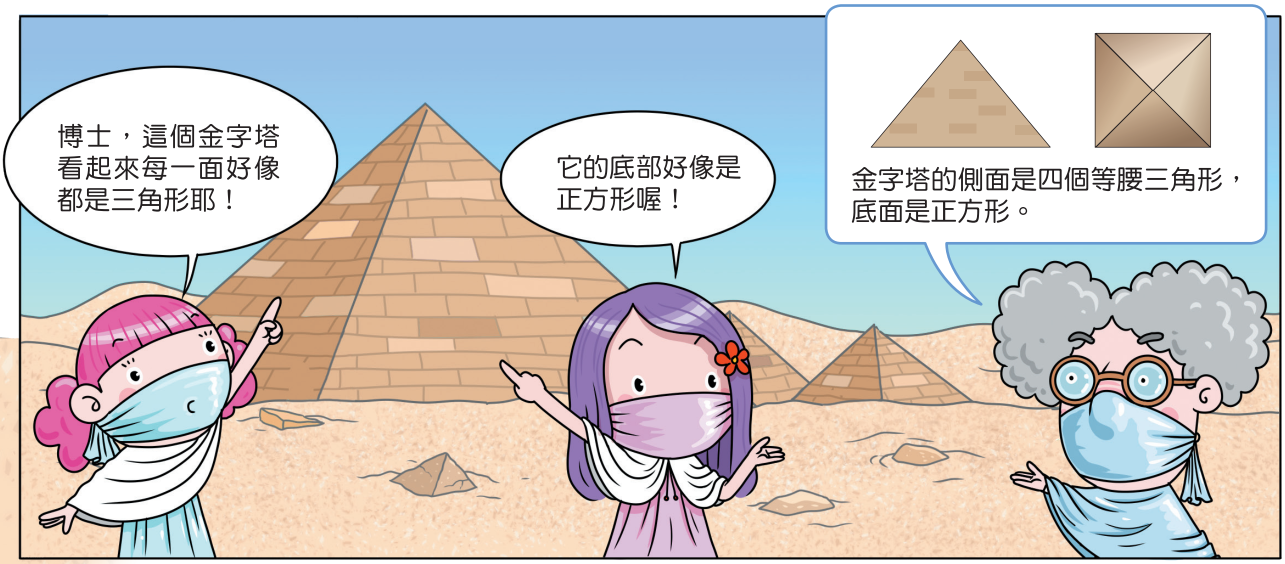
進一步可以思考如下：如果有 n 支籤由 n 個人抽，每人抽 1 支籤，其中有 m 支籤中獎，不管先抽或者後抽，我們可以算出中獎的機率都是 $\frac{m}{n}$。

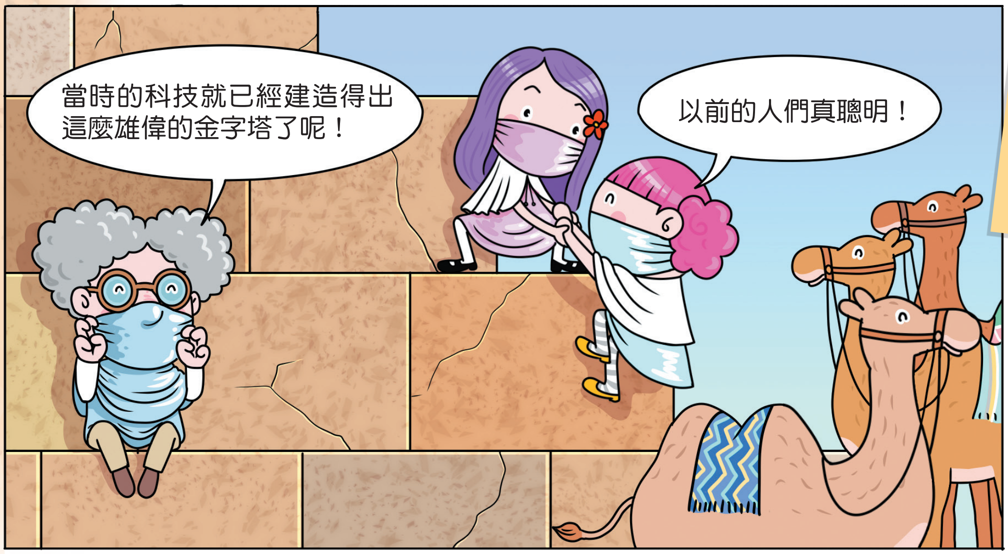
3 立體圖形



社會







金字塔像哪種立體圖形呢？配合課本P115 就知道囉！

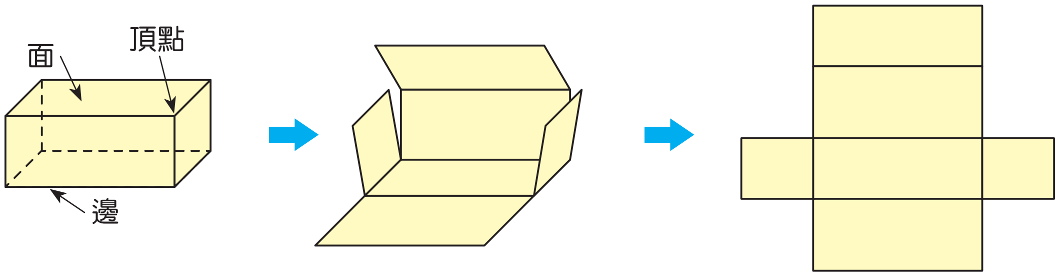
學習前哨站

本單元為學生自我複習，
教師可視班級情況決定如何運用。

回顧 1 長方體與正方體的展開圖

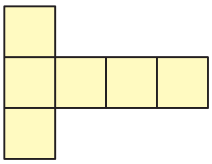
國小 5 年級

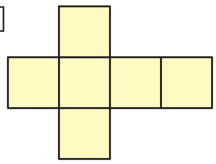
長方體有 6 個面、8 個頂點、12 條邊。它的 6 個面可以分為 3 組，每組都有 2 個全等的矩形，其展開圖如下。

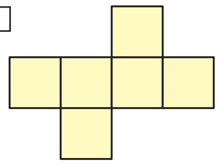


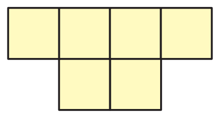
課前練習

判別下列哪些是正方體的展開圖，在□中打「✓」。

(1)□ 

(2)□ 

(3)□ 

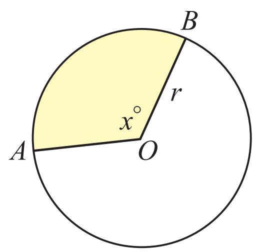
(4)□ 

回顧 2 扇形的面積與弧長

9 上第 2 章

如圖，圓心角為 x° 的扇形，其面積為 $\pi r^2\times\dfrac{x}{360}$，

$\overset{\frown}{AB}$ 的長為 $2\pi r\times\dfrac{x}{360}$。

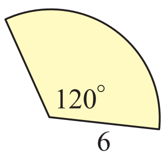


課前練習

如圖，有一扇形其半徑為 6 公分，圓心角為 120°，則：

(1) 此扇形面積＝＿＿＿＿＿平方公分。

(2) 此扇形弧長＝＿＿＿＿＿公分。



解答：1. (1)(2)(3)　2. (1) 12π　(2) 4π

3-1 角柱與圓柱

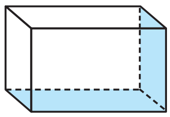
日常生活中可以看到很多立體圖形，例如右圖中的柱體。在介紹柱體的特性之前，我們先來了解空間中的線與平面之關係。

1 空間中的線與平面

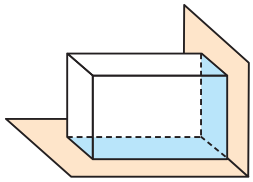
兩平面的垂直與平行

❶ 兩個平面互相垂直

如圖一，我們曾學過長方體中相鄰的兩面都互相垂直，並且利用長方體檢驗兩個平面是否互相垂直。若兩個平面可同時與長方體的相鄰兩面緊密貼合，如圖二，則這兩個平面互相垂直。



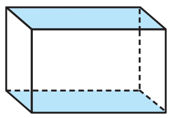
圖一



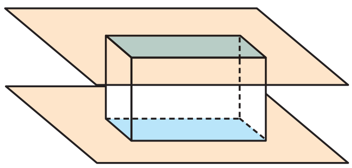
圖二

❷ 兩個平面互相平行

如圖三，我們也學過在長方體中不相鄰的兩面都互相平行。若兩個平面可同時與長方體的不相鄰兩面緊密貼合，如圖四，則這兩個平面互相平行。



圖三



圖四

Thinking

如果將教室看成一個長方體，觀察哪些平面互相垂直？哪些平面互相平行？

第3章

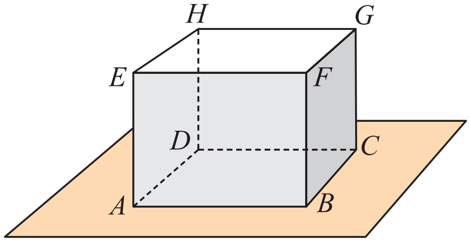
隨堂練習

右圖是一個長方體，下列平面與橘色平面垂直的打「✓」，平行的打「○」。

(　　)四邊形 $ABFE$ 所在的平面

(　　)四邊形 $BCGF$ 所在的平面

(　　)四邊形 $EFGH$ 所在的平面

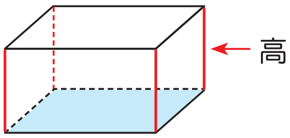


直線與平面的垂直與平行

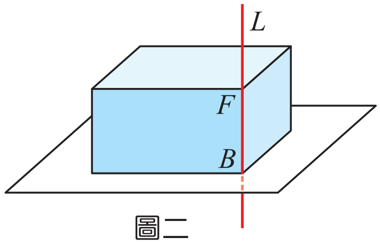
接下來，我們繼續利用長方體認識一條直線與一個平面是否互相垂直或平行。

❶ 直線與平面互相垂直

觀察長方體可以發現，它的高與底面互相垂直，如圖一。因此，要知道直線 L 與平面是否垂直，可以找一個長方體放到平面上，讓直線 L 能夠與長方體中的高（如 $\overline{BF}$）重疊，則直線 L 垂直於此平面，如圖二。



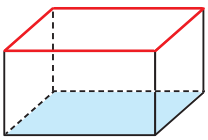
圖一



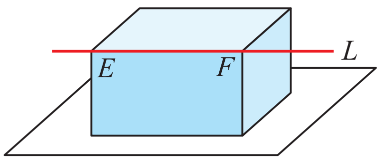
圖二

❷ 直線與平面互相平行

觀察長方體也可以發現，它的頂面的各邊與底面互相平行，如圖三。因此，要知道直線 L 與平面是否平行，可以找一個長方體放到平面上，讓直線 L 能夠與長方體頂面的邊（如 $\overline{EF}$）重疊，則直線 L 平行於此平面，如圖四。



圖三



圖四

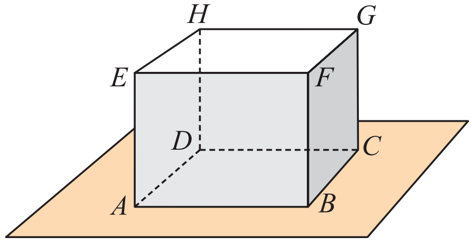
隨堂練習

右圖是一個長方體，下列線段與橘色平面垂直的打「✓」，平行的打「○」。

(　　) $\overline{CG}$

(　　) $\overline{EH}$

(　　) $\overline{EF}$

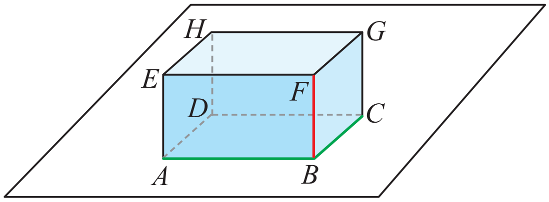


我們繼續利用長方體來認識兩條直線的關係。

兩條直線的垂直、平行與歪斜

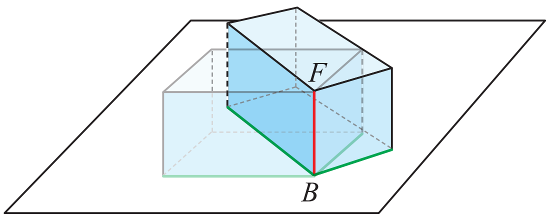
❶ 兩條直線的垂直

取出附件 13 組成長方體放在一個平面上，我們可以觀察到長方體中相交於同一頂點的邊皆互相垂直，如圖一，例如：$\overline{AB} \perp \overline{BF}$、$\overline{BC} \perp \overline{BF}$。



圖一

如果將圖一中的長方體以 $\overline{BF}$ 為軸順時針旋轉，如圖二，也可以發現在長方體底面所在的平面上，通過 B 點的直線皆與 $\overline{BF}$ 垂直。

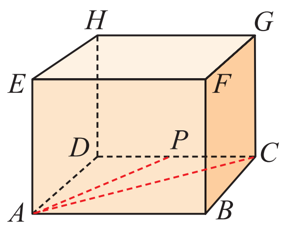


圖二

隨堂練習

右圖為長方體，判別下列哪些線段與 $\overline{AE}$ 互相垂直，在□中打「✓」：

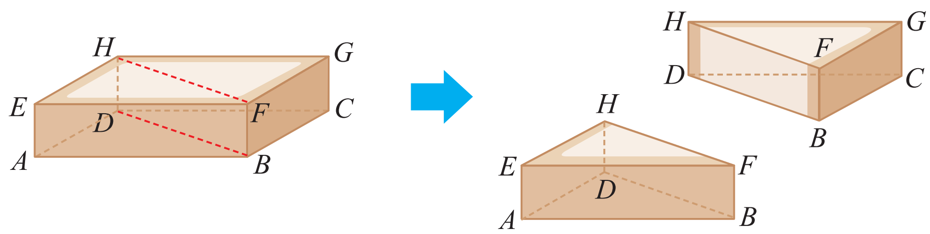
□ $\overline{AB}$　□ $\overline{AP}$　□ $\overline{AD}$　□ $\overline{AC}$



❷ 兩條直線的平行

探索活動 長方體中的直線關係

妙麗利用假日在家裡自己做早餐，她將厚片吐司沿著對角線垂直底面切成形狀、大小相同的兩塊，如下圖，回答下列問題：



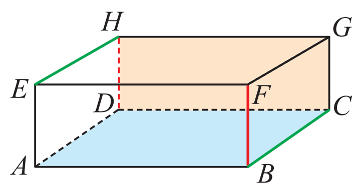
(1)四邊形 $BFHD$ 是否為長方形？

(2)$\overline{BF}$ 和 $\overline{DH}$ 是否平行？

(3)$\overline{BF}$ 和 $\overline{DH}$ 是否同時與四邊形 $ABCD$ 所在的平面垂直？

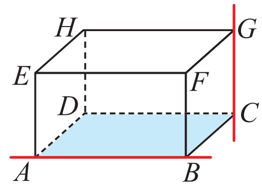
由 探索活動 可知，如右圖的長方體中，$\overline{BF}$ 和 $\overline{DH}$ 同時與四邊形 $ABCD$ 所在的平面垂直，$\overline{BF}$ 和 $\overline{DH}$ 互相平行。

同理，$\overline{BC}$ 和 $\overline{EH}$ 同時與四邊形 $CGHD$ 所在的平面垂直，$\overline{BC}$ 和 $\overline{EH}$ 互相平行。



❸ 兩條直線的歪斜

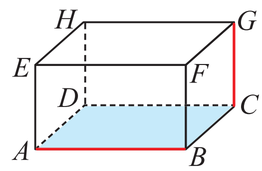
右圖長方體中，$\overline{AD}$ 與 $\overline{AB}$ 相交，$\overline{CD}$ 與 $\overline{AB}$ 互相平行，$\overline{CG}$ 與 $\overline{AB}$ 則不相交也不平行。在空間中，**像 $\overleftrightarrow{CG}$ 與 $\overleftrightarrow{AB}$ 這樣的兩條直線，既不相交也不平行，我們稱這兩條直線歪斜**。



本單元中，我們用 $\overleftrightarrow{AB}$ 表示 $\overline{AB}$ 所在的直線

Thinking

右圖長方體中，$\overleftrightarrow{AB}$ 與 $\overleftrightarrow{CG}$ 是否落在同一平面上？



隨堂練習

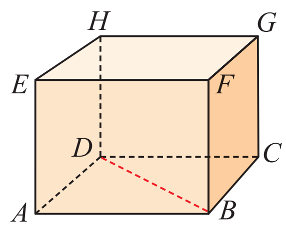
自評 P107 第 1 題

1. 右圖為長方體，判別下列哪些直線與 $\overleftrightarrow{BF}$ 歪斜，在□中打「✓」：

□ $\overleftrightarrow{AD}$　□ $\overleftrightarrow{BD}$

□ $\overleftrightarrow{CD}$　□ $\overleftrightarrow{DH}$

□ $\overleftrightarrow{EH}$　□ $\overleftrightarrow{HG}$

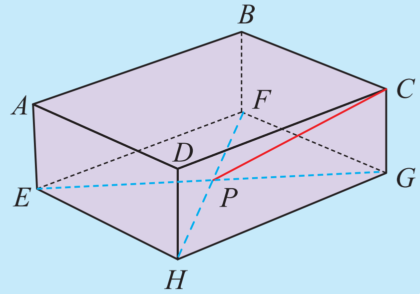


2. 在一個長方體中，任何一組互相平行的邊是否都能落在同一個平面？

例 1 直線與平面的垂直 可搭配附件 14

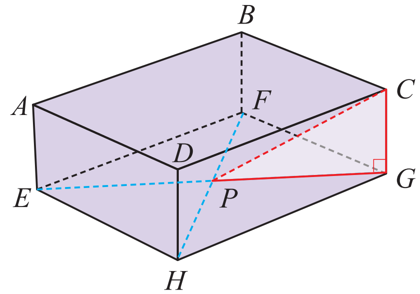
自評 P107 第 2 題

如圖，長方體中，$\overline{EH}=4$，$\overline{HG}=6$，$\overline{CG}=2$，P 為 $\overline{FH}$ 與 $\overline{EG}$ 的交點，求 $\overline{PC}$ 的長度。



解 由長方形兩條對角線互相平分，可知

$$\overline{PG}=\frac{1}{2}\overline{EG}$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{\overline{EH}^2+\overline{HG}^2}$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{4^2+6^2}$$
$$=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{13}=\sqrt{13}$$

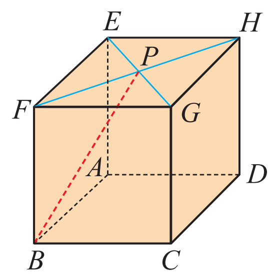


$\because \angle PGC=90^\circ \longleftarrow \overline{EG}\perp\overline{CG}$

$$\therefore \overline{PC}=\sqrt{\overline{PG}^2+\overline{CG}^2}$$
$$=\sqrt{(\sqrt{13})^2+2^2}$$
$$=\sqrt{17}$$

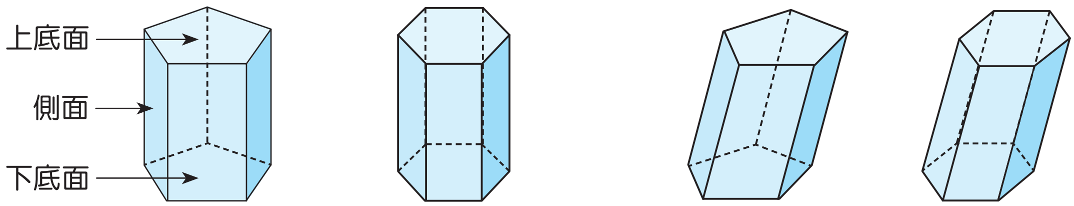
隨堂練習

右圖是一個邊長為 10 公分的正方體，P 為 $\overline{FH}$ 與 $\overline{EG}$ 的交點，求 $\overline{BP}$ 的長度。



② 角柱

如下圖，如果角柱的側面與上、下兩底面均互相垂直，稱為**直角柱**；如果側面與上、下兩底面不垂直，稱為**斜角柱**。在本教材中所討論的角柱，如果沒有特別說明，都是直角柱。

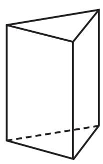
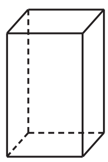
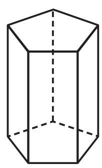
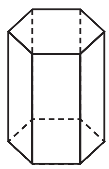


直角柱　　　　斜角柱

直角柱有兩個全等的多邊形底面和數個矩形的側面，其側面與底面均互相垂直，而兩個全等的多邊形底面互相平行，這兩個底面之間的距離稱為角柱的**高**。底面為三角形的柱體，稱為三角柱；同樣地，像長方體與正方體這種底面為四邊形的柱體，稱為四角柱。一般而言，底面為 n 邊形的柱體，稱為 n **角柱**。

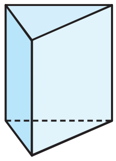
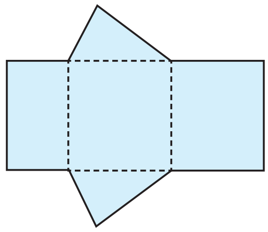
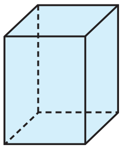
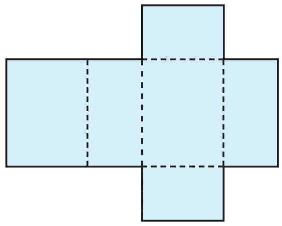
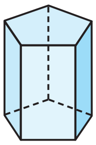
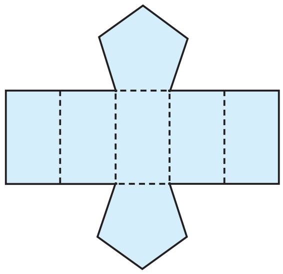
隨堂練習

觀察下列角柱各有幾個頂點、幾條邊和幾個面，並完成此表。

柱體 \ 項目	 三角柱	 四角柱	 五角柱	 六角柱	…	n 角柱
頂點數					…	
邊數					…	
面數					…	

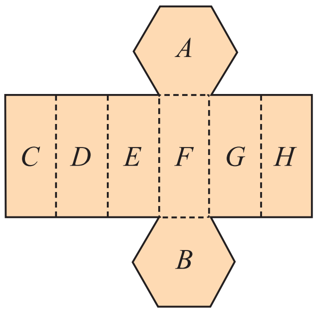
角柱展開圖

下面是一些常見角柱的展開圖。 可搭配附件 15～17

	形體	展開圖
三角柱		
四角柱		
五角柱		

隨堂練習

右圖是一個六角柱的展開圖，其上下兩底面均為正六邊形，側面為六個全等的矩形，利用附件 18，將它摺成立體圖形觀察，並列出此六角柱中所有互相平行的面。



角柱的體積與表面積

國小時曾經學過角柱的體積與表面積的計算方法：

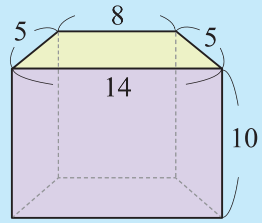
(1) 角柱體積＝底面積×高。

(2) 角柱表面積＝兩底面的面積和＋所有側面矩形的面積和。

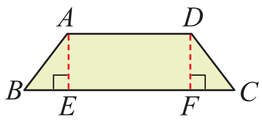
例2 角柱的體積與表面積

自評 P108 第 3 題

如圖，有一塊底面為等腰梯形的四角柱積木，求其體積及表面積。



解 假設右圖中的四邊形 $ABCD$ 為底面的等腰梯形，



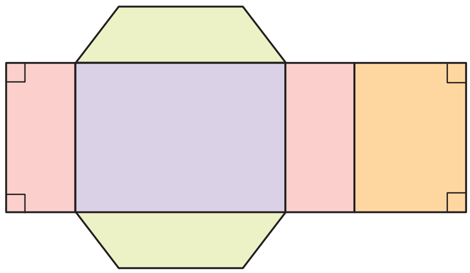
$\because \overline{BE}=\overline{FC}=\dfrac{\overline{BC}-\overline{AD}}{2}=\dfrac{14-8}{2}=3$，

$\therefore \overline{AE}=\sqrt{\overline{AB}^2-\overline{BE}^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$，

故底面積$=\dfrac{1}{2}\times(8+14)\times4=44$，

體積$=44\times10=440$。

由四角柱的展開圖可知：



表面積

＝兩底面的面積和＋4 個側面矩形的面積和

$=44\times2+(5+14+5+8)\times10$

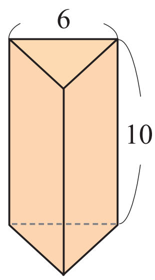
$=88+320$

$=408$。

第3章

隨堂練習

右圖是一個三角柱積木，其底面是一個邊長為 6 公分的正三角形，高為 10 公分，求此三角柱積木的體積及表面積。

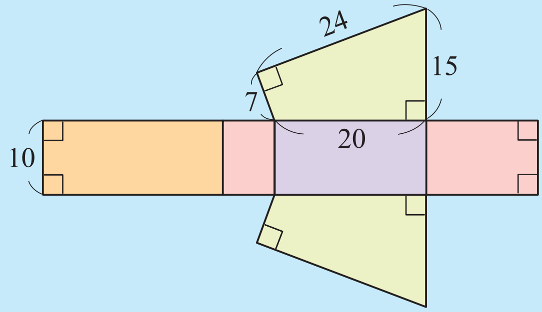


例3 由展開圖求角柱的表面積與體積

自評 P108 第 4 題

右圖是一個四角柱的展開圖，

求此四角柱的體積與表面積。

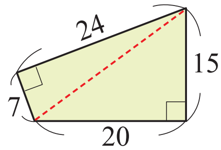


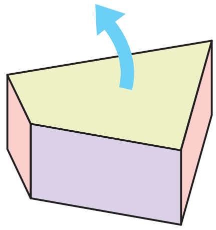
解 ∵四角柱的底面可分成兩個直角三角形，

∴底面積 $=\frac{1}{2}\times7\times24+\frac{1}{2}\times15\times20$

$=84+150=234$，

故體積 $=234\times10=2340$。





由四角柱的展開圖可知：

表面積＝兩底面的面積和＋4 個側面矩形的面積和

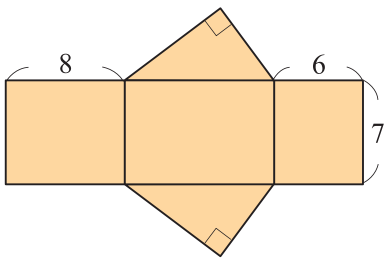
$=234\times2+(24+7+20+15)\times10$

$=1128$。

隨堂練習

右圖是一個三角柱的展開圖，

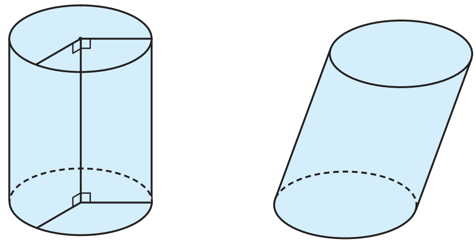
求此三角柱的體積與表面積。



③ 圓柱

圓柱展開圖

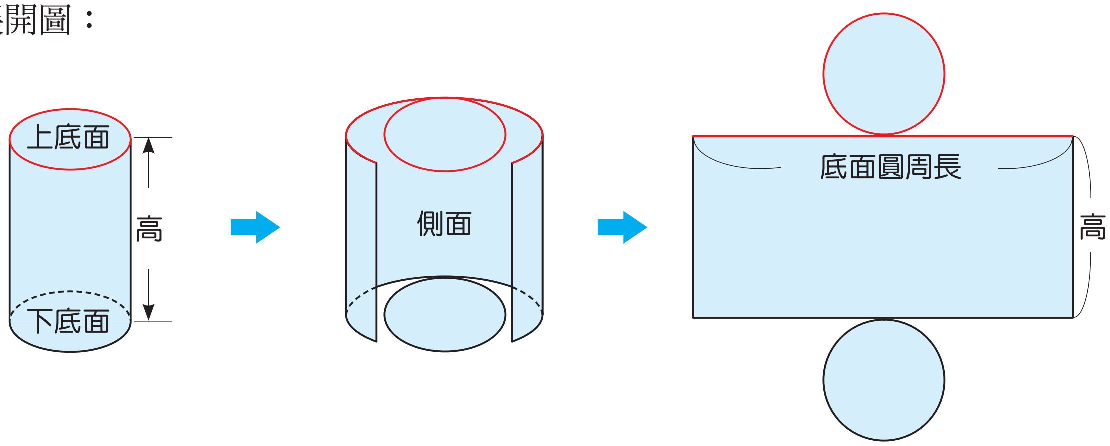
圓柱是上、下底面為等圓的柱體。如下圖，兩底面圓心的連線與兩底面都垂直的圓柱稱為**直圓柱**，不垂直的稱為**斜圓柱**。在本教材中所討論的圓柱，若未特別說明，都是直圓柱。



直圓柱　　　　斜圓柱

圓柱的體積與表面積

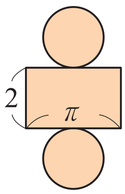
圓柱的體積和角柱一樣也是「底面積×高」。將一個圓柱展開，可以得到以下的圓柱展開圖：

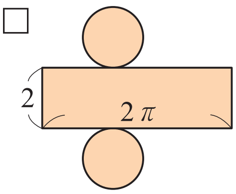


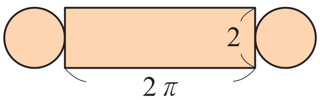
在上圖的展開圖中，圓柱的表面積等於上、下底面的圓面積與側面的面積和。如果將側面展開成一個矩形，則矩形的長等於底面圓周長，矩形的寬是圓柱的高，由此可知：圓柱的表面積＝兩底面的圓面積和＋底面圓周長 × 高。

隨堂練習

下列各展開圖中，圓的半徑皆為 1，四邊形皆為矩形，則下列哪一個是圓柱的展開圖，在□中打「✓」。

□ 

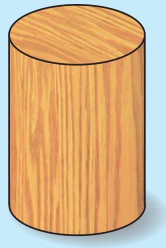
□ 

□ 

例4 圓柱的體積與表面積

自評 P109 第 5 題

如圖，一個高 50 公分、底圓半徑 20 公分的圓柱木椅，體積是多少立方公分？表面積是多少平方公分？



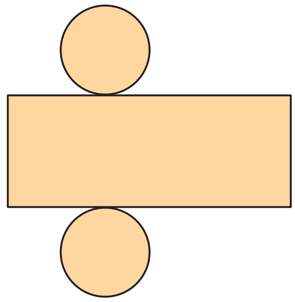
解 體積＝$(20\times20\times\pi)\times50=20000\pi$（立方公分）

表面積＝兩底面的圓面積和＋底面圓周長×高

$=(20\times20\times\pi)\times2+(2\times20\times\pi)\times50$

$=800\pi+2000\pi$

$=2800\pi$（平方公分）



輸入 20000 × SHIFT EXP ＝，螢幕顯示 62831.85307，

輸入 2800 × SHIFT EXP ＝，螢幕顯示 8796.45943。

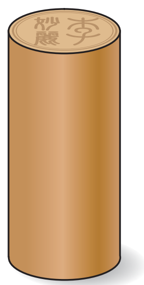
因此，圓柱的體積大約為 62831.9 立方公分，

表面積大約為 8796.5 平方公分。

本教材使用之計算機，若需 π 功能，須先按 SHIFT 再按 EXP。

隨堂練習

如圖，一個高 4 公分、底圓半徑 1 公分的圓柱圖章，體積是多少立方公分？表面積是多少平方公分？



例 5 空心柱體的體積

自評 P109 第 6 題

下圖是一根長度為 20 公分的不銹鋼空心圓柱吸管，且吸管的內、外直徑分別為 1 公分與 1.2 公分，求此吸管材料部分的體積。

（長度單位：公分）

解 吸管材料部分的體積

＝外部圓柱的體積－內部空心部分的圓柱體積

$=(0.6\times0.6\times\pi)\times20-(0.5\times0.5\times\pi)\times20$

$=(0.6\times0.6-0.5\times0.5)\times\pi\times20$

$=0.11\times\pi\times20$

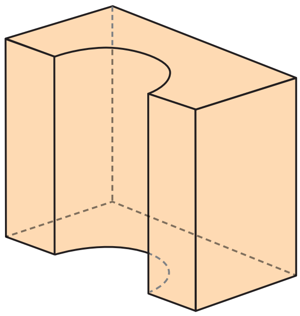
$=2.2\pi$（立方公分）

輸入 2.2 × SHIFT EXP ＝，螢幕顯示 6.911503838 。

因此，此吸管的體積大約為 6.9 立方公分。

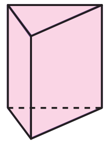
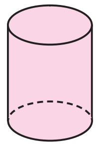
隨堂練習

如圖，一個積木的底面是一個長方形去除一個半圓的圖形，其中長方形的長為 4 公分、寬為 2 公分，半圓的半徑為 1 公分，如果此積木的高為 3 公分，求此積木的體積。



重點回顧

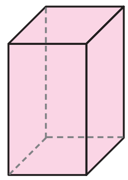
❶ 柱體

名稱	特性	圖示
n 角柱	(1)上下底面為全等的 n 邊形。 (2)側面均為矩形，且所有側面皆與底面互相垂直。 (3)有 $2n$ 個頂點、$3n$ 條邊和 $(n+2)$ 個面。	例 三角柱 
圓柱	(1)上下底面為等圓。 (2)側面可展開成一個矩形，矩形的長等於底面圓周長，矩形的寬等於圓柱的高。 (3)兩底面圓心的連線與兩底面都垂直。	

❷ 角柱的體積與表面積

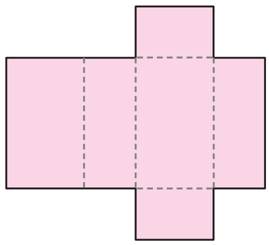
(1)角柱的體積＝底面積×高。

例 若一個四角柱底面的面積為 24，柱高為 10，
則此四角柱的體積＝$24\times10=240$。



(2)角柱的表面積＝兩底面的面積和＋所有側面矩形的面積和。

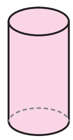
例 若一個四角柱底面的面積為 24，
底面的周長為 20，柱高為 10，
則此四角柱的表面積＝$24\times2+20\times10=248$。



❸ 圓柱的體積與表面積

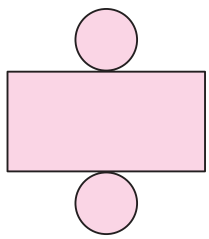
(1)圓柱的體積＝底面積×高。

例 若一個圓柱底面的半徑為 3，柱高 10，
則此圓柱的體積＝$(3\times3\times\pi)\times10=90\pi$。



(2)圓柱的表面積＝兩底面的圓面積和＋底面圓周長×高。

例 若一個圓柱底面的半徑為 3，柱高為 10，
則此圓柱的表面積＝$(3\times3\times\pi)\times2+(2\times\pi\times3)\times10$
$=18\pi+60\pi=78\pi$。



3-1 自我評量

① 下圖的長方體中，判別下列哪些直線與 $\overleftrightarrow{AB}$ 歪斜，在□中打「✓」。 課 P97 隨堂

□ $\overleftrightarrow{BC}$

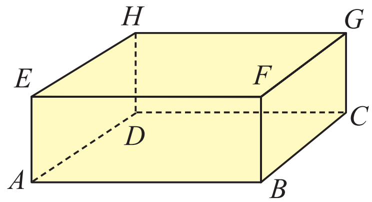
□ $\overleftrightarrow{HG}$

□ $\overleftrightarrow{HD}$

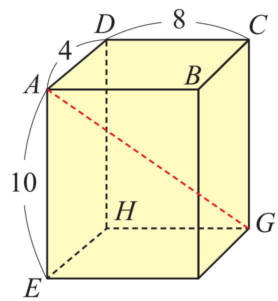
□ $\overleftrightarrow{CG}$

□ $\overleftrightarrow{FG}$

□ $\overleftrightarrow{EH}$

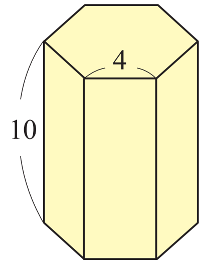


② 如圖，長方體的長、寬、高分別為 8、4、10 公分，求 $\overline{AG}$ 的長度。 課 P98 例 1



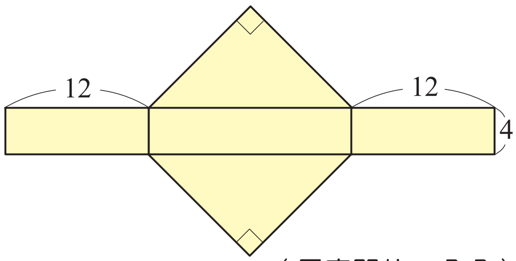
③ 如圖，已知一個六角柱筆筒，底面是邊長 4 公分的正六邊形，高為 10 公分，求此六角柱筆筒的體積與表面積。

課 P101 例 2



④ 右圖是一個三明治包裝盒的展開圖，求此三角柱包裝盒的體積與表面積。

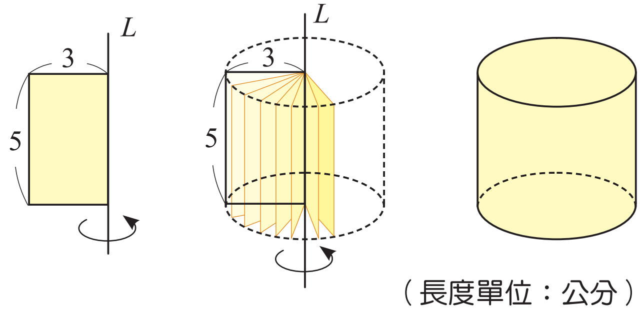
課 P102 例 3



（長度單位：公分）

5 如圖，一張長方形紙板繞著直線 L 旋轉一周的軌跡會得到一個圓柱，求此圓柱的體積與表面積。

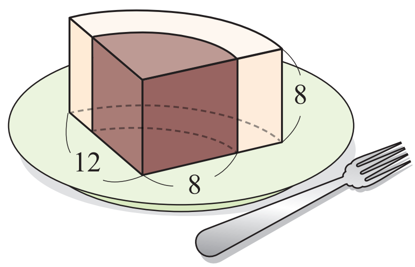
課 P104 例 4



（長度單位：公分）

6 右圖是一塊底面為四分之一圓的雙色蛋糕，外層是香草蛋糕，內層是巧克力蛋糕，其中巧克力蛋糕也是一個底面為四分之一圓的柱體，則香草蛋糕與巧克力蛋糕的體積哪個比較大？

課 P105 例 5



（長度單位：公分）

3-2 角錐與圓錐

有些立體圖形只有一個底面，且頂部都是「尖」的，例如下圖中的魔術方塊及派對帽，這些立體圖形有哪些性質呢？

1 角錐

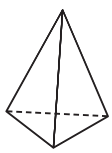
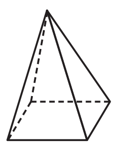
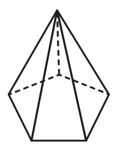
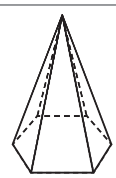
由一個多邊形底面和數個三角形側面所構成的立體圖形稱為角錐。如果一個錐體的底面是三角形，稱為三角錐。如果底面是 n 邊形，稱為 n 角錐。

n 角錐有 n 個側面，**每個側面都是等腰三角形的 n 角錐，稱為直 n 角錐**。**在直 n 角錐中，底面為正 n 邊形，又稱為正 n 角錐**。在本教材中所討論的角錐，若未特別說明，都是正 n 角錐。

隨堂練習

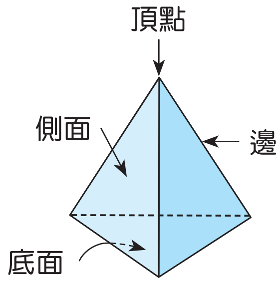
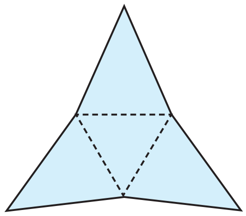
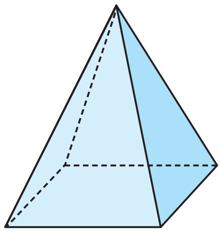
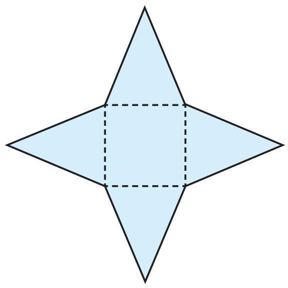
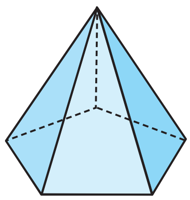
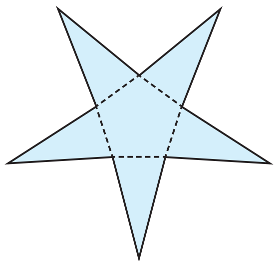
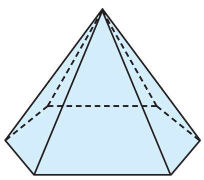
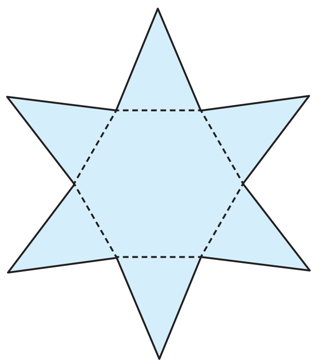
自評 P120 第 1 題

觀察下列角錐各有幾個頂點、幾條邊和幾個面，並完成此表。

形體 / 項目	 三角錐	 四角錐	 五角錐	 六角錐	…	n 角錐
頂點數					…	
邊數					…	
面數					…	

下面是一些常見角錐的展開圖。 可搭配附件 19～22

角錐展開圖

	形體	展開圖
三角錐		
四角錐		
五角錐		
六角錐		

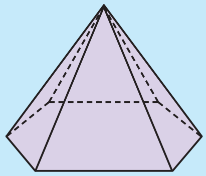
由角錐的展開圖可知：

正 n 角錐的表面積＝底面積＋所有側面等腰三角形的面積和。

例1 角錐的表面積

自評 P120 第 2 題

右圖為一個正六角錐，其底面正六邊形的邊長為 10 公分，側面等腰三角形的腰長為 13 公分，求此六角錐的表面積。



解 將正六角錐展開如右圖。

底面是 6 個邊長為 10 公分的正三角形，

底面積 $=(\frac{\sqrt{3}}{4}\times 10^2)\times 6=150\sqrt{3}$（平方公分）

側面等腰三角形的高 $=\sqrt{13^2-5^2}$

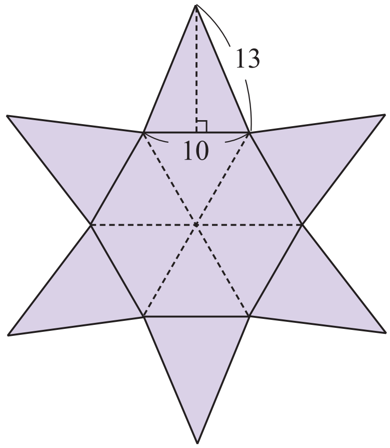
$=\sqrt{144}=12$（公分）

側面積的和 $=(\frac{1}{2}\times 10\times 12)\times 6$

$=360$（平方公分）

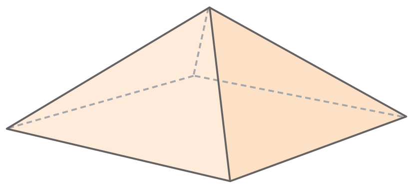
表面積＝底面積＋側面積的和

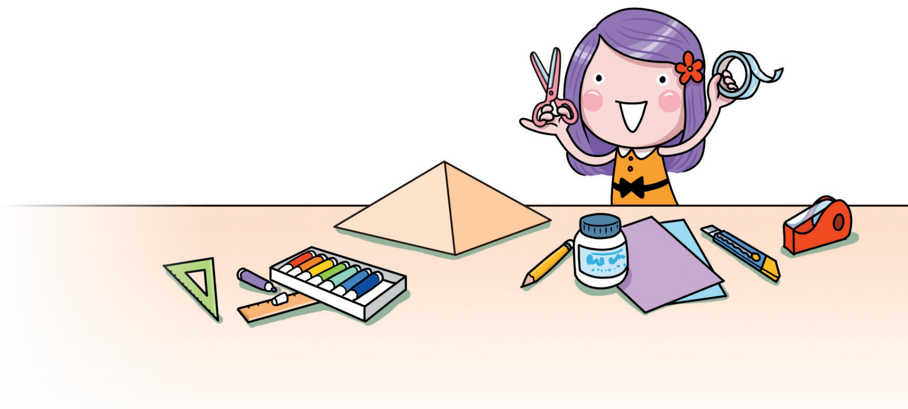
$=150\sqrt{3}+360$（平方公分）



隨堂練習

右圖為艾美做的金字塔紙模型，它是一個正四角錐，其底面是邊長為 10 公分的正方形，且側面的三角形為正三角形，求此金字塔模型的表面積。





由四個正三角形組成的三角錐稱為**正四面體**。近年來，正四面體的包裝袋或紙盒日漸普及，如上圖中的立體茶包，已成為常見的設計。

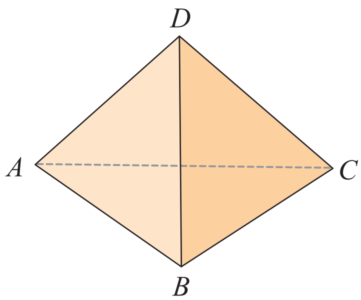
接下來，我們利用附件 23 的展開圖組合成一個正四面體，透過觀察來了解其中邊與面之間的關係。

第 3 章

隨堂練習

自評 P120 第 3 題

右圖為一個正四面體，則：



(1) $\overline{AD}$ 和 $\overline{BC}$ 是否平行？

(2) $\overline{AD}$ 和底面 $\triangle ABC$ 是否垂直？

(3) 平面 ABD 和平面 ABC 是否垂直？

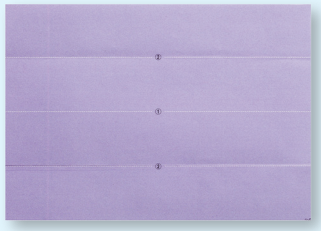
(4) 判別 $\overleftrightarrow{BC}$ 與下列何者歪斜，在□中打「✓」。

□ $\overleftrightarrow{BD}$　□ $\overleftrightarrow{AC}$　□ $\overleftrightarrow{AD}$　□ $\overleftrightarrow{AB}$

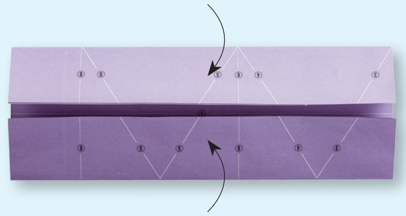
事實上，正四面體中的邊與邊、邊與面及面與面之間既不平行也不垂直。

補給站 正四面體摺紙 可搭配附件 1

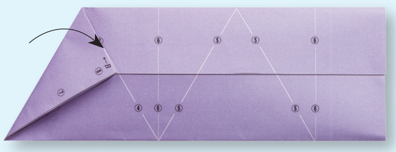
如果要手作一個正四面體，除了使用展開圖組成，也可以利用摺紙的方式完成，下面以附件 1 示範一種能秒收秒展正四面體的摺法。



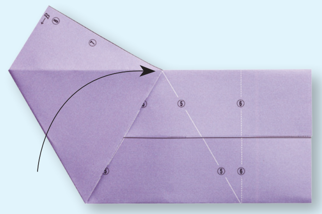
❶將附件 1 的色紙橫放，再由上而下對摺後，將紙打開回原處。



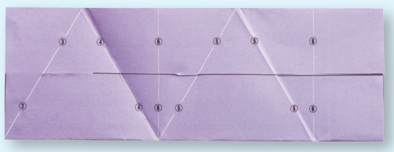
❷將上下兩部分向中線對摺。



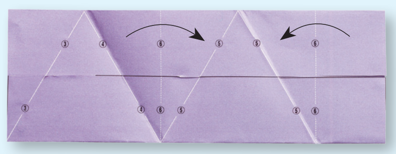
❸將左上角的頂點摺向中線後，將紙打開回原處。



❹按著 A 點，將❸的摺痕與上邊對齊後，將紙打開回原處。

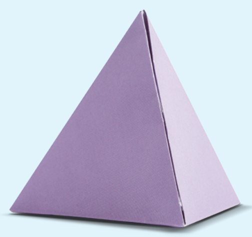


❺重複將新摺痕對齊上邊或下邊，形成多個等邊三角形。



❻將圖中兩條虛線外側的兩個長方形向內摺。

❼將小長方形放入大長方形內。



❽將❼中的 A、B 兩點向中間推至重疊，便會形成正四面體。

金字塔

社會

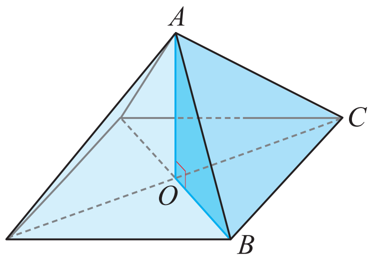
金字塔是一種方底尖頂的石砌建築物，形狀近似於四角錐，是古埃及埋葬法老王、王后或王室成員的陵墓。由於它的外型很像中文的「金」字，故其譯名為金字塔。

埃及迄今發現的金字塔約有八十座，其中最大的是古代世界七大遺跡之首的胡夫金字塔。它由一千三百萬個重達數噸的石塊建成，其四個邊的方向幾乎對準東西南北四個方位，誤差小到不可思議。建造金字塔的工程所需的人、物力及時間必然可觀，雖然長久以來陸續有學者提出其建造工法的推測與猜想，但真相至今仍是個謎。

Q 如圖，已知金字塔的高度 $\overline{AO}=150$ 公尺，底部正方形的邊長 $\overline{BC}=230$ 公尺，求：

(1) $\overline{OB}$。

(2) $\overline{AB}$。（四捨五入取至小數點後第二位）



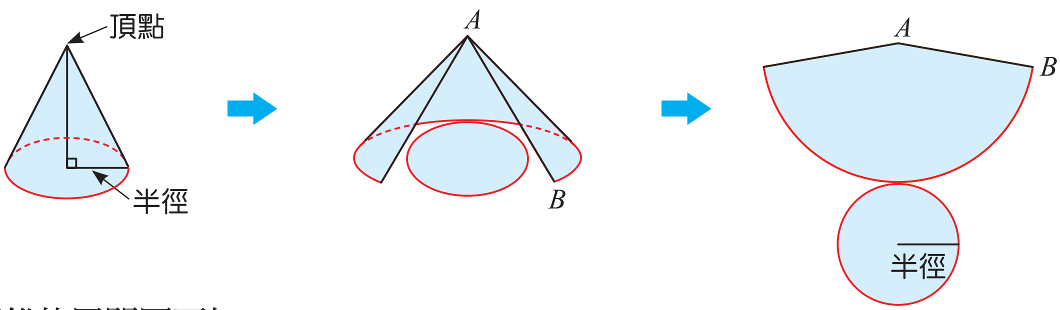
第3章

圓錐展開圖

2 圓錐

圓錐有一個圓形的底面和一個頂點。若圓錐的頂點與底面圓心的連線垂直於底面，稱為直圓錐，例如：下圖新北市政府廣場耶誕樹的外型便是直圓錐。

在本教材中所討論的圓錐，若未特別說明，都是直圓錐。如下圖，直圓錐的展開圖可以由一個扇形（側面）和圓（底面）組合而成，且側面展開的扇形弧長等於底面圓周長。



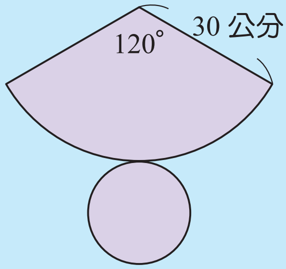
由圓錐的展開圖可知：

圓錐的表面積＝底面圓面積＋側面展開的扇形面積。

例2 圓錐的展開圖

自評 P121 第 4 題

右圖為圓錐造型的紙藝品展開圖，求此圓錐的表面積。



解 扇形弧長$=(2\times30\times\pi)\times\frac{120}{360}=20\pi$(公分)。

設底面圓半徑為 r 公分，則 $2\times r\times\pi=20\pi$，

所以 $r=10$(公分)。

表面積＝底面積＋側面積

$=10\times10\times\pi+(30\times30\times\pi)\times\frac{120}{360}$

$=100\pi+300\pi$

$=400\pi$(平方公分)

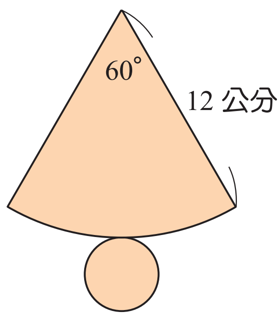
扇形的弧長＝底面的圓周長

輸入 400 × SHIFT EXP ＝，螢幕顯示 1256.637061 。

因此，此圓錐的表面積大約為 1256.64 平方公分。

隨堂練習

右圖為一個圓錐的展開圖，求此圓錐的表面積。

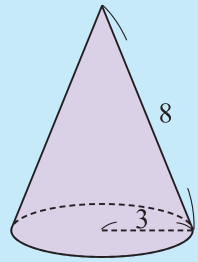


例3 圓錐的表面積

右圖是一個圓錐，將此圓錐展開，求：

(1)展開後扇形的圓心角。

(2)此圓錐的表面積。



解 (1)圓錐的展開圖如右，

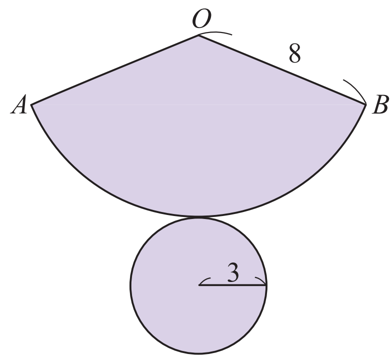
$\overset{\frown}{AB}$ 的長＝底面圓的周長＝$2\times3\times\pi=6\pi$。

設$\angle AOB=x^\circ$，

$(2\times8\times\pi)\times\dfrac{x}{360}=6\pi$

$x=135$

$\therefore \angle AOB=135^\circ$。



(2)圓錐的表面積

＝底面積＋側面積

$=3\times3\times\pi+(8\times8\times\pi)\times\dfrac{135}{360}$

$=9\pi+24\pi$

$=33\pi$

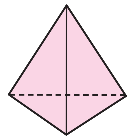
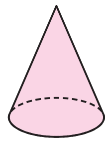
隨堂練習

自評 P121 第 5 題

右圖是一頂派對帽，其形狀和圓錐的側面相同，且圓形底面的半徑為 6 公分，如果將它展開成一個扇形，求此扇形的圓心角。

重點回顧

❶ 錐體

名稱	特性	圖示
正 n 角錐	(1)底面為正 n 邊形。 (2)側面均為等腰三角形。 (3)有 $(n+1)$ 個頂點、$2n$ 條邊和 $(n+1)$ 個面。	例 三角錐 
圓錐	(1)有一個頂點和圓形底面。 (2)側面可展開成扇形。 (3)頂點與底面圓心的連線垂直於底面。	

❷ 角錐的表面積

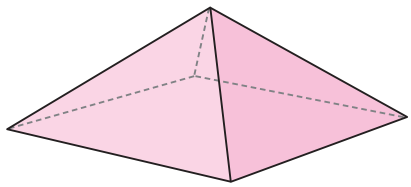
正 n 角錐的表面積＝底面積＋所有側面等腰三角形的面積和。

例 若一個四角錐底面的面積為 100，

側面的三角形面積皆為 $100\sqrt{3}$，

則此四角錐的表面積 $=100+4\times100\sqrt{3}$

$=100+400\sqrt{3}$。



❸ 圓錐的表面積

圓錐的表面積＝底面圓面積＋側面展開的扇形面積。

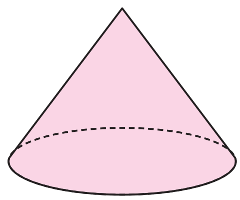
例 若一個圓錐底面的半徑為 3，

展開後扇形的面積為 15π，

則此圓錐之表面積 $=3\times3\times\pi+15\pi$

$=9\pi+15\pi$

$=24\pi$。



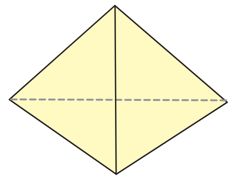
3-2自我評量

① 已知角錐的底面為正 n 邊形，若此角錐的頂點數、邊數與面數的總和為 34，求 $n=$？

課 P110 隨堂

② 四個面都是正三角形的三角錐，稱為正四面體。下圖是邊長均為 2 公分的正四面體，求此正四面體的表面積。

課 P112 例 1



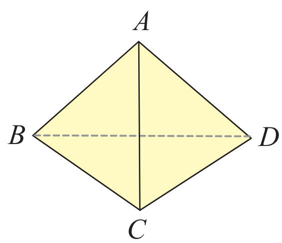
③ 右圖為正三角錐，回答下列問題：

課 P113 隨堂

(1)哪條直線與 $\overleftrightarrow{AB}$ 歪斜？

(2)哪條直線與 $\overleftrightarrow{BC}$ 歪斜？

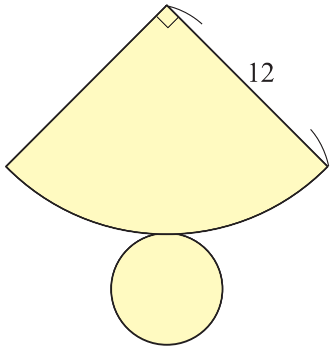
(3)哪條直線與 $\overleftrightarrow{BD}$ 歪斜？



④ 右圖為一個圓錐的展開圖，其扇形的半徑為 12，圓心角為直角，求：課 P117 例 2

(1) 此圓錐底面圓形的半徑。

(2) 此圓錐的表面積。



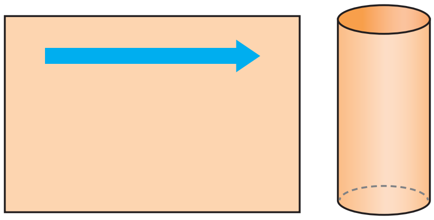
第 3 章

⑤ 右圖中的甜筒紙套形狀和圓錐的側面相同，且圓形底面的半徑為 2 公分，如果將它展開成一個扇形，則此扇形的面積為何？ 課 P118 隨堂

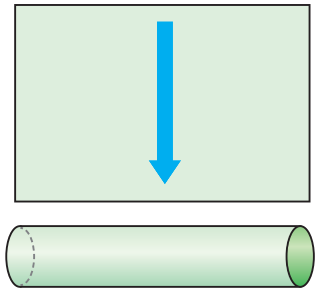
自我挑戰

本單元為統整課程，由學生自行挑戰，教師視班級情況決定如何運用。

如果將長方形紙張的短邊由左而右捲成圓柱的形狀，使得兩側的短邊接在一起，會形成橘色圓柱，如圖一；如果將長方形紙張的長邊由上而下捲成圓柱的形狀，使得兩側的長邊接在一起，則會形成綠色圓柱，如圖二。



圖一



圖二

已知紙的長邊長度為 30 公分、短邊長度為 20 公分，回答下列問題：

(1) 圖一中的橘色圓柱體積為何？

解

(2) 圖二中的綠色圓柱體積為何？

解

(3) 圖中的橘色圓柱與綠色圓柱的體積比為何？

解

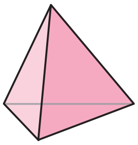
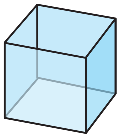
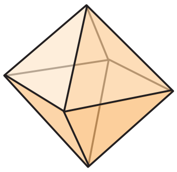
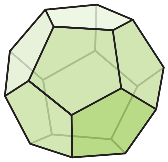
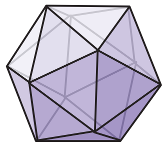
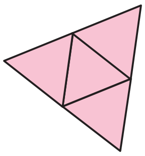
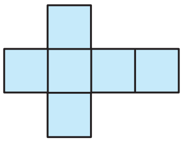
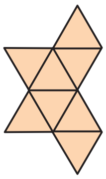
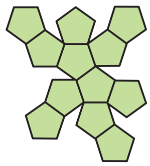
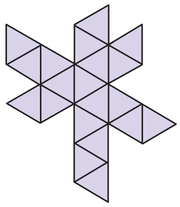
解答P126

數學萬花筒

多面體展開圖

多面體的尤拉公式

正多面體又稱柏拉圖多面體，它的每個面都是全等的正多邊形。正多面體除了正四面體，還有正六面體、正八面體、正十二面體及正二十面體共五種，如下表。

正多面體	正四面體	正六面體	正八面體	正十二面體	正二十面體
立體圖形					
展開圖					
頂點數	4	8	6	20	12
面數	4	6	8	12	20
邊數	6	12	12	30	30

正多面體的頂點數、面數與邊數之間都具有以下關係：

頂點數 + 面數 − 邊數 = 2

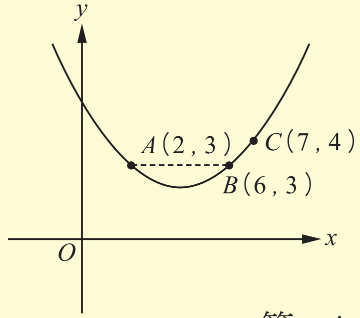
事實上，對於所有的凸多面體，上述關係式都成立，瑞士數學家尤拉（Leonhard Paul Euler，1707-1783）在 1752 年證明了這個關係式，世人稱它為「多面體的尤拉公式」。

自我挑戰解答

第 1 章 P50

(1) $\because (2, 3)$、$(6, 3)$的 y 坐標相同，

$\therefore \overline{AB} = |6-2| = 4$



答：4。

(2) $\because A(2, 3)$、$B(6, 3)$的 y 坐標相同，

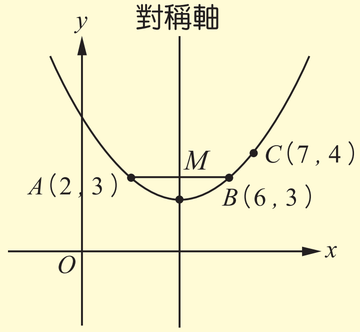
$\therefore$以對稱軸為摺線，可使 A、B 二點疊合，

令此對稱軸與 $\overline{AB}$ 交於 M 點，

則 $\overline{AM} = \overline{BM} = \dfrac{1}{2}\overline{AB} = \dfrac{1}{2} \times 4 = 2$

$\therefore M$ 點坐標為$(2+2, 3) = (4, 3)$

故二次函數的對稱軸方程式為 $x=4$。



答：$x=4$。

(3) 令 $C(7, 4)$在此圖形上的對稱點為 D 點，

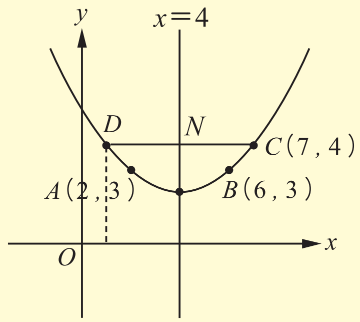
連接 $\overline{CD}$，設 N 點為對稱軸 $x=4$ 與 $\overline{CD}$ 的交點，

$\therefore \overline{CN} = |7-4| = 3$，

因此 $\overline{CD} = 2\overline{CN} = 2 \times 3 = 6$，

故 D 點坐標為$(7-6, 4) = (1, 4)$，

即 $C(7, 4)$在此圖形上的對稱點為$(1, 4)$。



答：$(1, 4)$

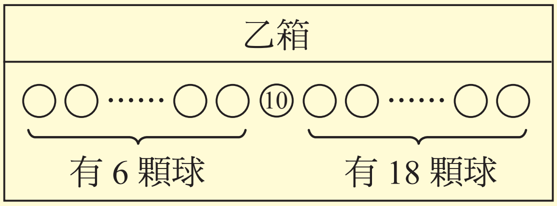
第 2 章 P88

(1) ∵乙箱有 25 顆球，$25\times\frac{1}{4}=6.25$，

∴由小到大排列，第 1 四分位數（Q_1）為第 7 顆號碼球（球號為 10 號），

故乙箱中有 6 顆號碼球小於 10，即 $a=6$，

有 18 顆號碼球大於 10，即 $b=18$。



答：$a=6$、$b=18$。

(2) 甲箱中大於 10 的號碼球的數量

＝球的總數－放入乙箱的球數－甲箱號碼小於 10 的球數

$=49-25-(9-6)$

$=21$（顆）

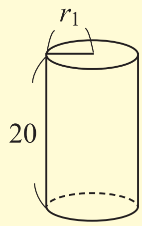
又甲箱剩餘 $49-25=24$（顆），

故此球號碼大於 10 的機率是 $\frac{21}{24}=\frac{7}{8}$。

答：$\frac{7}{8}$。

第 3 章 P122

⑴假設橘色圓柱底面半徑為 r_1，



則底面圓周長 $2\times\pi\times r_1=30$，

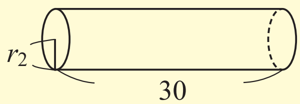
$$r_1=\frac{30}{2\pi}=\frac{15}{\pi}\text{（公分）}$$

$\therefore$體積$=\pi\times{r_1}^2\times20=\pi\times(\frac{15}{\pi})^2\times20=\frac{4500}{\pi}$（立方公分）

（將體積四捨五入取到小數點後第二位，其近似值為 1432.39 立方公分。）

答：$\frac{4500}{\pi}$ 立方公分。

⑵假設綠色圓柱底面半徑為 r_2，



則底面圓周長 $2\times\pi\times r_2=20$，

$$r_2=\frac{20}{2\pi}=\frac{10}{\pi}\text{（公分）}$$

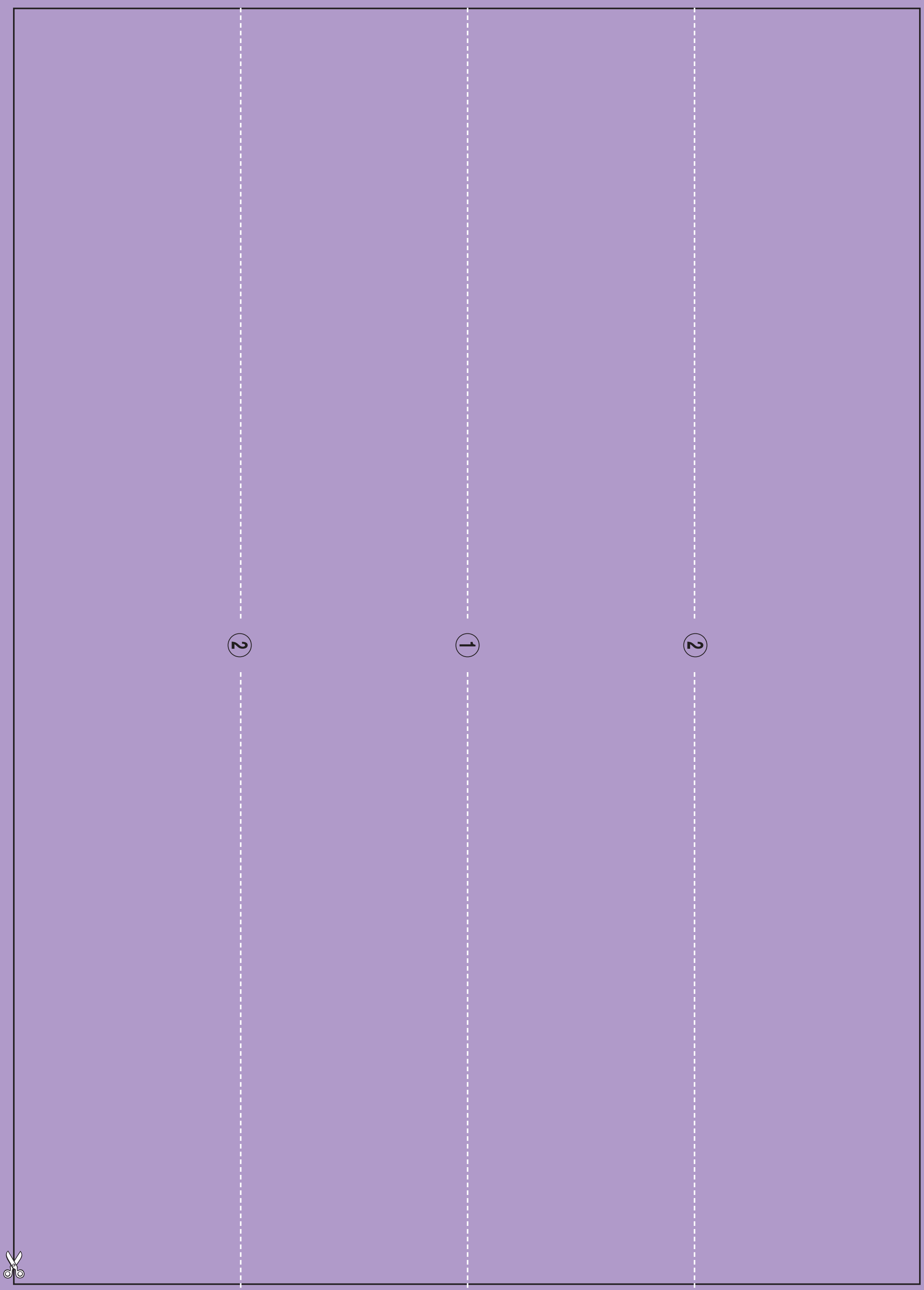
$\therefore$體積$=\pi\times{r_2}^2\times30=\pi\times(\frac{10}{\pi})^2\times30=\frac{3000}{\pi}$（立方公分）

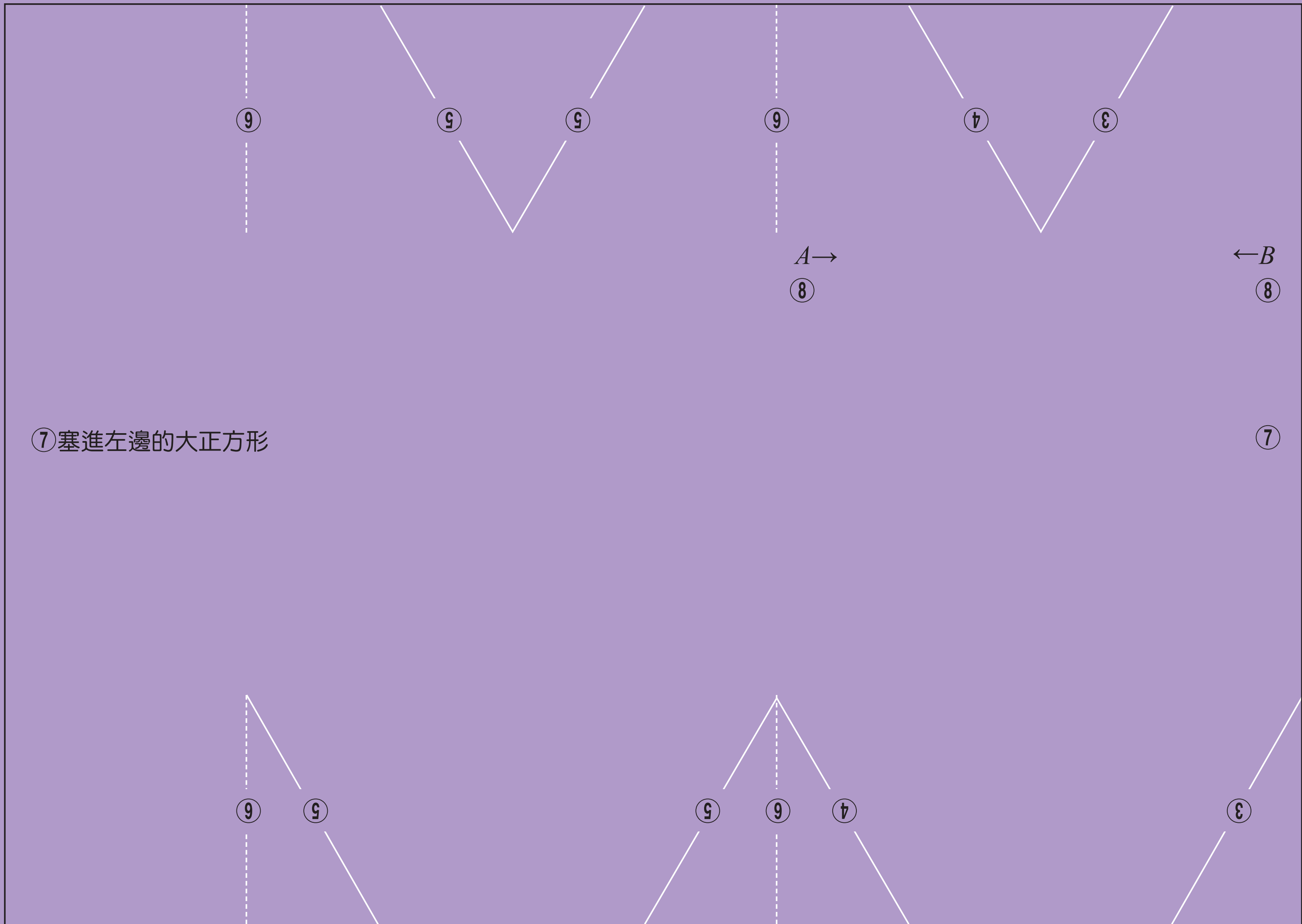
（將體積四捨五入取到小數點後第二位，其近似值為 954.93 立方公分。）

答：$\frac{3000}{\pi}$ 立方公分。

⑶$\frac{4500}{\pi}:\frac{3000}{\pi}=4500:3000=3:2$。

答：3：2。


②
①
②

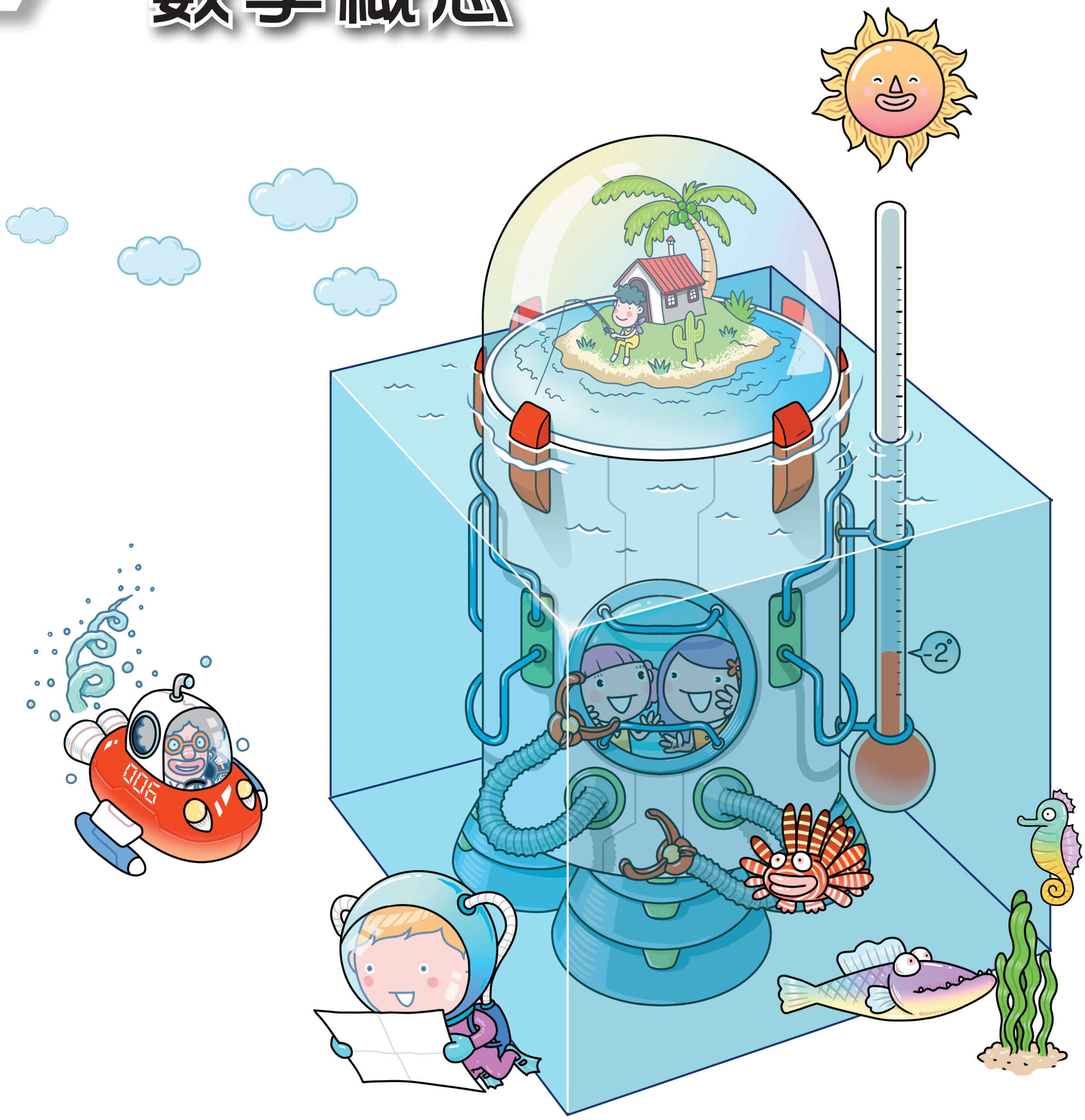

⑦塞進左邊的大正方形
⑥ ⑤ ⑤ ⑥ ④ ③
A→ ⑧
←B ⑧
⑦
⑥ ⑤ ⑤ ⑥ ④ ③

789 數學概念

三年＿＿＿＿班　座號＿＿＿＿

姓名：＿＿＿＿＿＿＿＿

教師：＿＿＿＿＿＿＿＿



★學生若熟記概念後，可於重點前面標上記號或塗色。

◎整數與數線（1 上 1-1、1-2、1-3）

▽❶正數與負數：

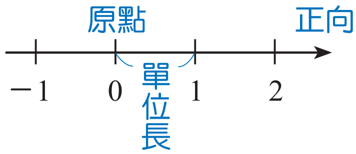
比 0 大的數稱為正數，比 0 小的數稱為負數，而 0 不是正數，也不是負數。

例 2、3.2 為正數；$-\frac{1}{5}$、-4 為負數。

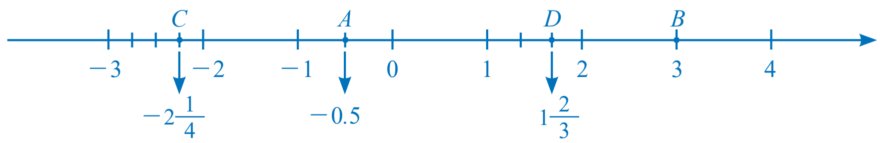
▽❷數線：

(1)數線的三要素：原點、正向（箭頭）、單位長。

(2)數線上向右為正向，愈右邊的點所對應的數愈大，愈左邊的點所對應的數愈小。



例 在數線上標示出 $A(-0.5)$、$B(3)$、$C(-2\frac{1}{4})$、$D(1\frac{2}{3})$ 四點。



由大到小排列為：$3>1\frac{2}{3}>-0.5>-2\frac{1}{4}$。

▽❸相反數：

(1)在數線上，位於原點的左右兩側，且與原點的距離相等，所對應的數互為相反數。

(2)不論 a 為正數或負數，a 與 $-a$ 互為相反數；0 的相反數是 0。

例 因為 3 與 −3 位於原點左右兩側，且與原點的距離相等，故 3 與 −3 互為相反數。

▽❹絕對值：

(1)數線上，點 $A(a)$ 與原點的距離稱為這個數 a 的絕對值，以 $|a|$ 表示。

例 $|-6|$ 表示在數線上，「−6」這個數的點與原點的距離。

(2)互為相反數的兩數，其絕對值相等，即 $|a|=|-a|$。

(3)任意數 a 的絕對值會大於或等於 0。

例 $|-4|=|4|=4$；$|-2|>0$；$|0|=0$。

▽❺數線上兩點間的距離：

數線上 $A(a)$、$B(b)$ 兩點間的距離可記作 $\overline{AB}$，$\overline{AB}=|a-b|$ 或 $|b-a|$。

例 如果 $A(5)$、$B(-2)$ 為數線上兩點，則 $\overline{AB}=|5-(-2)|=7$ 或 $|(-2)-5|=7$。

▽❻正負數的加減：

(1)加法：①交換律：如果 a、b 為任意兩個整數，則 $a+b=b+a$。

例 $3+(-2)=(-2)+3=1$。

②結合律：如果 a、b、c 為任意三數，則 $(a+b)+c=a+(b+c)$。

例 $(7+4)+(-5)=7+[4+(-5)]=6$。

(2)減法：減去一個數就相當於加上這個數的相反數，即

若 a、b 為任意兩數，則① $a-b=a+(-b)$。

② $a-(-b)=a+b$。

例 (1) $(-5)-\underbrace{3=(-5)+(-3)}_{\text{相反數}}=-8$。

(2) $4-\underbrace{(-2)=4+2}_{\text{相反數}}=6$。

(3)去括號：如果 a、b 為任意兩數，則① $-(a+b)=-a-b$。

② $-(a-b)=-a+b$。

例 (1) $-(6+3)=-6-3=-9$。

(2) $-(8-4)=-8+4=-4$。

▽❼正負數的乘除：

(1)乘法：①偶數個負數相乘，其乘積為正數；奇數個負數相乘，其乘積為負數。

例 (1) $3\times(-2)\times(-1)\times5=30$ 為正數。

(2) $(-1)\times(-2)\times(-3)\times5=-30$ 為負數。

②交換律：如果 a、b 為任意兩數，則 $a\times b=b\times a$。

例 $5\times(-4)=(-4)\times5=-20$。

③結合律：如果 a、b、c 為任意三數，則 $(a\times b)\times c=a\times(b\times c)$。

例 $[3\times(-7)]\times2=3\times[(-7)\times2]=-42$。

④乘法對加、減法的分配律：如果 a、b、c 為任意三數，則

$(a+b)\times c=a\times c+b\times c$；$c\times(a+b)=c\times a+c\times b$，

$(a-b)\times c=a\times c-b\times c$；$c\times(a-b)=c\times a-c\times b$。

例 (1) $101\times25=(100+1)\times25=100\times25+1\times25=2525$。

(2) $99\times25=(100-1)\times25=100\times25-1\times25=2475$。

(2)除法：兩個同號數相除，其結果為正數；兩個異號數相除，其結果為負數。

例 (1) $24\div8=3$，$(-24)\div(-8)=3$。

(2) $(-24)\div3=-8$，$24\div(-3)=-8$。

◎指數律與科學記號（1 上 1-4、2-3）

▽①指數記法：

同一個數 a 連乘 m 次時，可以簡記成指數記法的形式 a^m，讀作「a 的 m 次方」，其中 a 為底數，m 為指數。

例 $3\times3\times3\times3\times3=3^5$，其中 3 是底數，5 是指數。

▽②利用指數比大小：

(1)如果 a 是比 1 大的數時，n 愈大，則 a^n 的值愈大。

例 設 $a=(1.1)^{100}$，$b=(1.1)^{101}$，$c=(1.1)^{102}$，因為 1.1 比 1 大，所以 $a<b<c$。

(2)如果 b 是比 1 小的數時，n 愈大，則 b^n 的值愈小。

例 設 $p=(0.9)^{10}$，$q=(0.9)^{11}$，$r=(0.9)^{12}$，因為 0.9 比 1 小，所以 $p>q>r$。

▽③科學記號表示法：

以 $a\times10^m$ 表示一個數，其中 $1\leq a<10$，m 為整數，此種記錄方法稱為科學記號表示法。

例 (1)1750000 以科學記號可表示為 1.75×10^6。

$\rightarrow 1\leq1.75<10$

(2)0.000045 以科學記號可表示為 4.5×10^{-5}。

$\rightarrow 1\leq4.5<10$

▽④科學記號的比較大小：

比較兩個以科學記號表示的數 $a\times10^m$ 與 $b\times10^n$ 的大小，

(1)如果 $m>n$，則 $a\times10^m>b\times10^n$。（10 的次方越大，其值越大）

例 $2.3\times10^6>5.6\times10^4$。

(2)如果 $m=n$，且 $a>b$，則 $a\times10^m>b\times10^n$。

例 $7.2\times10^6>3.8\times10^6$。

▽⑤分數的次方：

如果 m 是任意正整數，a、b 為整數，且 $a\neq0$，則 $\left(\dfrac{b}{a}\right)^m=\dfrac{b^m}{a^m}$。

例 $\left(\dfrac{4}{5}\right)^3=\dfrac{4^3}{5^3}=\dfrac{64}{125}$。

▽⑥指數為 0：

如果 a 是不等於 0 的整數，則 $a^0=1$。例 $(-3)^0=1$。

▽⑦指數律：

如果 $a\neq0$ 且 $b\neq0$，m、n 為任意兩個不為負的整數，則：

(1) $a^m\times a^n=a^{m+n}$。

例 $3^2\times3^4=3^{2+4}=3^6$。

(2) $a^m\div a^n=a^{m-n}$。

例 $3^5\div3^2=3^{5-2}=3^3$。

(3) $(a^m)^n=a^{m\times n}$。

例 $(3^2)^4=3^{2\times4}=3^8$。

(4) $(a\times b)^m=a^m\times b^m$。

例 $(3\times4)^5=3^5\times4^5$。

◎最大公因數與最小公倍數(1 上 2-1、2-2)

▽❶因數與倍數：

如果 a、b、c 為任意三個正整數，而且 $a\div b=c$，即 $a=b\times c$，則

(1)b、c 是 a 的因數。(2) a 是 b、c 的倍數。

例 $180\div 30=6$，即 $30\times 6=180$，則

(1)30 與 6 是 180 的因數。(2)180 是 30 與 6 的倍數。

▽❷倍數的判別法：

(1)2 的倍數：個位數字是 0、2、4、6 或 8。例 12、124、236。

(2)3 的倍數：各位數字和是 3 的倍數。 例 21、153、312。

(3)5 的倍數：個位數字是 0、5。 例 30、145、225。

(4)11的倍數：「奇數位數字和」與「偶數位數字和」的差是 11 的倍數(包含 0)。

例 44、132、286。

(5)4 的倍數：末兩位數字是 4 的倍數。 例 48、128、236。

(6)9 的倍數：各位數字和是 9 的倍數。 例 36、171、261。

▽❸質數與合數：

(1)一個大於 1 的整數，只有 1 和它本身兩個因數，則稱此數為質數。

(2)一個大於 1 的整數，除了 1 和它本身之外，還有其他因數，則稱此數為合數。

例 2、3、5、7、11、13 是質數；4、6、8、9、10、12 是合數。

(3)1 不是質數，也不是合數；2 是最小的質數，也是質數中唯一的偶數。

▽❹質因數：

如果 a 是 b 的因數，且 a 是質數，就稱 a 為 b 的質因數。

例 6 的因數有 1、2、3、6，其中 2、3 是質數，所以 2 與 3 是 6 的質因數。

▽❺互質：

若 $(a, b)=1$，則稱兩數互質。例 $(8, 15)=1$，所以 8 與 15 互質。

▽❻利用標準分解式求最大公因數與最小公倍數：

(1)求 a、b 的最大公因數時，可先求出 a 和 b 的標準分解式，找出兩者共同的質因數，由共同質因數中，分別取指數(次方)最小者相乘，即為 a 和 b 的最大公因數。

例 $(2^2\times 3^4\times 5^2, 2^3\times 3^3\times 7)=2^2\times 3^3$。

(2)求 a、b 的最小公倍數時，可先求出 a 和 b 的標準分解式，找出兩者全部的質因數，再把兩者所有質因數中，分別取指數(次方)最大者相乘，即為 a 和 b 的最小公倍數。

例 $[2^2\times 3^4\times 5^2, 2^3\times 3^3\times 7]=2^3\times 3^4\times 5^2\times 7$。

◎分數（1 上 2-3）

▽❶最簡分數：

一個分數，如果分子與分母互質，則稱此分數為最簡分數。

例 $\frac{2}{7}$ 的分子 2 和分母 7 互質，所以 $\frac{2}{7}$ 是最簡分數。

▽❷倒數：

當兩個數的乘積為 1 時，稱這兩個數互為倒數。

例 $\frac{2}{3}\times\frac{3}{2}=1$，則 $\frac{2}{3}$ 與 $\frac{3}{2}$ 互為倒數。

▽❸分數的運算：

(1) 異分母分數的加減：當進行異分母分數的加減時，通常先通分，使得分母相同後再計算。

例 $-\frac{2}{3}+\frac{1}{2}=-\frac{4}{6}+\frac{3}{6}$ ← $[2,3]=6$

$=-\frac{1}{6}$

(2) 正負分數的除法：可用「除以一個數等於乘以它的倒數」的方法，將分數除法改為分數乘法再計算。

例 $(-\frac{2}{3})\div\frac{3}{5}=(-\frac{2}{3})\times\frac{5}{3}=-\frac{10}{9}$

除數 $\frac{3}{5}$ 的倒數

(3) 分數的四則運算：

①在混合算式中，如果含有指數的運算，則應先做完指數的運算，然後由左而右，先算乘（除），後算加（減）。

例 $\frac{5}{12}\times(-2)^2+\frac{9}{4}\div(\frac{3}{2})^3$

$=\frac{5}{12}\times4+\frac{9}{4}\div\frac{27}{8}$ ← 先做完指數的運算。

$=\frac{5}{3}+\frac{9}{4}\times\frac{8}{27}$ ← 由左而右，先乘除後加減。

$=\frac{7}{3}$

②當有括號或絕對值時，應優先計算括號或絕對值內的算式。

例 $|3\times1\frac{1}{6}|+6\div(-\frac{3}{2})$

$=\frac{7}{2}+6\div(-\frac{3}{2})$ ← 先計算絕對值內的算式。

$=\frac{7}{2}+6\times(-\frac{2}{3})$ ← 由左而右，先乘除後加減。

$=-\frac{1}{2}$

◎比例（1 下 3-1、3-2，3 上 1-1）

▽❶比的前項、後項與比值：

a、b 兩數的比記為 $a:b$，則

(1) a 稱為比的前項，b 稱為比的後項。

(2) a、b 的比值為 $\frac{a}{b}$，即 $a\div b$ 的值（$b\neq 0$）。

(3) 若 $a\div b=k$，表示 a 是 b 的 k 倍。

例 3：5 的前項是 3，後項是 5，比值是 $\frac{3}{5}$，表示 3 是 5 的 $\frac{3}{5}$ 倍。

▽❷最簡整數比：

一個比如果前項、後項都是整數，且此兩個整數的絕對值互質，則稱為最簡整數比。

例 4：7 是最簡整數比，6：8 不是最簡整數比。

▽❸比例式、內項與外項：

(1) 若 $a:b$ 和 $c:d$ 的比值相等，則 $a:b=c:d$ 稱為比例式。

(2) 比例式 $a:b=c:d$ 中，a、d 稱為外項，b、c 稱為內項，則 $a\times d=b\times c$，即外項乘積等於內項乘積。

外項

例 $2:3=4:6$　　　　$\underbrace{2\times 6}_{\text{（外項乘積）}}=\underbrace{3\times 4}_{\text{（內項乘積）}}$

內項

▽❹比例式的運算性質：

若 m、n 都是不為 0 的已知數，且 $a:b=m:n$，則

(1) $\frac{a}{m}=\frac{b}{n}$。　(2) 令 $\frac{a}{m}=\frac{b}{n}=r$，可得 $a=mr$，$b=nr$（$r\neq 0$）。

例 已知 $a:b=3:5$，則 (1) $\frac{a}{3}=\frac{b}{5}$。　(2) 令 $\frac{a}{3}=\frac{b}{5}=r$，可得 $a=3r$，$b=5r$（$r\neq 0$）。

▽❺正比與反比：

(1) 正比：在 x 與 y 的關係中，當 x 改變時，y 也隨著改變，且 y 值恆為 x 值的 k 倍（k 為定數，$k\neq 0$），此時 x、y 的關係為 $y=kx$（或 $\frac{y}{x}=k$），稱 y 和 x 成正比。

例 x、y 的關係為 $y=4x$，y 值恆為 x 值的 4 倍，y 和 x 成正比。

(2) 反比：在 x 與 y 的關係中，當 x 改變時，y 也隨著改變，且 x 與 y 的乘積為定數 k（$k\neq 0$），此時 x、y 的關係為 $xy=k$（或 $y=k\times\frac{1}{x}$），稱 y 和 x 成反比。

例 x、y 的關係為 $xy=16$，x 值和 y 值的乘積恆為固定數 16，y 和 x 成反比。

▽❻連比例式的應用：

已知 a、b、c 皆不等於 0，則下列三者有相同意義。

(1) $x:y:z=a:b:c$。(2) $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$。(3) $x=ar$，$y=br$，$z=cr$（$r\neq 0$）。

例 如果 $x:y:z=2:3:5$，則 $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{5}$ 或 $x=2r$，$y=3r$，$z=5r$（$r\neq 0$）。

◎平方根與根式(2 上 2-1、2-2)

▽❶ $\sqrt{a}$ 的意義：

(1)正方形面積為 a 時，其邊長記為 $\sqrt{a}$。 例 正方形面積為 7 時，其邊長記為 $\sqrt{7}$。

(2)若 $a>0$，則 $(\sqrt{a})^2=a$。 例 $(\sqrt{5})^2=5$。

▽❷ 平方根：

(1)每一個正數 a 都有兩個平方根 $\sqrt{a}$ 與 $-\sqrt{a}$，合併記為 $\pm\sqrt{a}$，且這兩個平方根互為相反數。

例 正數 5 有兩個平方根 $\sqrt{5}$ 與 $-\sqrt{5}$，合併記為 $\pm\sqrt{5}$。

(2)負數沒有平方根；0 的平方根為 0。

▽❸ 最簡根式：

形如 $r\sqrt{n}$ 的根式，若 r 是整數或分數，n 是正整數，且將 n 化成標準分解式後，每一個質因數的指數都是 1，則稱 $r\sqrt{n}$ 為最簡根式。

例 $30=2^1\times3^1\times5^1$，所以 $\sqrt{30}$、$5\sqrt{30}$、$\frac{2}{3}\sqrt{30}$ 都是最簡根式；
而 $18=2^1\times3^2$，所以 $\sqrt{18}$ 不是最簡根式。

▽❹ 根式的運算：

(1)根式的加減：根式做加減運算時，同類方根要合併；不是同類方根就無法合併。

例 $5\sqrt{2}+3\sqrt{5}-\sqrt{2}=\underbrace{5\sqrt{2}-\sqrt{2}}_{\text{同類方根要合併}}+3\sqrt{5}=4\sqrt{2}+3\sqrt{5}$。

(2)根式的乘法：若 $a\geq0$，$b\geq0$，則 $\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{a\times b}$。

例 $\sqrt{3}\times\sqrt{5}=\sqrt{3\times5}=\sqrt{15}$。

(3)根式的除法：若 $a\geq0$，$b>0$，則 $\sqrt{a}\div\sqrt{b}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}=\sqrt{a\div b}$。

例 $\sqrt{35}\div\sqrt{7}=\frac{\sqrt{35}}{\sqrt{7}}=\sqrt{\frac{35}{7}}=\sqrt{35\div7}=\sqrt{5}$。

▽❺ 有理化分母：

(1)若 $a>0$，則化簡分母為 $\sqrt{a}$ 的根式時，可以利用擴分將分母、分子同乘以 $\sqrt{a}$。

例 $\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$。

(2)若 $a>0$，$b>0$，則化簡分母為 $\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$、$\sqrt{a}\pm b$ 或 $a\pm\sqrt{b}$ 的根式時，可以利用平方差公式將分母有理化。

例 $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\frac{1\times(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})\times(\sqrt{3}-\sqrt{2})}=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3-2}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$。

◎數列與級數（2 下 1-1、1-2）

▽❶數列與等差數列：

(1)將數排成一列，並以逗點分開，稱為數列。

例 5 , 8 , 10 , 11 , 14 是一個數列，其首項 $a_1=5$，第 3 項 $a_3=10$，末項 $a_5=14$。

(2)一個數列中，任意相鄰兩項，後項減去前項所得的差都相同，稱為等差數列，這個差稱為公差，通常用 d 表示。

例 3 , 6 , 9 , 12 , 15 是一個等差數列，其公差 $d=6-3=3$。

▽❷等差數列第 n 項：

如果一個等差數列的首項為 a_1，公差為 d，則第 n 項 $a_n=a_1+(n-1)d$。

例 一個等差數列的首項為 2，公差為 3，則

第 5 項 $a_5=2+(5-1)\times3=14$，第 n 項 $a_n=2+(n-1)\times3=3n-1$。

▽❸等差中項：

若 b 為 a 與 c 的等差中項，則 $2b=a+c$，即 $b=\dfrac{a+c}{2}$。

例 4 與 12 的等差中項為 $\dfrac{4+12}{2}=8$。

▽❹等比數列與等比數列第 n 項：

(1)一個數列中，任意相鄰兩項，後項除以前項所得的比值都相同，稱為等比數列，這個比值也稱為公比，通常用 r 表示。

例 243 , 81 , 27 , 9 , 3 是一個等比數列，其公比 $r=\dfrac{1}{3}$。

(2)如果一個等比數列的首項為 a_1，公比為 r，則第 n 項 $a_n=a_1\times r^{n-1}$。

例 一個等比數列的首項為 5，公比為 2，則

第 4 項 $a_4=5\times2^{(4-1)}=40$，第 n 項 $a_n=5\times2^{(n-1)}$。

▽❺等比中項：

若 b 為 a 與 c 的等比中項，則 $b^2=ac$，即 $b=\pm\sqrt{ac}$。

例 4 與 16 的等比中項為 $\pm\sqrt{4\times16}=\pm\sqrt{64}=\pm8$。

▽❻級數與等差級數：

(1)將一個數列的各項用加號「＋」連接而成的式子稱為級數。

例 2 , 4 , 5 , 7 , 9 是一個數列，$2+4+5+7+9$ 就是一個級數。

(2)當 $a_1 , a_2 , a_3 , \cdots\cdots , a_n$ 為等差數列時，$a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n$ 為等差級數。

例 2 , 5 , 8 , 11 , 14 是一個等差數列，$2+5+8+11+14$ 是一個等差級數。

▽❼等差級數和的公式：

如果一個等差級數的首項為 a_1，公差為 d，第 n 項為 a_n，前 n 項的總和為 S_n，則

(1) $S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$。(2) $S_n=\dfrac{n[2a_1+(n-1)d]}{2}$。

例 等差級數 $5+8+11+\cdots\cdots+32$，共 10 項，則此級數的和為

$S_{10}=\dfrac{10\times(5+32)}{2}=185$ 或 $S_{10}=\dfrac{10\times[2\times5+(10-1)\times3]}{2}=185$。

◎乘法公式（2 上 1-1）

▽❶分配律：

$(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$。

例 $25\times201=(20+5)\times(200+1)=20\times200+20\times1+5\times200+5\times1=5025$。

▽❷乘法公式：

(1)和的平方公式：$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$。

例 $102^2=(100+2)^2=100^2+2\times100\times2+2^2=10404$。

(2)差的平方公式：$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$。

例 $98^2=(100-2)^2=100^2-2\times100\times2+2^2=9604$。

(3)平方差公式：$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$。

例 $93\times87=(90+3)(90-3)=90^2-3^2=8091$。

◎多項式（2 上 1-2、1-3）

▽❶多項式：

(1)由數和文字符號進行乘法和加法運算所構成的式子，稱為多項式。

例 $x+5$、$-0.3x+4$、x^2+2x-3 都是 x 的多項式。

(2)在一個多項式中，係數不為 0 的最高次項的次數為多項式的次數。

例 多項式 x^3+2x-5 為三次多項式；多項式 $4x+3$ 為一次多項式。

(3)如果一個多項式只有常數項，稱為常數多項式，若常數多項式不為 0，則稱為零次多項式。

例 4、-2、$\frac{3}{2}$、0 都是常數多項式。

▽❷多項式的運算：

(1)多項式的加減：

①用橫式做多項式加、減運算，若有括號，應先去括號再合併同類項。

例 $(5x^2+2x-3)+(-2x^2+x+4)$

$=5x^2+2x-3-2x^2+x+4$ ← 先去括號。

$=(5x^2-2x^2)+(2x+x)+(-3+4)$ ← 合併同類項。

$=3x^2+3x+1$。

②用直式做多項式加、減運算，通常先把多項式依降冪或升冪排列，同類項對齊，缺項補 0，再將同類項的係數相加或相減。

例 計算 $(2x^2-6)-(9-2x+3x^2)$。

直式：

$$\begin{array}{rrrr} & 2x^2 & +0x & -6 \\ -) & 3x^2 & -2x & +9 \\ \hline & -x^2 & +2x & -15 \end{array}$$

所以得到 $-x^2+2x-15$。

(2) 多項式的乘法：利用分配律與乘法公式進行多項式的乘法。

例 $(2x-1)(3x+2)=6x^2+4x-3x-2=6x^2+x-2$。

(3) 多項式的除法：

① 多項式除以多項式時，先做降冪排列，再用直式算法運算。

② 多項式的乘除法如有缺項，通常要補 0。

③ 被除式＝除式×商式＋餘式。

例 求 $(3x^2-7)\div(x+2)$ 的商式與餘式。

直式：

$$
\begin{array}{r|l}
 & 3x\ -6 \\
\hline
x+2 & 3x^2-0x-\ \ 7 \\
 & 3x^2+6x \\
\hline
 & \quad -6x-\ \ 7 \\
 & \quad -6x-12 \\
\hline
 & \qquad\qquad 5
\end{array}
$$

得到商式為 $3x-6$，餘式為 5。

所以 $3x^2-7=(x+2)(3x-6)+5$

◎一元一次方程式（1 上 3-1、3-2）

▽❶一元一次方程式與解：

(1) 只含一種未知數，且未知數的最高次方是一次的等式，稱為一元一次方程式。

例 $4a$、$-2x+1$、$y-7$ 皆為一元一次式；

$4a=6$、$-3x+4=x+1$、$y-7=2y+3$ 皆為一元一次方程式。

(2) 如果一個數代入一元一次方程式後，能使等號左右兩邊的值相等，稱這個數為此一元一次方程式的解。

例 將 $x=3$ 代入一元一次方程式 $-2x+4=x-5$，

左式 $=-2\times3+4=-2$，右式 $=3-5=-2$，

所以 $x=3$ 是 $-2x+4=x-5$ 的解。

▽❷等量公理：

當等號左右兩邊相等時，在等號左右兩邊同時加、減、乘、除以一數（除數不為 0），等號仍然成立。即如果 $a=b$，則

(1) $a+c=b+c$。　(2) $a-c=b-c$。

(3) $a\times c=b\times c$。　(4) $a\div c=b\div c$（此時 $c\neq0$）。

例 解一元一次方程式 $2x-20=30$。

$2x-20=30$

$2x-20+20=30+20$ ← 等號兩邊同加 20。

$2x=50$

$2x\div2=50\div2$ ← 等號兩邊同除以 2。

$x=25$

◎一元一次不等式（1 下 第 4 章）

▽❶一元一次不等式與解：

(1)只含有一種未知數（一元），且最高次方為一次的不等式，稱為一元一次不等式。

例 $4x>6$、$2x<x-7$、$-3x+4\geq x+1$ 皆為一元一次不等式。

(2)如果將一個數代入不等式中的未知數，可使得不等式成立，則這個數稱為此不等式的一個解。

例 $x=1$ 是一元一次不等式 $2x+5>1$ 的一個解。

(3)解不等式時，須呈現不等式所有的解。

例 一元一次不等式 $2x+5>1$ 的解為 $x>-2$。

▽❷不等式的運算性質：

如果 $a>b$，c 為任意數，則：

(1)$a+c>b+c$；$a-c>b-c$。

(2)如果 $c>0$，則 $a\times c>b\times c$；$a\div c>b\div c$。

如果 $c<0$，則 $a\times c<b\times c$；$a\div c<b\div c$。

而對於 $a<b$，$a\geq b$，$a\leq b$ 的情形，上述的性質仍然成立。

例 解不等式 $-4x+12>28$。

$-4x+12>28$

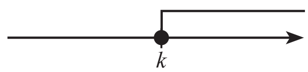
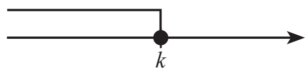
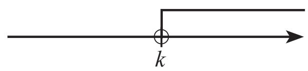
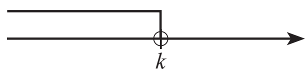
$-4x+12-12>28-12$ ← 不等號兩邊同減去 12。

$-4x>16$

$(-4x)\div(-4)<16\div(-4)$ ← 不等號兩邊同除以 -4，則 $>$ 要變成 $<$。

$x<-4$

▽❸一元一次不等式解的形式與圖示：

(1)$x\geq k$	表示包含 k 和比 k 大的數都是不等式的解。	
(2)$x\leq k$	表示包含 k 和比 k 小的數都是不等式的解。	
(3)$x>k$	表示所有比 k 大的數都是不等式的解。	
(4)$x<k$	表示所有比 k 小的數都是不等式的解。	

◎二元一次方程式(1 下 1-1、2-2)

▽❶ 二元一次方程式與解：

(1)只含有兩種未知數(二元)，且這兩種未知數的最高次方都是一次的等式，稱為二元一次方程式。

例 $-2x+y$、$x+2y-5$ 皆為二元一次式；
$x+y=6$、$3x=2y$ 皆為二元一次方程式。

(2)二元一次方程式中的未知數 x、y 以一組特定的數代入，例如：$x=a$、$y=b$ 可使等號左右兩邊的值相等時，則 $x=a$、$y=b$ 為此方程式的一組解。

例 將 $x=1$、$y=2$ 代入 $x+2y=5$ 時，$x+2y=1+2\times2=5$(合)，
所以 $x=1$、$y=2$ 是方程式 $x+2y=5$ 的一組解。

▽❷ 二元一次方程式的圖形：

(1)一個二元一次方程式的任意一組解，可以記錄成數對的形式，此時這一組解在坐標平面上的圖形就是一個點。

例 有 a、b 兩個數，且 $(a, 3)$、$(-1, b)$ 都在二元一次方程式 $2x+y=5$ 的圖形上，求 a、b 的值。
將 $(a, 3)$、$(-1, b)$ 代入 $2x+y=5$，
可得 $2a+3=5$，$a=1$，
$-2+b=5$，$b=7$。

(2)二元一次方程式的圖形都是一條直線。

(3)二元一次方程式 $ax+by=c$ 的圖形：

條件	$a\neq0$，$b\neq0$	$a=0$，$b\neq0$	$a\neq0$，$b=0$
圖形	不垂直兩軸的直線	垂直 y 軸的直線	垂直 x 軸的直線
例	$-2x+3y=6$	$y=2$	$x=4$

◎二元一次聯立方程式（1 下 1-2、2-2）

▽❶二元一次聯立方程式與解：

(1)兩個並列在一起的二元一次方程式，稱為二元一次聯立方程式或二元一次方程組。

例 $\begin{cases} x+2y=7 \\ x+4y=13 \end{cases}$ 為一組二元一次聯立方程式或二元一次方程組。

(2)將 $x=a$、$y=b$ 代入二元一次聯立方程式後，可使得兩個方程式的等式都成立，則稱 $x=a$、$y=b$ 為此二元一次方程式的解。

例 將 $x=1$、$y=3$ 代入 $x+2y=7$ 及 $x+4y=13$，可使這兩個方程式都成立，

所以 $x=1$、$y=3$ 是二元一次聯立方程式 $\begin{cases} x+2y=7 \\ x+4y=13 \end{cases}$ 的解。

▽❷二元一次聯立方程式的解法：

(1)代入消去法：利用取代的方式，先消去一種未知數的解題方法，稱為代入消去法。

例 $\begin{cases} 2x+y=10 \cdots\cdots ① \\ x=2y \cdots\cdots ② \end{cases}$ 將②式代入①式可消去 x，得 $2\times(2y)+y=10$。

(2)加減消去法：將兩個方程式相加或相減，先消去一種未知數的解題方法，稱為加減消去法。

例 $\begin{cases} 2x+3y=10 \cdots\cdots ① \\ 2x-y=-6 \cdots\cdots ② \end{cases}$ ①式－②式可消去 x，得 $4y=16$。

▽❸二元一次聯立方程式的圖形與其解：

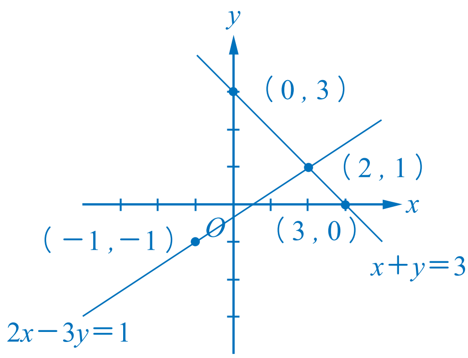
二元一次聯立方程式的解就是這兩個方程式圖形的交點坐標；兩條直線的交點坐標就是這兩條直線所代表的兩個方程式的共同解。

例 二元一次聯立方程式 $\begin{cases} x+y=3 \\ 2x-3y=1 \end{cases}$ 的解為 $x=2$、$y=1$，

所以此聯立方程式圖形的交點坐標為 $(2,1)$。

x	0	3
y	3	0

x	2	-1
y	1	-1



◎一元二次方程式（2 上 3-1、3-2、4-1、4-2）

▽❶因式與倍式：

A、B、C 為三個不為 0 的多項式，若 $A=B\times C$，則稱 B 與 C 是 A 的因式，A 是 B 與 C 的倍式。

例 $x^2-3x+2=(x-2)(x-1)$，稱 $(x-2)$ 與 $(x-1)$ 為 x^2-3x+2 的因式，
而 x^2-3x+2 是 $(x-2)$ 與 $(x-1)$ 的倍式。

▽❷因式分解：

(1)將一個二次多項式寫成兩個一次多項式的乘積，稱為二次式的因式分解。

例 x^2-4x+3 可因式分解成 $(x-3)(x-1)$。

(2)提公因式法：形如 $A\times C+B\times C$ 的多項式，可提出公因式 C，

$$A\times C+B\times C=C(A+B)。$$

例 $x(x+1)+7(x+1)=(x+1)(x+7)$。

(3)利用平方差公式：將形如 A^2-B^2 的多項式因式分解為 $(A+B)(A-B)$ 的形式。

例 $x^2-25=x^2-5^2=(x+5)(x-5)$。

(4)利用完全平方公式：

①將形如 $A^2+2AB+B^2$ 的多項式因式分解為 $(A+B)^2$ 的形式。

例 $x^2+8x+16=x^2+2\cdot x\cdot 4+4^2=(x+4)^2$。

②將形如 $A^2-2AB+B^2$ 的多項式因式分解為 $(A-B)^2$ 的形式。

例 $4x^2-12x+9=(2x)^2-2\cdot 2x\cdot 3+3^2=(2x-3)^2$。

(5)十字交乘法：

①二次項係數為 1：x^2+bx+c 可用十字交乘法因式分解為 $(x+m)(x+n)$。

例 $x^2+x-12=(x+4)(x-3)$。

$$\begin{array}{ccc} x & \times & +4 \\ x & & -3 \\ \hline 4x & +(-3)x=x & \end{array}$$

②二次項係數不為 1：ax^2+bx+c 可用十字交乘法因式分解為 $(px+q)(rx+s)$。

例 $3x^2-11x+10=(x-2)(3x-5)$。

$$\begin{array}{ccc} x & \times & -2 \\ 3x & & -5 \\ \hline -6x & +(-5)x=-11x & \end{array}$$

▽❸一元二次方程式與解：

(1)可以整理成 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的形式，只含有一種未知數 x，且未知數最高次數是 2 的等式，稱為一元二次方程式。

例 $3x(x-2)=1$ 可展開移項整理成 $3x^2-6x-1=0$，所以它是一元二次方程式。

(2)如果一個數代入一元二次方程式後，能使等號左右兩邊的值相等，稱這個數為此一元二次方程式的解。

例 將 $x=3$ 代入一元二次方程式 $x^2-4x+3=0$，則 $x^2-4x+3=3^2-4\times3+3=0$，所以 $x=3$ 是 $x^2-4x+3=0$ 的一個解。

▽❹一元二次方程式求解的方法：

(1)因式分解法：將一元二次方程式整理成等號右邊為 0 的方程式後，若等號左邊的二次式可以利用因式分解的方法分成兩個一次式的乘積，則可以運用「如果 $A\times B=0$，則 $A=0$ 或 $B=0$」的性質求解。

例 利用因式分解法解一元二次方程式 $x^2+5x+6=0$。

$x^2+5x+6=0$，$(x+2)(x+3)=0$，$x=-2$ 或 $x=-3$，

因此方程式的解為 -2 與 -3。

(2)配方法：將一元二次方程式整理成 $(x+a)^2=b$ 的形式，再利用平方根的概念求解。

例 利用配方法解一元二次方程式 $x^2+6x-1=0$。

$x^2+6x-1=0$

$x^2+6x=1$ ← 將常數項移到等號右邊

$x^2+6x+3^2=1+3^2$ ← 等號兩邊同加 3^2

$(x+3)^2=10$

$x+3=\pm\sqrt{10}$ ← 平方根概念

$x=-3\pm\sqrt{10}$

(3)公式解：解一元二次方程式 $ax^2+bx+c=0$，

①當判別式 $b^2-4ac>0$ 時，$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$。

例 利用公式解，求一元二次方程式 $x^2-7x+9=0$ 的解。

因為判別式 $b^2-4ac=(-7)^2-4\times1\times9=13>0$，

所以原方程式的解為 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\dfrac{-(-7)\pm\sqrt{13}}{2\times1}=\dfrac{7\pm\sqrt{13}}{2}$，

故方程式的解為 $\dfrac{7+\sqrt{13}}{2}$ 與 $\dfrac{7-\sqrt{13}}{2}$。

②當判別式 $b^2-4ac=0$時，$x=-\dfrac{b}{2a}$(重根)。

例 利用公式解，求一元二次方程式 $-2x^2+8x-8=0$ 的解。

因為判別式 $b^2-4ac=8^2-4\times(-2)\times(-8)=0$，

所以原方程式的解為 $x=-\dfrac{b}{2a}=\dfrac{-8}{2\times(-2)}=2$，

故方程式的解為 2(重根)。

③當判別式 $b^2-4ac<0$ 時，方程式沒有解。

例 利用公式解，求一元二次方程式 $2x^2+x+1=0$ 的解。
因為判別式 $b^2-4ac=1^2-4\times2\times1=-7<0$，
所以方程式沒有解。

◎直角坐標平面（1 下 2-1，2 上 2-3）

▽❶點的坐標：

坐標平面上任一點 P 點的位置以數對 (a,b) 表示，則稱 P 點坐標為 (a,b)，記作 $P(a,b)$。

例 數對 $(3,-2)$ 表示在坐標平面上 x 坐標是 3，y 坐標是 -2 的點。

▽❷兩軸上點的坐標：

(1) x 軸上的任意一點，其 y 坐標必為 0，可寫為 $(a,0)$ 的形式。
(2) y 軸上的任意一點，其 x 坐標必為 0，可寫為 $(0,b)$ 的形式。

例 點 $(4,0)$、$(-2,0)$ 皆在 x 軸上，點 $(0,3)$、$(0,-5)$ 皆在 y 軸上。

▽❸點與兩軸的距離：

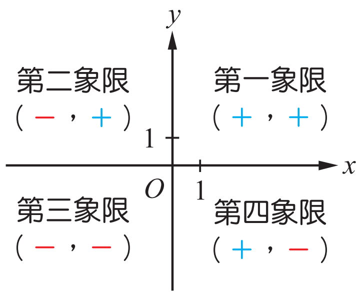
如果 $P(a,b)$ 為坐標平面上的一點，則 P 點與 x 軸的距離為 $|b|$ 個單位長，與 y 軸的距離為 $|a|$ 個單位長。

例 $P(5,-2)$ 與 x 軸的距離為 $|-2|=2$，
與 y 軸的距離為 $|5|=5$。

▽❹象限：

直角坐標平面被 x 軸與 y 軸分割成四個象限。

例 點 $(2,3)$ 在第一象限，點 $(-3,2)$ 在第二象限，
點 $(-4,-1)$ 在第三象限，點 $(5,-4)$ 在第四象限。



▽❺兩點距離：

坐標平面上兩點 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$ 的距離為

$\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$。

例 已知坐標平面上 $A(2,1)$、$B(-4,9)$ 兩點，
則 $\overline{AB}=\sqrt{(-4-2)^2+(9-1)^2}=\sqrt{100}=10$。

◎線型函數（2 下 2-1、2-2）

▽❶函數：

任意給定一個 x 值時，都恰有一個 y 值與它對應，這種 x 與 y 之間的關係稱為 y 是 x 的函數。

例 已知 x、y 兩變數的關係如下，下列哪些表示 y 是 x 的函數關係？

(A)

x	1	1	1	1
y	2	3	4	5

(B)

x	1	2	3	4
y	2	2	2	2

(C)

x	1	2	3	4
y	1	2	3	4

(D)

x	1	2	3	1
y	1	2	3	4

答：(B)、(C)。

▽❷函數值：

若 y 是 x 的函數，則 $x=a$ 時的 y 值稱為此函數在 $x=a$ 時的函數值。

例 函數 $y=3x+1$ 中，當 $x=2$ 時，對應的函數值為 $y=3\times2+1=7$。

▽❸線型函數：

形如 $y=ax+b$ 的函數，稱為線型函數，其中：

(1) 當 $a\neq0$ 時，$y=ax+b$ 稱為一次函數。

例 $y=x+3$、$y=-0.5x+1$ 皆是一次函數。

(2) 當 $a=0$ 時，$y=b$ 稱為常數函數。

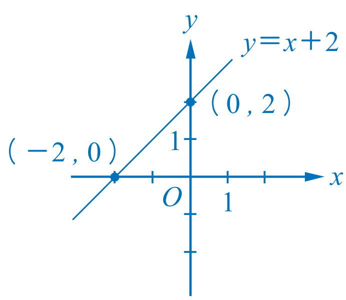
例 $y=5$、$y=-2$ 皆是常數函數。

▽❹線型函數圖形：

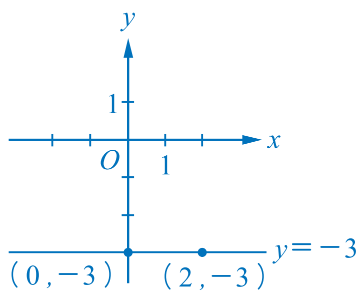
(1) 在坐標平面上，將 $y=ax+b$ 所有點 (x,y) 標示出來，所得到的圖形就是函數 $y=ax+b$ 的圖形。

(2) 一次函數的圖形是一條斜直線；常數函數的圖形為平行 x 軸的直線。

例 (1) 一次函數 $y=x+2$ 的圖形，如下圖所示：



(2) 常數函數 $y=-3$ 的圖形，如下圖所示：



◎二次函數（3 下 1-1、1-2）

▽❶二次函數：

形如 $y=ax^2+bx+c$，其中 $a\neq0$ 且 x 的最高次數為 2，稱為二次函數。

例 $y=x^2$、$y=2x^2+3x+1$、$y=-2(x-3)^2+4$ 皆是二次函數。

▽❷二次函數的圖形：

(1)

函數	開口方向	頂點	對稱軸方程式
$y=ax^2$	$a>0$，開口向上 $a<0$，開口向下	$(0,0)$	$x=0$
$y=ax^2+k$		$(0,k)$	$x=0$
$y=a(x-h)^2$		$(h,0)$	$x=h$
$y=a(x-h)^2+k$		(h,k)	$x=h$

(2) 當 $|a|$ 愈小，其圖形開口愈大。

例

函數	開口方向	頂點	對稱軸方程式
甲：$y=3x^2$	向上	$(0,0)$	$x=0$
乙：$y=-2x^2+5$	向下	$(0,5)$	$x=0$
丙：$y=(x-4)^2$	向上	$(4,0)$	$x=4$
丁：$y=-4(x+1)^2+3$	向下	$(-1,3)$	$x=-1$

開口由大到小排列為丙＞乙＞甲＞丁。

▽❸最大值或最小值：

形如 $y=a(x-h)^2+k$ 的二次函數，有最大值或最小值：

(1) 當 $a>0$ 時，圖形開口向上，頂點 (h,k) 為最低點；
在 $x=h$ 時，函數 y 有最小值 k。

例 二次函數 $y=2(x-1)^2+3$ 的圖形開口向上，頂點 $(1,3)$ 為最低點，
當 $x=1$ 時，函數 y 有最小值 3。

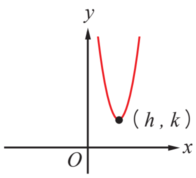
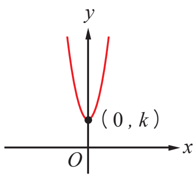
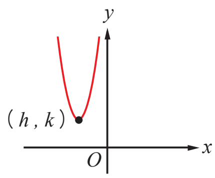
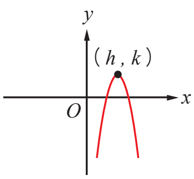
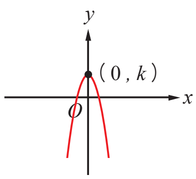
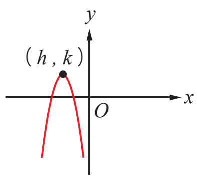
(2) 當 $a<0$ 時，圖形開口向下，頂點 (h,k) 為最高點；
在 $x=h$ 時，函數 y 有最大值 k。

例 二次函數 $y=-3(x+2)^2-1$ 的圖形開口向下，頂點 $(-2,-1)$ 為最高點，
當 $x=-2$ 時，函數 y 有最大值 -1。

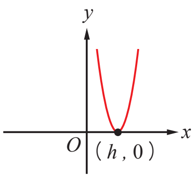
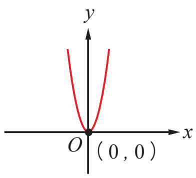
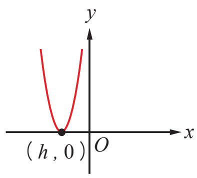
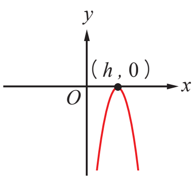
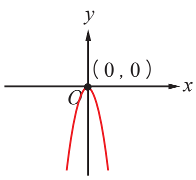
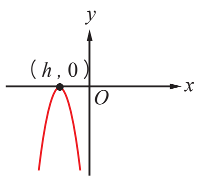
▽❹ **判別二次函數的圖形與 x 軸的交點個數：**

形如 $y=a(x-h)^2+k$ 的二次函數：

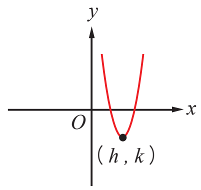
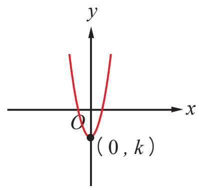
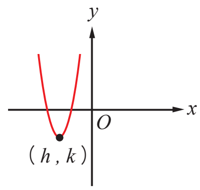
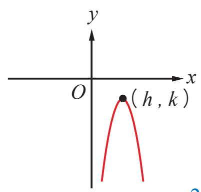
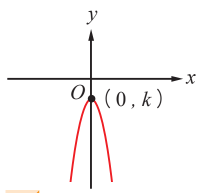
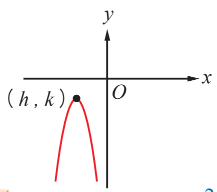
(1) 頂點在 x 軸上方 $(k>0)$

開口方向	圖形			交點個數
向上 $(a>0)$	$h>0$	$h=0$	$h<0$	0
	 例 $y=2(x-3)^2+1$	 例 $y=2x^2+1$	 例 $y=2(x+3)^2+1$	
向下 $(a<0)$	$h>0$	$h=0$	$h<0$	2
	 例 $y=-2(x-3)^2+1$	 例 $y=-2x^2+1$	 例 $y=-2(x+3)^2+1$	

(2) 頂點在 x 軸上 $(k=0)$

開口方向	圖形			交點個數
向上 $(a>0)$	$h>0$	$h=0$	$h<0$	1
	 例 $y=2(x-3)^2$	 例 $y=2x^2$	 例 $y=2(x+3)^2$	
向下 $(a<0)$	$h>0$	$h=0$	$h<0$	1
	 例 $y=-2(x-3)^2$	 例 $y=-2x^2$	 例 $y=-2(x+3)^2$	

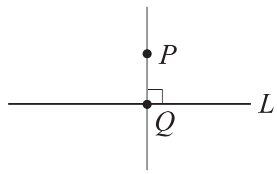
(3)頂點在 x 軸下方（$k<0$）

<table>
<tr><th>開口方向</th><th colspan="3">圖形</th><th>交點個數</th></tr>
<tr><td rowspan="2">向上
（$a>0$）</td><td>$h>0$</td><td>$h=0$</td><td>$h<0$</td><td rowspan="2">2</td></tr>
<tr><td>例 $y=2(x-3)^2-1$</td><td>例 $y=2x^2-1$</td><td>例 $y=2(x+3)^2-1$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">向下
（$a<0$）</td><td>$h>0$</td><td>$h=0$</td><td>$h<0$</td><td rowspan="2">0</td></tr>
<tr><td>例 $y=-2(x-3)^2-1$</td><td>例 $y=-2x^2-1$</td><td>例 $y=-2(x+3)^2-1$</td></tr>
</table>

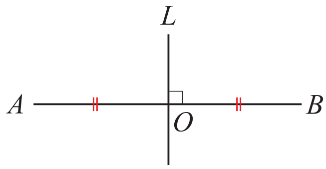
◎垂直與平分（1 上 第 4 章）

▽❶垂直與平分：

(1) 垂直：如圖，若 $\overleftrightarrow{PQ}\perp L$，其中 $\overleftrightarrow{PQ}$ 是 L 的垂線，
Q 點為 $\overleftrightarrow{PQ}$ 在 L 上的垂足。



(2) 垂直平分線：如圖，若直線 L 為 $\overline{AB}$ 的垂直平分線（中垂線），O 點為垂足，則 $L\perp\overline{AB}$ 且 $\overline{AO}=\overline{BO}$。



◎線對稱（1 上 第 4 章）

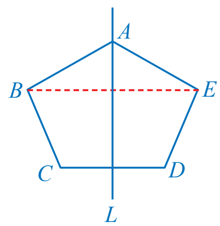
▽❶線對稱圖形：

若圖形沿著某一條直線對摺，則兩側的圖形完全重疊，則此摺線稱為對稱軸，重疊的兩點稱為對稱點，重疊的線段稱為對稱線段，重疊的角稱為對稱角。

▽❷線對稱圖形的性質：

對稱線段等長，對稱角相等，對稱軸垂直平分兩個對稱點的連線段。

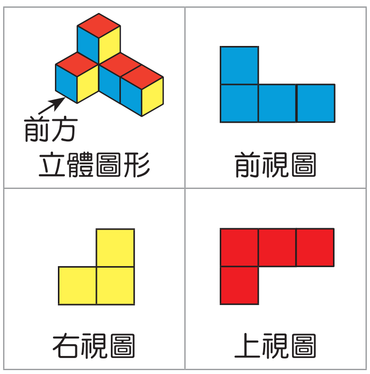
例 如圖，B 的對稱點為 E，$\angle C=\angle D$，$\overline{AB}=\overline{AE}$，
L 為 $\overline{BE}$ 的中垂線。



◎三視圖（1 上 第 4 章）

▽❶三視圖：

立體圖形的前視圖、上視圖和右視圖合稱為三視圖。



◎線與角（2 下 3-1、3-2、3-3）

▽❶互補與互餘：

(1)若$\angle A+\angle B=180^\circ$，則稱$\angle A$ 和$\angle B$ 互補。

例 已知$\angle A=50^\circ$，則$\angle A$ 的補角為$180^\circ-50^\circ=130^\circ$。

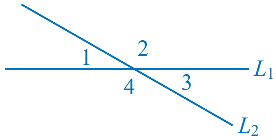
(2)若$\angle A+\angle B=90^\circ$，則稱$\angle A$ 和$\angle B$ 互餘。

例 已知$\angle A=50^\circ$，則$\angle A$ 的餘角為$90^\circ-50^\circ=40^\circ$。

▽❷對頂角：

(1)兩直線相交時會產生四個角，其中不相鄰的兩個角，稱為一組對頂角。

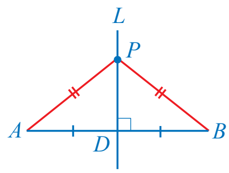
(2)兩直線相交於一點時，所形成的對頂角相等。



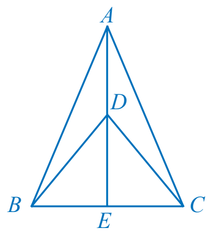
例 如圖，直線L_1、L_2 相交於一點，若$\angle 1=30^\circ$，
則$\angle 2=\angle 4=180^\circ-30^\circ=150^\circ$，$\angle 3=\angle 1=30^\circ$。

▽❸中垂線的性質與判別：

一線段中垂線上任一點到此線段的兩端點距離相等；反之，若一點到某線段的兩端點距離相等，則該點在此線段的中垂線上。



例 如圖，已知直線L 垂直平分$\overline{AB}$，P 為直線L 上任意一點，則$\overline{PA}=\overline{PB}$；反之，若$\overline{PA}=\overline{PB}$，則$P$ 點在$\overline{AB}$ 的中垂線L 上。



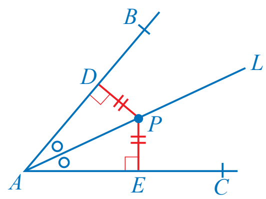
例 如圖，已知$\overline{AB}=\overline{AC}$，$\overline{BD}=\overline{CD}$，$\overline{AE}=12$，$\overline{BC}=10$，求$\overline{AB}$。

$\because \overline{AB}=\overline{AC}$，$\overline{BD}=\overline{CD}$，$\therefore \overline{AE}$ 垂直平分$\overline{BC}$，

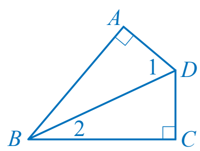
$\overline{BE}=\dfrac{1}{2}\overline{BC}=\dfrac{1}{2}\times 10=5$，故$\overline{AB}=\sqrt{12^2+5^2}=13$。

▽❹角平分線的性質與判別：

一個角的角平分線上任一點到此角的兩邊距離相等；反之，若某角內部的一點到此角的兩邊距離相等，則該點在此角的角平分線上。



例 如圖，已知L 為$\angle DAE$ 的角平分線，P 為L 上任意一點，若$\overline{PD}\perp\overline{AD}$，$\overline{PE}\perp\overline{AE}$，則$\overline{PD}=\overline{PE}$；
反之，$\overline{PD}\perp\overline{AD}$，$\overline{PE}\perp\overline{AE}$，且$\overline{PD}=\overline{PE}$，
則P 點在$\angle DAE$ 的角平分線L 上。



例 如圖，四邊形$ABCD$中，已知$\overline{AD}\perp\overline{AB}$，$\overline{CD}\perp\overline{BC}$，$\overline{AD}=\overline{CD}$，若$\angle 1=65^\circ$，求$\angle 2$。

$\because \overline{AD}\perp\overline{AB}$，$\overline{CD}\perp\overline{BC}$，且$\overline{AD}=\overline{CD}$，

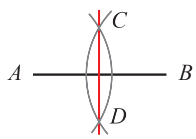
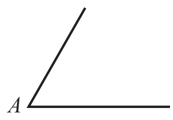
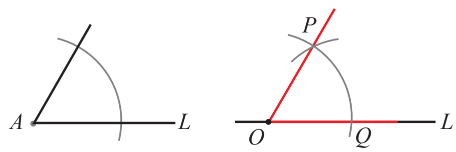
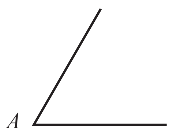
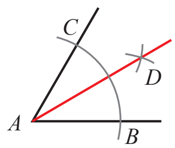
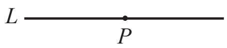
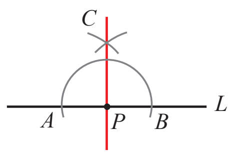
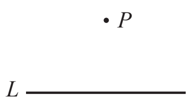
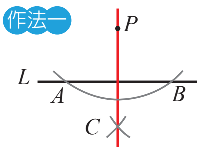
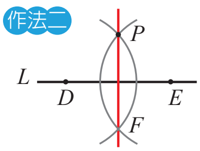
$\therefore \overline{BD}$ 平分$\angle ABC$，故$\angle 2=\angle ABD=180^\circ-90^\circ-65^\circ=25^\circ$。

◎尺規作圖（2 下 3-2）

▽❶尺規作圖：

尺規作圖是指用直尺和圓規畫圖，而且直尺只用於畫直線或線段，不利用上面的刻度。

▽❷基本作圖：

作圖名稱		已知	作圖
等線段作圖			
中垂線作圖			
等角作圖			
角平分線作圖			
垂線作圖	過線上一點		
	過線外一點		作法一  作法二 

◎三角形（1 上 第 4 章，2 上 2-3，2 下 3-3，3 上 1-4）

▽❶正三角形的高與面積：

若正三角形的邊長為 a，則高為 $\frac{\sqrt{3}}{2}a$，面積為 $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$。

例 已知正三角形的邊長為 6，則

(1) 高為 $\frac{\sqrt{3}}{2}\times 6=3\sqrt{3}$，(2) 面積為 $\frac{\sqrt{3}}{4}\times 6^2=9\sqrt{3}$。

▽❷等腰三角形的性質：

(1) 底角相等。(2) 對稱軸是底邊的中垂線。(3) 底邊的中垂線通過三角形的頂點。

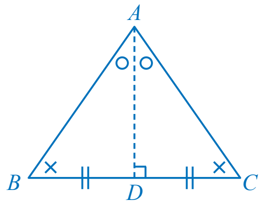
例 如圖，等腰三角形 ABC 中，

$\overline{AD}$ 為 $\overline{BC}$ 上一點的對稱軸，所以

(1) $\angle B=\angle C$。

(2) $\overline{AD}$ 是 $\overline{BC}$ 的中垂線。

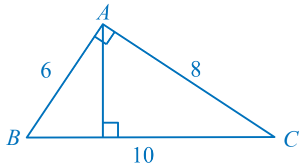
(3) $\overline{BC}$ 的中垂線 $\overline{AD}$ 會通過 A 點。



▽❸直角三角形斜邊上的高：

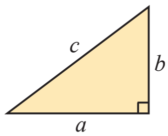
直角三角形斜邊上的高＝$\frac{兩股乘積}{斜邊}$。

例 如圖，直角三角形 ABC 的三邊長分別為 6、8、10，則斜邊上的高為 $\frac{6\times 8}{10}=\frac{24}{5}$。



▽❹畢氏定理：

任意一個直角三角形，其兩股長的平方和等於斜邊長的平方，即 $a^2+b^2=c^2$。



例 有一個直角三角形的兩股長為 6、8，則斜邊長為 $\sqrt{6^2+8^2}=10$。

▽❺特殊直角三角形的邊長比：

(1) 內角為 30°、60°、90° 的直角三角形，三邊長的比由小到大為 $1:\sqrt{3}:2$。

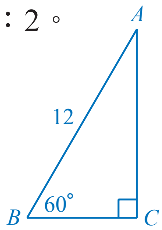
例 如圖，$\triangle ABC$ 中，$\angle B=60°$，$\angle C=90°$，$\overline{AB}=12$，

則 $\angle A=180°-60°-90°=30°$，

$\therefore\ \overline{BC}:\overline{AC}:\overline{AB}=1:\sqrt{3}:2$

$\overline{BC}:\overline{AC}:12=1:\sqrt{3}:2$

$\overline{BC}=6$，$\overline{AC}=6\sqrt{3}$。



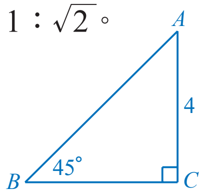
(2) 內角為 45°、45°、90° 的直角三角形，三邊長的比由小到大為 $1:1:\sqrt{2}$。

例 如圖，$\triangle ABC$ 中，$\angle B=45°$，$\angle C=90°$，若 $\overline{AC}=4$，

則 $\angle A=180°-45°-90°=45°$，

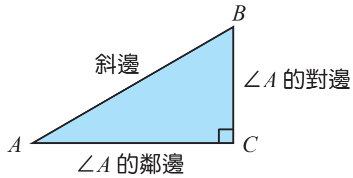
$\therefore 4:\overline{BC}:\overline{AB}=1:1:\sqrt{2}$

$\overline{BC}=4$，$\overline{AB}=4\sqrt{2}$。



▽❻**直角三角形的三角比：**

如圖，在直角三角形 ABC中，若$\angle C=90^\circ$，



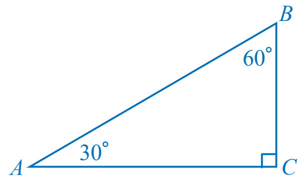
(1) $\dfrac{\angle A\text{ 對邊長}}{\text{斜邊長}}$ 簡記作 $\sin A$（讀作 sine A），即 $\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=\sin A$。

(2) $\dfrac{\angle A\text{ 鄰邊長}}{\text{斜邊長}}$ 簡記作 $\cos A$（讀作 cosine A），即 $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}}=\cos A$。

(3) $\dfrac{\angle A\text{ 對邊長}}{\text{鄰邊長}}$ 簡記作 $\tan A$（讀作 tangent A），即 $\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AC}}=\tan A$。

例 如圖，$\triangle ABC$ 為直角三角形，$\angle A=30^\circ$，$\angle B=60^\circ$，$\angle C=90^\circ$，

$\therefore\ \overline{BC}:\overline{AC}:\overline{AB}=1:\sqrt{3}:2$，可得：



$$\frac{\angle A\text{ 對邊長}}{\text{斜邊長}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=\frac{1}{2}=\sin 30^\circ$$

$$\frac{\angle A\text{ 鄰邊長}}{\text{斜邊長}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}=\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos 30^\circ$$

$$\frac{\angle A\text{ 對邊長}}{\angle A\text{ 鄰邊長}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}=\tan 30^\circ$$

◎三角形的基本概念（2 下 3-1、3-4）

▽❶**三角形的內角和與外角和：**

(1)三角形的內角和為 180°。

例 $\triangle ABC$ 中，$\angle A=70^\circ$，$\angle C=50^\circ$，則$\angle B=180^\circ-70^\circ-50^\circ=60^\circ$。

(2)三角形的一組外角和為 360°。

例 $\triangle ABC$ 中，$\angle A=60^\circ$，$\angle B$ 的外角為 110°，求$\angle C$ 的外角度數。

$\angle A$ 的外角為 $180^\circ-60^\circ=120^\circ$，

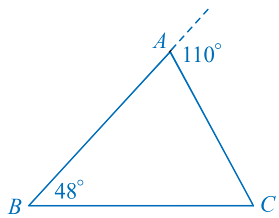
故$\angle C$ 的外角為 $360^\circ-120^\circ-110^\circ=130^\circ$。

▽❷**三角形的內角與外角度數：**

任意三角形的每一個內角都與它的一個外角互補。

▽❸**三角形的外角定理：**

三角形的任一外角等於兩個內對角的和。



例 $\triangle ABC$ 中，$\angle A$ 的外角為 110°，$\angle B=48^\circ$，

則$\angle C=110^\circ-48^\circ=62^\circ$。

▽❹**三角形的三邊長關係：**

兩邊長的差＜第三邊的長＜兩邊長的和。

例 已知一個三角形的三邊長為 8、10、x，求 x 的範圍。

$10-8<x<10+8$，$2<x<18$。

▽❺**三角形的邊角關係（大邊對大角，大角對大邊）：**

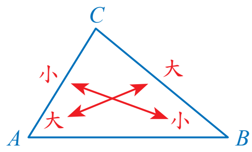
(1)在一個三角形中，若有兩個邊不等長，則較長的邊所對的角比較大。

(2)在一個三角形中，若有兩個角不相等，則較大的角所對的邊比較長。

例 如圖，$\triangle ABC$ 中，

(1)若 $\overline{BC}>\overline{AC}$，則 $\angle A>\angle B$。

(2)若 $\angle A>\angle B$，則 $\overline{BC}>\overline{AC}$。



例 $\triangle ABC$ 中，$\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{AC}$ 的長度分別為 8、11、15，

$\because \overline{AC}>\overline{BC}>\overline{AB}$，$\therefore \angle B>\angle A>\angle C$。← 大邊對大角

例 $\triangle ABC$ 中，$\angle A=60^\circ$，$\angle B=40^\circ$，

$\therefore \angle C=180^\circ-60^\circ-40^\circ=80^\circ$，

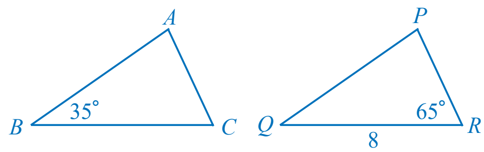
$\because \angle C>\angle A>\angle B$，$\therefore \overline{AB}>\overline{BC}>\overline{AC}$。← 大角對大邊

◎全等三角形（2 下 3-2）

▽❶**全等三角形：**

兩個全等三角形的對應邊相等，對應角也相等。

例 如圖，$\triangle ABC\cong\triangle PQR$，$A$、$B$、$C$ 的對應頂點分別為 P、Q、R，若 $\angle B=35^\circ$，$\angle R=65^\circ$，$\overline{QR}=8$，求 $\angle A$ 與 $\overline{BC}$。

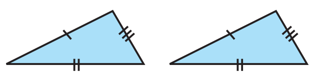
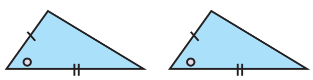
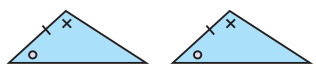


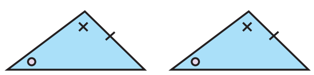
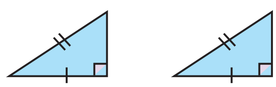
$\because \triangle ABC\cong\triangle PQR$，

$\therefore \angle A=\angle P=180^\circ-\angle B-\angle R=180^\circ-35^\circ-65^\circ=80^\circ$，

$\overline{BC}=\overline{QR}=8$。

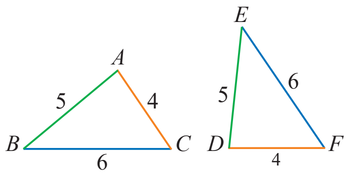
▽❷**三角形全等的判別方法：**

SSS 全等性質	*SAS* 全等性質	*ASA* 全等性質
		

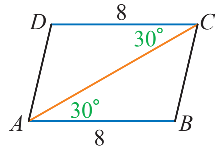
AAS 全等性質	*RHS* 全等性質
	

註 *SSA* 和 *AAA* 不能作為全等性質。

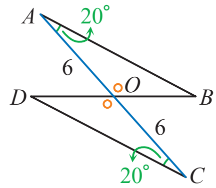
例 在$\triangle ABC$與$\triangle DEF$中，
$\because \overline{AB}=\overline{DE}=5$，$\overline{BC}=\overline{EF}=6$，
$\overline{AC}=\overline{DF}=4$，
$\therefore \triangle ABC \cong \triangle DEF$（$SSS$ 全等性質）。



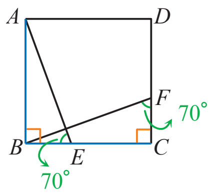
例 在$\triangle ABC$與$\triangle CDA$中，
$\because \overline{AB}=\overline{CD}=8$，$\angle CAB=\angle DCA=30^\circ$，
$\overline{AC}=\overline{AC}$，
$\therefore \triangle ABC \cong \triangle CDA$（$SAS$ 全等性質）。



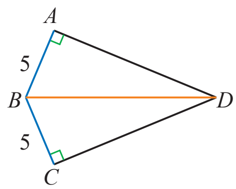
例 在$\triangle ABO$與$\triangle CDO$中，
$\because \angle A=\angle C=20^\circ$，$\overline{AO}=\overline{CO}=6$，$\angle AOB=\angle COD$，
$\therefore \triangle ABO \cong \triangle CDO$（$ASA$ 全等性質）。



例 如圖，四邊形$ABCD$為正方形，
在$\triangle ABE$與$\triangle BCF$中，
$\because \angle AEB=\angle BFC=70^\circ$，$\angle ABE=\angle BCF=90^\circ$，
$\overline{AB}=\overline{BC}$，
$\therefore \triangle ABE \cong \triangle BCF$（$AAS$ 全等性質）。



例 $\because \angle A=\angle C=90^\circ$，$\overline{AB}=\overline{BC}=5$，$\overline{BD}=\overline{BD}$，
$\therefore \triangle ABD \cong \triangle CBD$（$RHS$ 全等性質）。

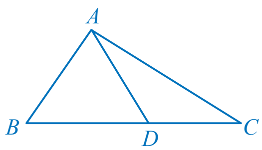


◎三角形相關的各種性質（3 上 1-2）

▽❶等高或同高三角形的面積比：

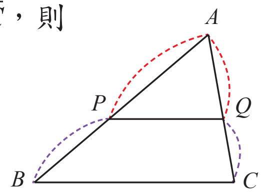
等（同）高三角形的面積比等於其對應底邊長的比。

例 如圖，$\triangle ABC$中，$\overline{BD}:\overline{CD}=4:3$，
則$\triangle ABC$的面積：$\triangle ACD$的面積$=\overline{BC}:\overline{CD}$
$=(4+3):3$
$=7:3$。



▽❷平行線截比例線段性質與應用：

如圖，$\triangle ABC$ 中，P、Q 分別為 $\overline{AB}$、$\overline{AC}$ 上的一點，若 $\overline{PQ} /\!/ \overline{BC}$，則



(1) $\overline{AP}:\overline{PB}=\overline{AQ}:\overline{QC}$。

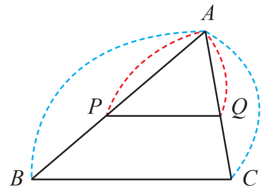
例 $\triangle ABC$ 中，P、Q 兩點分別在 $\overline{AB}$、$\overline{AC}$ 上，$\overline{PQ} /\!/ \overline{BC}$，若 $\overline{AP}=6$，$\overline{PB}=4$，$\overline{AQ}=9$，求 $\overline{QC}$。

在$\triangle ABC$ 中，$\because \overline{PQ} /\!/ \overline{BC}$，

$\therefore \overline{AP}:\overline{PB}=\overline{AQ}:\overline{QC}$

$6:4=9:\overline{QC}$

$\overline{QC}=6$



(2) $\overline{AP}:\overline{AB}=\overline{AQ}:\overline{AC}$。

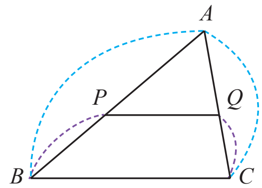
例 $\triangle ABC$ 中，P、Q 兩點分別在 $\overline{AB}$、$\overline{AC}$ 上，$\overline{PQ} /\!/ \overline{BC}$，若 $\overline{AP}=8$，$\overline{AB}=20$，$\overline{AQ}=6$，求 $\overline{AC}$。

在$\triangle ABC$ 中，$\because \overline{PQ} /\!/ \overline{BC}$，

$\therefore \overline{AP}:\overline{AB}=\overline{AQ}:\overline{AC}$

$8:20=6:\overline{AC}$

$\overline{AC}=15$



(3) $\overline{PB}:\overline{AB}=\overline{QC}:\overline{AC}$。

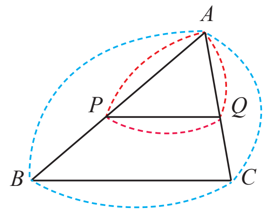
例 $\triangle ABC$ 中，P、Q兩點分別在 $\overline{AB}$、$\overline{AC}$ 上，$\overline{PQ} /\!/ \overline{BC}$，若 $\overline{PB}:\overline{AB}=2:5$，$\overline{AC}=30$，求 $\overline{QC}$。

在$\triangle ABC$ 中，$\because \overline{PQ} /\!/ \overline{BC}$，

$\therefore \overline{PB}:\overline{AB}=\overline{QC}:\overline{AC}$

$2:5=\overline{QC}:30$

$\overline{QC}=12$



(4) $\overline{PQ}:\overline{BC}=\overline{AP}:\overline{AB}=\overline{AQ}:\overline{AC}$。

例 $\triangle ABC$ 中，P、Q 兩點分別在 $\overline{AB}$、$\overline{AC}$ 上，$\overline{PQ} /\!/ \overline{BC}$，若 $\overline{AP}=15$，$\overline{PB}=9$，$\overline{BC}=16$，求 $\overline{PQ}$。

在$\triangle ABC$中，$\because \overline{PQ} /\!/ \overline{BC}$，

$\therefore \overline{PQ}:\overline{BC}=\overline{AP}:\overline{AB}$

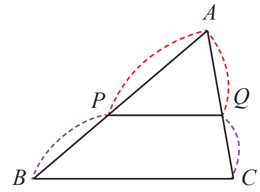
$\overline{PQ}:16=15:(15+9)$

$\overline{PQ}=10$

▽❸ 截線段與平行的判別：

$\triangle ABC$ 中，P、Q 兩點分別在 $\overline{AB}$、$\overline{AC}$ 上，

(1) 若 $\overline{AP}:\overline{PB}=\overline{AQ}:\overline{QC}$，則 $\overline{PQ}\,/\!/\,\overline{BC}$。



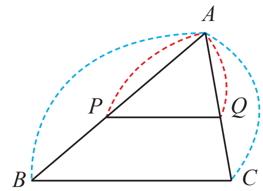
例 $\triangle ABC$ 中，P、Q 兩點分別在 $\overline{AB}$、$\overline{AC}$ 上，
若 $\overline{AP}=4$，$\overline{PB}=6$，$\overline{AQ}=8$，$\overline{QC}=12$，
則 $\overline{PQ}$ 與 $\overline{BC}$ 是否平行？

在$\triangle ABC$ 中，

$\because$ $\overline{AP}:\overline{PB}=4:6=2:3$，
$\overline{AQ}:\overline{QC}=8:12=2:3$，
$\Rightarrow$ $\overline{AP}:\overline{PB}=\overline{AQ}:\overline{QC}$

$\therefore$ $\overline{PQ}\,/\!/\,\overline{BC}$。

(2) 若 $\overline{AP}:\overline{AB}=\overline{AQ}:\overline{AC}$，則 $\overline{PQ}\,/\!/\,\overline{BC}$。



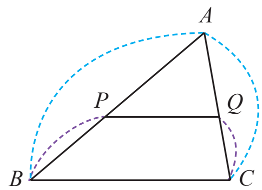
例 $\triangle ABC$ 中，P、Q 兩點分別在 $\overline{AB}$、$\overline{AC}$ 上，
若 $\overline{AP}=12$，$\overline{AB}=27$，$\overline{AQ}=8$，$\overline{QC}=10$，
則 $\overline{PQ}$ 與 $\overline{BC}$ 是否平行？

在$\triangle ABC$ 中，

$\because$ $\overline{AP}:\overline{AB}=12:27=4:9$，
$\overline{AQ}:\overline{AC}=8:(8+10)=4:9$，
$\Rightarrow$ $\overline{AP}:\overline{AB}=\overline{AQ}:\overline{AC}$

$\therefore$ $\overline{PQ}\,/\!/\,\overline{BC}$。

(3) 若 $\overline{PB}:\overline{AB}=\overline{QC}:\overline{AC}$，則 $\overline{PQ}\,/\!/\,\overline{BC}$。



例 $\triangle ABC$ 中，P、Q 兩點分別在 $\overline{AB}$、$\overline{AC}$ 上，
若 $\overline{PB}:\overline{AB}=3:5$，$\overline{QC}=9$，$\overline{AC}=15$，
則 $\overline{PQ}$ 與 $\overline{BC}$ 是否平行？

在$\triangle ABC$ 中，

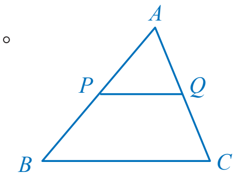
$\because$ $\overline{PB}:\overline{AB}=3:5$，
$\overline{QC}:\overline{AC}=9:15=3:5$，
$\Rightarrow$ $\overline{PB}:\overline{AB}=\overline{QC}:\overline{AC}$

$\therefore$ $\overline{PQ}\,/\!/\,\overline{BC}$。

註 $\triangle ABC$ 中，P、Q 兩點分別在 $\overline{AB}$、$\overline{AC}$ 上，若 $\overline{AP}:\overline{AB}=\overline{PQ}:\overline{BC}$，則 $\overline{PQ}$ 不一定與 $\overline{BC}$ 平行。

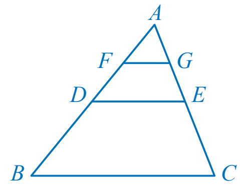
▽❹**三角形兩邊中點連線性質：**

三角形的兩邊中點連線必平行於第三邊，且長度為第三邊長的一半。



例 如圖，$\triangle ABC$ 中，P、Q 分別為 $\overline{AB}$、$\overline{AC}$ 的中點，

則 $\overline{PQ} /\!/ \overline{BC}$，且 $\overline{PQ}=\dfrac{1}{2}\overline{BC}$。



例 如圖，$\triangle ABC$ 中，D、E 分別為 $\overline{AB}$、$\overline{AC}$ 的中點，

F、G 分別為 $\overline{AD}$、$\overline{AE}$ 的中點，若 $\overline{DE}=6$，則

(1) $\overline{FG}=\dfrac{1}{2}\overline{DE}=\dfrac{1}{2}\times 6=3$。

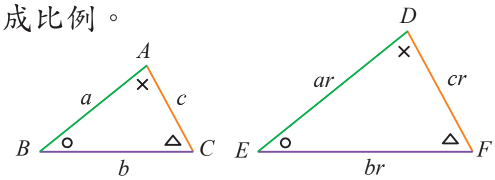
(2) $\overline{BC}=2\overline{DE}=2\times 6=12$。

◎相似三角形（3 上 1-3、1-4）

▽❶**相似三角形：**

(1) 若一個三角形經過縮放後，與另一個三角形全等，則稱這兩個三角形相似。

(2) 若兩個三角形相似，則其對應角相等，對應邊成比例。



例 如圖，$\triangle ABC \sim \triangle DEF$，$A$、$B$、$C$

的對應頂點分別為 D、E、F，則

(1) $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{DE}}=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{EF}}=\dfrac{\overline{CA}}{\overline{FD}}=r$。

(2) $\angle A=\angle D$，$\angle B=\angle E$，$\angle C=\angle F$。

例 已知 $\triangle ABC \sim \triangle PQR$，$A$、$B$、$C$ 的對應頂點分別為 P、Q、R，

若 $\overline{PQ}=9$，$\overline{PR}=12$，$\overline{AB}=6$，$\angle A+\angle B=125^\circ$，求 $\overline{AC}$ 與 $\angle R$。

(1) $\because$ 相似形的對應邊成比例，

$$\therefore \frac{\overline{AB}}{\overline{PQ}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{PR}}$$

$$\frac{6}{9}=\frac{\overline{AC}}{12}$$

$\overline{AC}=8$。

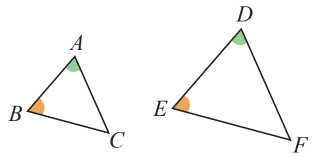
(2) $\because$ 相似形的對應角相等，

$\therefore \angle R=\angle C=180^\circ-(\angle A+\angle B)=180^\circ-125^\circ=55^\circ$。

▽❷三角形的相似性質：

(1) AA（AAA）相似性質：

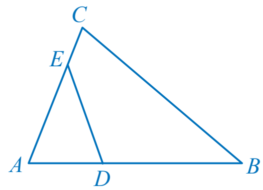
若兩個三角形的兩組（三組）對應角相等，則這兩個三角形相似。



例 如圖，在$\triangle ADE$與$\triangle ACB$中，

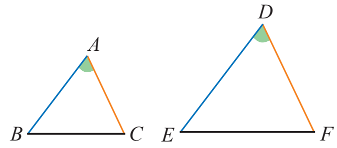
$\because \angle AED=\angle B$，$\angle A=\angle A$，

$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ACB$（$AA$ 相似性質）。



(2) SAS 相似性質：

若兩個三角形有一組對應角相等，且夾此等角的兩組對應邊成比例，則這兩個三角形相似。



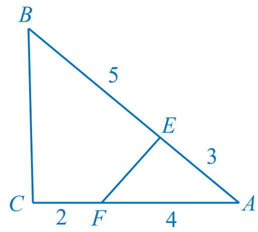
例 如圖，在$\triangle AEF$與$\triangle ACB$中，

$\because \overline{AE}:\overline{AC}=3:(4+2)=3:6=1:2$，

$\overline{AF}:\overline{AB}=4:(3+5)=4:8=1:2$，

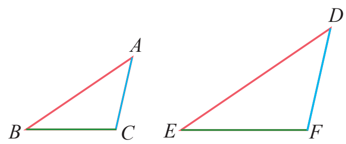
$\therefore \overline{AE}:\overline{AC}=\overline{AF}:\overline{AB}$，又$\angle A=\angle A$，

故$\triangle AEF \sim \triangle ACB$（$SAS$ 相似性質）。



(3) SSS 相似性質：

若兩個三角形的三組對應邊成比例，則這兩個三角形相似。



例 如圖，在$\triangle ABC$與$\triangle CDB$中，

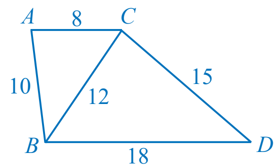
$\because \overline{AC}:\overline{BC}=8:12=2:3$，

$\overline{AB}:\overline{CD}=10:15=2:3$，

$\overline{BC}:\overline{BD}=12:18=2:3$，

$\therefore \overline{AC}:\overline{BC}=\overline{AB}:\overline{CD}=\overline{BC}:\overline{BD}$，

$\therefore \triangle ABC \sim \triangle CDB$（$SSS$ 相似性質）。



▽❸相似三角形的對應關係：

兩個相似三角形中，

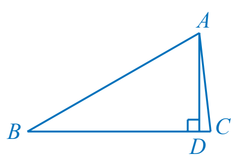
(1) 對應邊長的比＝對應高的比。

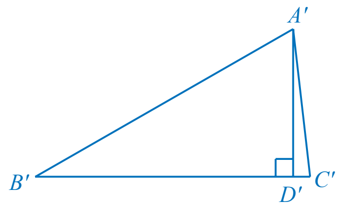
(2) 面積的比＝對應邊長的平方比。

例 如圖，$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$，$\overline{AD}$、$\overline{A'D'}$分別為$\triangle ABC$、$\triangle A'B'C'$的高，若$\overline{AB}:\overline{A'B'}=2:3$，則

(1) $\overline{AB}:\overline{A'B'}=\overline{AD}:\overline{A'D'}=2:3$。

(2) $\triangle ABC$的面積：$\triangle A'B'C'$的面積$=2^2:3^2=4:9$。





◎三角形的心（3 上 3-2）

▽❶三角形的外心：

(1)三角形三邊的中垂線交於一點，此點稱為三角形的外心，
外心到三頂點的距離相等。

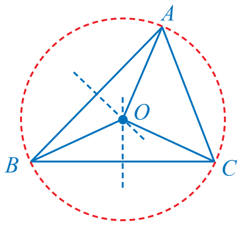
(2)若以三角形的外心為圓心，外心到三頂點的距離為半徑畫圓，
可畫出此三角形的外接圓。

例 如圖，$\triangle ABC$ 中，$\overline{AB}$、$\overline{BC}$ 兩中垂線相交於 O 點，則

(1) O 點為 $\triangle ABC$ 的外心，

(2) $\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}$。

(3)圓 O 為 $\triangle ABC$ 的外接圓。



例 $\triangle ABC$ 中，O 點為外心，若 $\overline{OA}=3x+6$，$\overline{OB}=7x-2$，求 $\overline{OC}$。

$\because O$ 點為 $\triangle ABC$ 的外心，

$\therefore \overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}$，

$3x+6=7x-2$

$x=2$，

故 $\overline{OC}=\overline{OA}=3\times2+6=12$。

▽❷三角形外心的位置：

(1)銳角三角形的外心在三角形內部。

(2)直角三角形的外心在三角形的斜邊中點。

(3)鈍角三角形的外心在三角形外部。

例 直角三角形 ABC 中，$\angle A=90^\circ$，$\overline{AB}=6$，$\overline{AC}=8$，求 $\triangle ABC$ 的外接圓半徑。

$\because \triangle ABC$ 為直角三角形，

$\therefore$ 外心在斜邊 $\overline{BC}$ 的中點，

又 $\overline{BC}=\sqrt{6^2+8^2}=10$，

故 $\triangle ABC$ 的外接圓半徑為 $10\div2=5$。

▽❸三角形的內心：

(1)三角形三內角的角平分線交於一點，此點稱為三角形的內心，內心到三邊的距離相等。

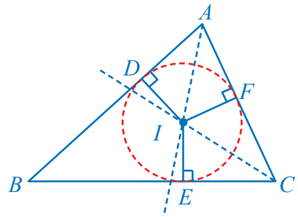
(2)若以三角形的內心為圓心，內心到三邊的距離為半徑畫圓，可畫出此三角形的內切圓。

例 如圖，$\triangle ABC$ 中，$\angle BAC$ 與 $\angle ACB$ 的角平分線相交於 I 點，則

(1) I 點為 $\triangle ABC$ 的內心。

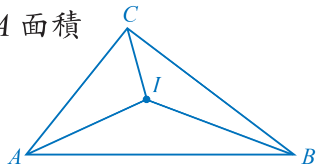
(2) $\overline{ID}=\overline{IE}=\overline{IF}$。

(3)圓 I 為 $\triangle ABC$ 的內切圓。



▽❹三角形內心與面積：

若 I 點為 $\triangle ABC$ 的內心，則 $\triangle AIB$ 面積：$\triangle BIC$ 面積：$\triangle CIA$ 面積 $=\overline{AB}:\overline{BC}:\overline{CA}$。



例 $\triangle ABC$ 中，I 點為內心，若 $\triangle AIB$ 的面積為 24，$\triangle AIC$ 的面積為 15，$\triangle BIC$ 的面積為 21，則 $\overline{AB}:\overline{BC}:\overline{CA}=\triangle AIB$ 面積：$\triangle BIC$ 面積：$\triangle AIC$ 面積 $=24:21:15=8:7:5$。

▽❺三角形的內切圓半徑：

(1)若 r 為三角形的內切圓半徑，S 為三角形的周長，則三角形的面積為 $\frac{1}{2}rS$。

例 $\triangle ABC$ 中，I 點為內心，若 $\triangle ABC$ 的面積為 84，$\overline{AC}=15$，$\overline{BC}=13$，$\overline{AB}=14$，求 $\triangle ABC$ 的內切圓半徑。

$\triangle ABC$ 的面積 $=\frac{1}{2}\times\triangle ABC$ 的內切圓半徑 $\times\triangle ABC$ 的周長

$84=\frac{1}{2}\times\triangle ABC$ 的內切圓半徑 $\times(15+13+14)$

$\triangle ABC$ 的內切圓半徑 $=4$。

(2)若 r 為直角三角形的內切圓半徑，則兩股和 $=$ 斜邊長 $+2r$，

即 $r=\dfrac{\text{兩股和}-\text{斜邊長}}{2}$。

例 直角三角形 ABC 中，$\angle B=90^\circ$，$\overline{AB}=6$，$\overline{BC}=8$，求 $\triangle ABC$ 的內切圓半徑。

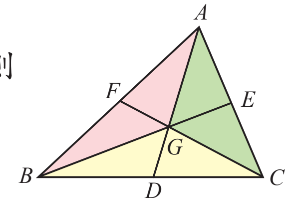
斜邊 $\overline{AC}=\sqrt{6^2+8^2}=10$，

故 $\triangle ABC$ 的內切圓半徑為 $\dfrac{6+8-10}{2}=2$。

▽ ⑥ **三角形的重心：**

(1) 三角形的三條中線交於一點，此點為三角形的重心。

(2) 如圖，$\triangle ABC$ 中，$\overline{AD}$、$\overline{BE}$、$\overline{CF}$ 為三條中線，G 點為重心，則



① $\overline{AG}:\overline{GD}=2:1$，$\overline{BG}:\overline{GE}=2:1$，$\overline{CG}:\overline{GF}=2:1$。

例 若三角形的三中線長分別為 6、7、8，求其重心到三頂點的距離和。

$\because$ 重心到頂點的距離 $=\dfrac{2}{3}\times$ 中線長

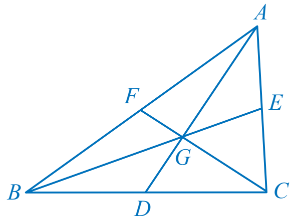
$\therefore$ 重心到三頂點的距離和 $=\dfrac{2}{3}\times$ 三中線長的和

$=\dfrac{2}{3}\times(6+7+8)=14$。

② $\triangle AGB$ 面積 $=\triangle BGC$ 面積 $=\triangle CGA$ 面積 $=\dfrac{1}{3}\triangle ABC$ 面積。

③ $\triangle AGF$ 面積 $=\triangle BGF$ 面積 $=\triangle BGD$ 面積 $=\triangle CGD$ 面積 $=\triangle CGE$ 面積 $=\triangle AGE$ 面積 $=\dfrac{1}{6}\triangle ABC$ 面積。

例 如圖，三條中線 $\overline{AD}$、$\overline{BE}$、$\overline{CF}$ 交於 G 點，若 $\triangle BGD$ 的面積為 8，則



(1) $\triangle AGB$ 面積 $=\triangle BGC$ 面積 $=\triangle CGA$ 面積 $=2\triangle BGD$ 面積 $=2\times8=16$。

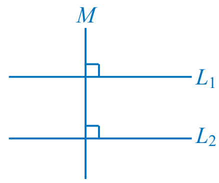
(2) $\triangle ABC$ 面積 $=6\triangle BGD$ 面積 $=6\times8=48$。

◎平行與截角（2 下 4-1）

▽ ① **平行線：**

若平面上的兩條直線同時與另一條直線垂直，則這兩條直線互相平行，稱這兩條直線是平行線。

例 如圖，若直線 M 同時垂直 L_1 和 L_2，則 $L_1 /\!/ L_2$。



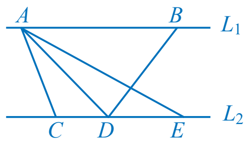
▽ ② **平行線的特性：**

(1) 在平面上的兩條平行線會同時與另一條直線垂直。

(2) 兩條平行線間的距離處處相等，且永不相交。

(3) 在平面上，若有兩條直線同時與一直線平行，則這兩條直線互相平行。

例 如圖，A、B 兩點在 L_1 上，C、D、E 三點在 L_2 上，若 $\overline{AB}=10$，$\overline{CE}=8$，$\triangle ACE$ 的面積為 24，求 $\triangle ABD$ 的面積。



$\because L_1 /\!/ L_2$，$\therefore$ 兩條平行線之間的距離相等，

即 $\triangle ACE$ 與 $\triangle ABD$ 有相同的高，

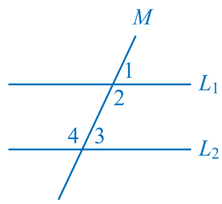
$\triangle ACE$ 的高為 $24\times2\div8=6$，

$\triangle ABD$ 的面積為 $10\times6\div2=30$。

▽❸平行線的截角性質：

兩條平行線被一條直線所截時，則

(1)同位角相等。(2)內錯角相等。(3)同側內角互補。



例 如圖，$L_1 // L_2$，M 為截線，若 $\angle 1 = 65^\circ$，則

(1) $\angle 1 = \angle 3 = 65^\circ$（同位角相等）。

(2) $\angle 2 = \angle 4 = 180^\circ - 65^\circ = 115^\circ$（內錯角相等）。

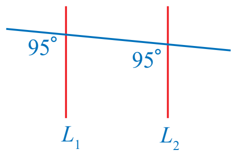
(3) $\angle 2 + \angle 3 = 115^\circ + 65^\circ = 180^\circ$（同側內角互補）。

▽❹平行線的判別：

兩條直線被一條直線所截，如果符合下列任一條件，則這兩條直線平行。

(1)同位角相等。(2)內錯角相等。(3)同側內角互補。

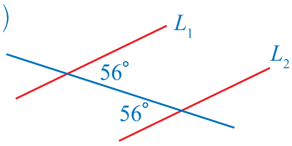
例 (1)



$\because$ 同位角相等，

$\therefore L_1 // L_2$。

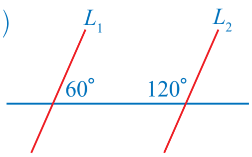
(2)



$\because$ 內錯角相等，

$\therefore L_1 // L_2$。

(3)

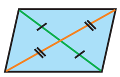
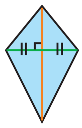
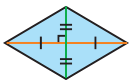
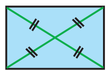
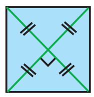
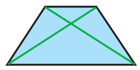


$\because$ 同側內角互補，

$\therefore L_1 // L_2$。

◎四邊形（2 下 4-2、4-3）

▽❶特殊四邊形的性質：

		平行四邊形	箏形（鳶形）	菱形	長方形（矩形）	正方形	等腰梯形
圖形							
邊	對邊平行	✓		✓	✓	✓	
	對邊等長	✓		✓	✓	✓	
	四邊等長			✓		✓	
角	對角相等	✓		✓	✓	✓	
	四角相等				✓	✓	
對角線	互相平分	✓		✓	✓	✓	
	互相垂直		✓	✓		✓	
	等長				✓	✓	✓

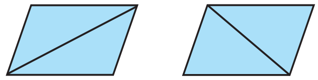
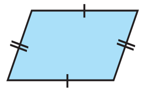
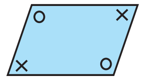
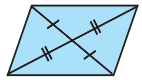
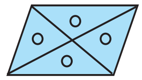
▽❷特殊四邊形的面積：

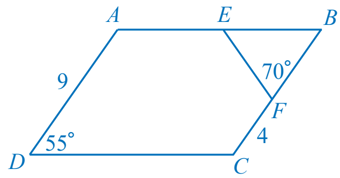
箏形、菱形與正方形的面積皆等於兩條對角線長乘積的二分之一。

例 箏形 $ABCD$ 中，若對角線 $\overline{AC} = 12$，$\overline{BD} = 18$，

則箏形 $ABCD$ 的面積為 $\frac{1}{2} \times 12 \times 18 = 108$。

▽ ❸ 平行四邊形的性質：

	性質	圖示
(1)	任一條對角線均可將它分成兩個全等的三角形。	
(2)	兩組對邊分別等長。	
(3)	兩組對角分別相等。	
(4)	兩條對角線互相平分。	
(5)	平行四邊形的兩條對角線將其面積四等分。	



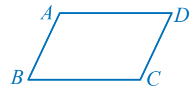
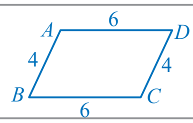
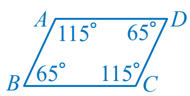
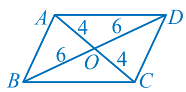
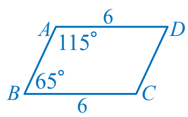
例 如圖，平行四邊形 $ABCD$ 中，E、F 兩點分別在 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$ 上，若 $\angle D=55^\circ$，$\angle EFB=70^\circ$，$\overline{AD}=9$，$\overline{CF}=4$，求 $\angle BEF$ 與 $\overline{EF}$。

(1) $\angle B=\angle D=55^\circ$（對角相等），
$\angle BEF=180^\circ-\angle B-\angle BFE=180^\circ-55^\circ-70^\circ=55^\circ$。

(2) $\because \angle BEF=\angle B=55^\circ$，$\therefore \triangle BEF$ 為等腰三角形，
則 $\overline{EF}=\overline{BF}$，又 $\overline{AD}=\overline{BC}=9$（對邊等長），故 $\overline{EF}=\overline{BF}=\overline{BC}-\overline{CF}=9-4=5$。

▽ ❹ 平行四邊形的判別：

符合下列性質之一的四邊形為平行四邊形：

	性質	例	
(1)	兩組對邊分別平行。	$\because \overline{AB}\,/\!/\,\overline{CD}$，$\overline{AD}\,/\!/\,\overline{BC}$， $\therefore$ 四邊形 $ABCD$ 為平行四邊形。	
(2)	兩組對邊分別等長。	$\because \overline{AB}=\overline{CD}$，$\overline{AD}=\overline{BC}$， $\therefore$ 四邊形 $ABCD$ 為平行四邊形。	
(3)	兩組對角分別相等。	$\because \angle A=\angle C$，$\angle B=\angle D$， $\therefore$ 四邊形 $ABCD$ 為平行四邊形。	
(4)	兩條對角線互相平分。	$\because \overline{OA}=\overline{OC}$，$\overline{OB}=\overline{OD}$， $\therefore$ 四邊形 $ABCD$ 為平行四邊形。	
(5)	一組對邊平行且等長。	$\because \overline{AD}\,/\!/\,\overline{BC}$（同側內角互補）， 且 $\overline{AD}=\overline{BC}$， $\therefore$ 四邊形 $ABCD$ 為平行四邊形。	

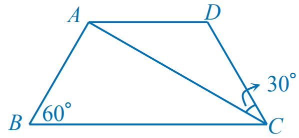
▽ **❺ 等腰梯形的性質：**

(1)若梯形的兩腰等長，稱此梯形為等腰梯形。

(2)兩組底角分別相等。

(3)兩條對角線等長。

例 如圖，等腰梯形 $ABCD$ 中，$\overline{AD}//\overline{BC}$，若$\angle B=60^\circ$，$\angle ACD=30^\circ$，求$\angle ACB$與$\angle D$。



(1) $\because$ 四邊形 $ABCD$ 為等腰梯形，

$\therefore \angle DCB=\angle B=60^\circ$，

故$\angle ACB=\angle DCB-\angle ACD=60^\circ-30^\circ=30^\circ$。

(2) $\because$ $\overline{AD}//\overline{BC}$，

$\therefore \angle D+\angle DCB=180^\circ$（同側內角互補），

故 $\angle D=180^\circ-\angle DCB=180^\circ-60^\circ=120^\circ$。

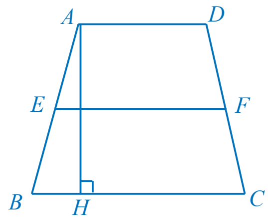
▽ **❻ 梯形的性質：**

(1)梯形兩腰中點的連線段會與上、下底平行。

(2)梯形兩腰中點連線段的長$=\dfrac{(\text{上底}+\text{下底})}{2}$。

(3)梯形面積$=\dfrac{(\text{上底}+\text{下底})\times\text{高}}{2}=$梯形兩腰中點連線段的長×高。

例 如圖，梯形 $ABCD$ 中，$\overline{AD}//\overline{BC}$，$\overline{EF}$ 為梯形兩腰中點的連線段，若$\overline{AD}=6$，$\overline{BC}=10$，$\overline{AH}=8$，則



(1) $\overline{AD}//\overline{EF}//\overline{BC}$。

(2) $\overline{EF}=\dfrac{(6+10)}{2}=8$。

(3)梯形面積為$\dfrac{(6+10)\times 8}{2}=64$。

◎多邊形（2 下 3-1、3 上 1-3）

▽❶ n 邊形的內角和：

n 邊形的內角和為 $(n-2)\times180^\circ$。

例 五邊形的內角和為 $(5-2)\times180^\circ=540^\circ$。

▽❷ 正 n 邊形：

每一個內角都相等，且每一個邊長也都相等，就稱它為正 n 邊形。

▽❸ 正 n 邊形的內角度數：

正 n 邊形的每一個內角皆為 $\dfrac{(n-2)\times180^\circ}{n}$。

例 正六邊形的每一個內角皆為 $\dfrac{(n-2)\times180^\circ}{6}=120^\circ$。

▽❹ 相似多邊形：

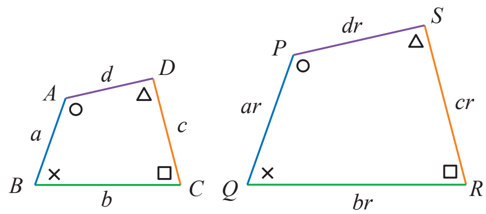
(1)若兩個多邊形的形狀一樣，其中一個多邊形是另一個多邊形經由縮放而得，則稱這兩個多邊形相似。

(2)若兩個多邊形相似，則其對應角相等，對應邊成比例。

例 如圖，四邊形 $ABCD$～四邊形 $PQRS$，A、B、C、D 的對應頂點分別為 P、Q、R、S，則

(1) $\dfrac{\overline{PQ}}{\overline{AB}}=\dfrac{\overline{QR}}{\overline{BC}}=\dfrac{\overline{RS}}{\overline{CD}}=\dfrac{\overline{SP}}{\overline{DA}}=r$。

(2) $\angle A=\angle P$，$\angle B=\angle Q$，$\angle C=\angle R$，$\angle D=\angle S$。



例 已知四邊形 $ABCD$～四邊形 $PQRS$，A、B、C、D 的對應頂點分別為 P、Q、R、S，若 $\overline{AB}=12$，$\overline{BC}=15$，$\overline{PQ}=8$，$\angle Q=76^\circ$，$\angle R=64^\circ$，$\angle S=100^\circ$，求 $\overline{QR}$ 與 $\angle A$。

(1) $\because$ 相似形的對應邊成比例，

$\therefore \dfrac{\overline{AB}}{\overline{PQ}}=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{QR}} \Rightarrow \dfrac{12}{8}=\dfrac{15}{\overline{QR}} \Rightarrow \overline{QR}=10$

(2) $\because$ 相似形的對應角相等，

$\therefore \angle A=\angle P=360^\circ-(\angle Q+\angle R+\angle S)=360^\circ-(76^\circ+64^\circ+100^\circ)=120^\circ$

(3)若兩個邊數相同的多邊形對應角相等且對應邊成比例，則此兩個多邊形相似。

例 (1) $\because$ 兩個正方形的對應角相等（皆為 90°），且它們的對應邊成比例，

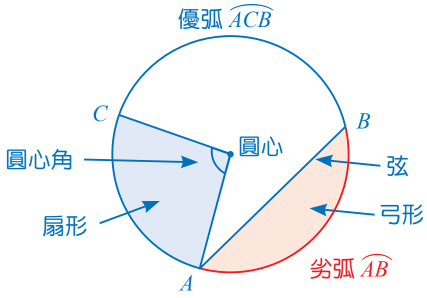
$\therefore$ 兩個正方形一定相似。

(2) $\because$ 兩個長方形的對應角相等（皆為 90°），但它們的對應邊不一定成比例，

$\therefore$ 兩個長方形不一定相似。

◎圓形(3 上 2-1、2-2)

▽❶與圓相關的名詞：



(1)圓：在平面上和一個定點等距離的所有點所形成的圖形稱為圓，此定點稱為圓心，圓心到圓上任一點的距離稱為半徑。

(2)弦：連接圓上任意兩點所成的線段稱為弦，如果一弦通過圓心，此弦就是直徑，而直徑是最長的弦。

(3)弧：一弦將圓周分成兩部分，兩部分都稱為弧。若此弦恰為直徑，則可將圓分成相等的兩部分，稱為半圓。弧若小於半圓稱為劣弧；弧若大於半圓稱為優弧。

(4)弓形：圓上一弦與其所對的弧所圍成的圖形稱為弓形。

(5)圓心角：以圓心為頂點，兩條半徑為邊，組成的角稱為圓心角。

(6)扇形：圓的兩條半徑及所夾之弧所圍成的圖形稱為扇形。

▽❷扇形的面積與弧長：

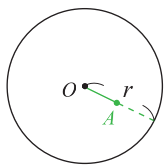
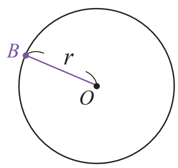
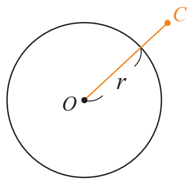
半徑為 r，圓心角為 x 度的扇形，則：

(1)面積為 $\pi r^2 \times \dfrac{x}{360}$。(2)弧長為 $2\pi r \times \dfrac{x}{360}$。

例 有一個扇形半徑為 12 公分，圓心角為 120°，則

(1)扇形的面積為 $\pi \times 12^2 \times \dfrac{120}{360} = 48\pi$。(2)扇形的弧長為 $2 \times \pi \times 12 \times \dfrac{120}{360} = 8\pi$。

▽❸點與圓的位置關係：

點與圓的位置關係	在圓內	在圓上	在圓外
圖示			
點到圓心的距離	小於半徑($\overline{OA} < r$)	等於半徑($\overline{OB} = r$)	大於半徑($\overline{OC} > r$)

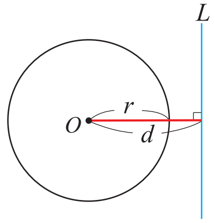
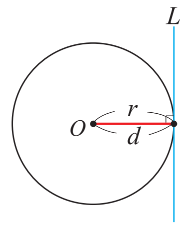
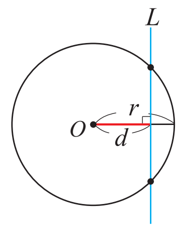
例 已知圓 O 的半徑為 6，D、E、F 三點與此圓心 O 的距離分別為 4、6、10，判別 D、E、F 三點與圓 O 的位置關係。

(1) $\because D$ 點到圓心的距離為 $4 <$ 圓 O 的半徑 6，$\therefore D$ 點在圓內。

(2) $\because E$ 點到圓心的距離為 $6 =$ 圓 O 的半徑 6，$\therefore E$ 點在圓上。

(3) $\because F$ 點到圓心的距離為 $10 >$ 圓 O 的半徑 6，$\therefore F$ 點在圓外。

▽④直線與圓的位置關係：

直線與圓的位置關係	直線 L 與圓不相交	直線 L 是圓的切線（交於一點）	直線 L 是圓的割線（交於兩點）
圖示			
圓心到直線的距離	大於半徑（$d>r$）	等於半徑（$d=r$）	小於半徑（$d<r$）

例 已知圓 O 的半徑為 8，若圓心到三條直線 D、E、F 的距離分別為 12、8、5，判別直線 D、E、F 與圓 O 分別有幾個交點？

(1) $\because$ 圓心到直線 D 的距離為 $12>$ 圓 O 的半徑 8，$\therefore$ 直線 D 與圓 O 沒有交點。

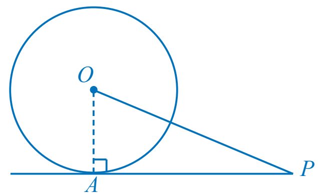
(2) $\because$ 圓心到直線 E 的距離為 $8=$ 圓 O 的半徑 8，$\therefore$ 直線 E 與圓 O 有一個交點。

(3) $\because$ 圓心到直線 F 的距離為 $5<$ 圓 O 的半徑 8，$\therefore$ 直線 F 與圓 O 有兩個交點。

▽⑤圓與切線的關係：

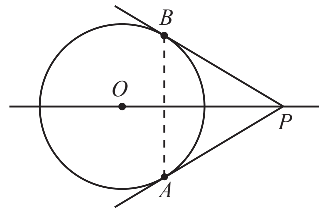
(1) 一個圓的切線必垂直於圓心與切點的連線。

(2) 圓心到切線的距離等於圓的半徑。



例 如圖，$\overrightarrow{PA}$ 與圓 O 切於 A 點，圓 O 的半徑為 5，$\overline{OP}=13$，則 $\angle OAP=90^\circ$，$\overline{AP}=\sqrt{13^2-5^2}=12$。

▽⑥過圓外一點的兩切線性質：

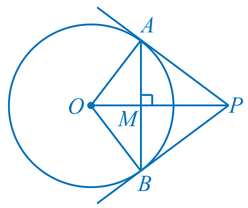


如圖，$\overleftrightarrow{PA}$、$\overleftrightarrow{PB}$ 為圓 O 的兩條切線，A、B 為切點，則：

(1) 過圓外一點 P 的兩切線段長相等，即 $\overline{PA}=\overline{PB}$。

(2) $\angle APO=\angle BPO$，即 $\overleftrightarrow{OP}$ 平分 $\angle APB$。

(3) $\overleftrightarrow{OP}$ 垂直平分 $\overline{AB}$。



例 如圖，$\overrightarrow{PA}$、$\overrightarrow{PB}$ 切圓 O 於 A、B 兩點，$\overline{OP}$ 與 $\overline{AB}$ 相交於 M 點，若 $\overline{OA}=6$，$\overline{AP}=8$，求 $\overline{AB}$。

$\because \angle OAP=90^\circ$，

$\therefore \triangle OAP$ 是直角三角形，

$\overline{OP}=\sqrt{6^2+8^2}=10$，

$\overline{AM}=\dfrac{\overline{OA}\times\overline{AP}}{\overline{OP}}=\dfrac{6\times 8}{10}=\dfrac{24}{5}$，

故 $\overline{AB}=2\,\overline{AM}=2\times\dfrac{24}{5}=\dfrac{48}{5}$。

▽❼弦的性質：

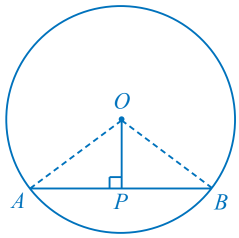
(1)弦的中垂線會通過圓心。

(2)通過圓心與弦垂直的直線會平分此弦。

例 如圖，$\overline{AB}$ 為圓 O 的一弦，若 $\overline{AB}$ 的弦心距 $\overline{OP}=6$，圓 O 的半徑為 10，則：

(1) $\overline{OP}\perp\overline{AB}$，$\overline{AP}=\overline{BP}$。

(2) $\overline{AB}=2\,\overline{AP}=2\times\sqrt{10^2-6^2}=2\times8=16$。



▽❽弦心距的性質：

(1)在同圓或等圓中，弦心距相等，則所對應的弦等長；反之，弦等長，則所對應的弦心距相等。

(2)在同圓或等圓中，弦心距愈長，則所對應的弦愈短；反之，弦愈短，則所對應的弦心距愈長。

例 已知 $\overline{AB}$、$\overline{CD}$ 分別為圓 O、圓 O' 兩等圓上的一弦，$\overline{OM}$ 為 $\overline{AB}$ 的弦心距，$\overline{O'N}$ 為 $\overline{CD}$ 的弦心距，

(1)若 $\overline{OM}=\overline{O'N}$，則 $\overline{AB}=\overline{CD}$。

(2)若 $\overline{AB}=\overline{CD}$，則 $\overline{OM}=\overline{O'N}$。

(3)若 $\overline{OM}<\overline{O'N}$，則 $\overline{AB}>\overline{CD}$。

(4)若 $\overline{AB}>\overline{CD}$，則 $\overline{OM}<\overline{O'N}$。

▽❾弧的度數與長度：

(1)在同圓或等圓中，度數相等的兩弧等長；反之，如果兩弧等長，則它們所對的圓心角相等。

(2)在同圓或等圓中，度數愈大的弧，其弧的長度愈長。

例 已知 $\overline{AB}$、$\overline{CD}$ 分別為圓 O、圓 O' 兩等圓上的一弦，

(1)若 $\overset{\frown}{AB}$ 的度數 $=\overset{\frown}{CD}$ 的度數，則 $\overline{AB}=\overline{CD}$。

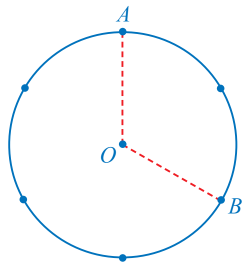
(2)若 $\overline{AB}=\overline{CD}$，則 $\angle AOB=\angle CO'D$。

(3)若 $\overset{\frown}{AB}$ 的度數 $>\overset{\frown}{CD}$ 的度數，則 $\overset{\frown}{AB}$ 的長度 $>\overset{\frown}{CD}$ 的長度。

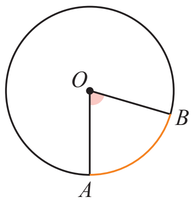
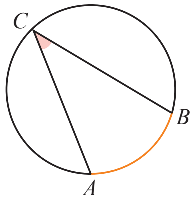
(3)弧的度數等於該弧所對圓心角的度數。

例 如圖，將圓 O 的圓周分成 6 等分，A、B 是其中二個等分點，求 $\overset{\frown}{AB}$ 的度數。

$\overset{\frown}{AB}$ 的度數 $=\angle AOB=360^\circ\times\dfrac{2}{6}=120^\circ$。



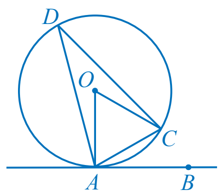
▽⑩圓心角、圓周角與弧的關係：

名稱	圓心角	圓周角
圖示		
性質	$\angle AOB=\overset{\frown}{AB}$	$\angle ACB=\dfrac{1}{2}\overset{\frown}{AB}$

例 如圖，$\overline{AC}$ 為圓 O 的一弦，$\overleftrightarrow{AB}$ 切圓 O 於 A 點，已知 $\overset{\frown}{AC}=60^\circ$，則

(1) $\angle AOC=\overset{\frown}{AC}=60^\circ$。

(2) $\angle ADC=\dfrac{1}{2}\overset{\frown}{AC}=\dfrac{1}{2}\times60^\circ=30^\circ$。



▽⑪圓內接四邊形：

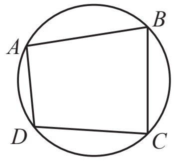
圓內接四邊形的對角互補。

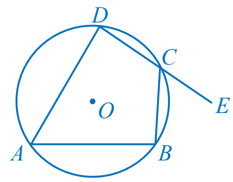
例 如圖，四邊形 $ABCD$ 為圓 O 的內接四邊形，若 $\angle ECB=60^\circ$，$\angle D=85^\circ$，求 $\angle A$ 和 $\angle B$。

$\angle DCB=180^\circ-\angle ECB=180^\circ-60^\circ=120^\circ$，

$\angle A=180^\circ-\angle DCB=180^\circ-120^\circ=60^\circ$，

$\angle B=180^\circ-\angle D=180^\circ-85^\circ=95^\circ$。





◎立體圖形（3 下 3-1、3-2）

▽ ❶ n 角柱：

(1) 上下底面為全等的 n 邊形。

(2) 側面均為矩形，且所有側面皆與底面互相垂直。

(3) 有 $2n$ 個頂點、$3n$ 條邊和 $(n+2)$ 個面。

例 五角柱有 $2\times5=10$ 個頂點、$3\times5=15$ 條邊和 $5+2=7$ 個面。

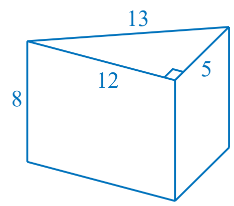
(4) 體積＝底面積×高。

(5) 表面積＝兩底面的面積和＋所有側面矩形的面積和。

例 如圖，三角柱的體積＝$(12\times5\div2)\times8=240$。

三角柱的表面積為＝$(12\times5\div2)\times2+(5+12+13)\times8$

＝300。



▽ ❷ 圓柱：

(1) 上下底面為等圓。

(2) 側面可展開成一個矩形，矩形的長等於底面圓周長，矩形的寬等於圓柱的高。

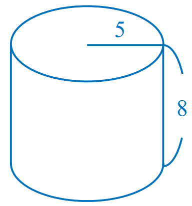
(3) 兩底面圓心的連線與兩底面都垂直。

(4) 體積＝底面積×高。

(5) 表面積＝兩底面的圓面積和＋底面圓周長×高。

例 如圖，圓柱的體積＝$(5\times5\times\pi)\times8=200\pi$。

圓柱的表面積＝$(5\times5\times\pi)\times2+(2\times5\times\pi)\times8=130\pi$。



▽ ❸ 正 n 角錐：

(1) 底面為正 n 邊形。

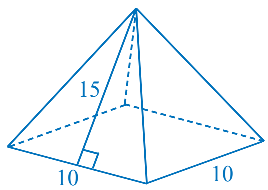
(2) 側面均為等腰三角形。

(3) 有 $(n+1)$ 個頂點、$2n$ 條邊和 $(n+1)$ 個面。

例 正六角錐有 $6+1=7$ 個頂點、$2\times6=12$ 條邊和 $6+1=7$ 個面。

(4) 表面積＝底面積＋所有側面等腰三角形的面積和。

例 如圖，四角錐的表面積＝$10\times10+(10\times15\div2)\times4=400$。



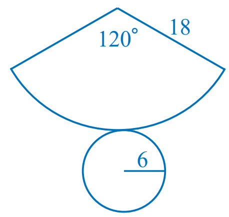
▽ ❹ 圓錐：

(1) 有一個頂點和圓形底面，頂點和底面圓心連線與底面垂直。

(2) 側面可展開成一個扇形，且側面展開的扇形弧長等於底面圓周長。

(3) 表面積＝底面圓面積＋側面展開的扇形面積。

例 如圖，圓錐的表面積＝$6\times6\times\pi+18\times18\times\pi\times\frac{120}{360}=144\pi$。



◎次數分配與資料展示（1下5-1、2上第5章）

▽❶次數分配表、累積次數分配表、相對次數分配表與累積相對次數分配表：

(1)將統計資料歸類到不同的類別中，並顯示每一個類別中觀察值的數量，稱為次數分配表。將資料整理成分配表後，根據次數分配表，可以繪製次數分配直方圖與折線圖。

(2)將各組次數依序累加，所得的統計表稱為累積次數分配表。根據累積次數分配表，可以繪製累積次數分配折線圖。

(3)將各組資料的次數與全部資料的比值用百分比表示，所得的統計表稱為相對次數分配表。根據相對次數分配表，可以繪製相對次數分配直方圖與折線圖。

(4)將各組相對次數依序累加，所得的統計表稱為累積相對次數分配表。利用累積相對次數分配表，可以繪製累積相對次數分配折線圖。

例 下表是三年甲班40位學生，數學成績的累積相對次數分配表，則

成績（分）	次數（人）	累積次數（人）	相對次數（%）	累積相對次數（%）
30～40	2	2	5	5
40～50	4	6	10	15
50～60	4	10	10	25
60～70	8	18	20	45
70～80	10	28	25	70
80～90	8	36	20	90
90～100	4	40	10	100
合計	40		100	

(1)威利的成績是70分，落在70～80分這一組。

(2)成績低於60分的有10人。

(3)成績在80～90分的人數占全班的20%。

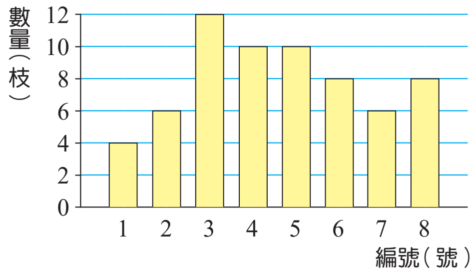
(4)成績低於80分的人數占全班的70%。

註 製作次數分配折線圖、相對次數分配折線圖時，以各組的**組中點**來取折點。

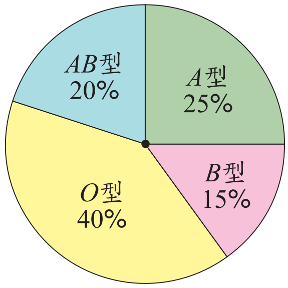
註 製作累積次數分配折線圖、累積相對次數分配折線圖時，以各組的**右端**來取折點，這樣才符合累積的意義。

▽❷統計圖表：

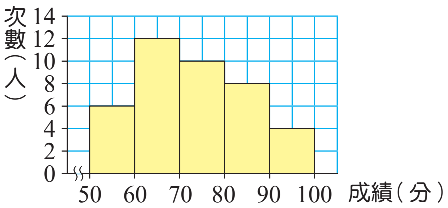
(1)長條圖



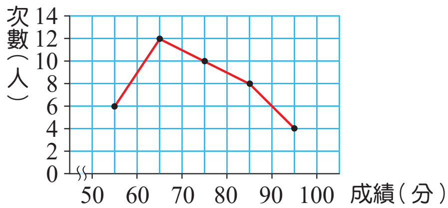
(2)圓形圖



(3)直方圖



(4)折線圖



◎列聯表(1 下 5-1)

▽❶列聯表：

將資料用兩種以上的類別分組，並統計次數所得的統計表稱為列聯表，其中直行與橫列對應的數字即為次數。

例 某校三位優良學生候選人投票結果，統計如下：

候選人 / 年級	候選人 A	候選人 B	候選人 C	合計
七年級	105	156	163	424
八年級	201	64	57	322
九年級	145	265	76	486
合計	451	485	296	1232

◎資料的分析（1 下 5-2、3 下 2-1）

▽❶平均數：

將所有數據資料的總和除以總次數，稱為平均數（或算術平均數）。

例 20、22、28、31、35、37、42、49 的平均數為

$\frac{20+22+28+31+35+37+42+49}{8}=33$。

▽❷中位數：

(1) 中位數是一組由小到大排列的資料中，最中間位置的數值。

(2) 中位數的求法如下：將 n 筆資料由小到大依序排列，

①若 n 是奇數，則中位數是「第 $\frac{n+1}{2}$ 筆資料」。

例 將 13 筆資料由小排到大，其中位數為「第 7 筆資料」。

②若 n 是偶數，則中位數是「第 $\frac{n}{2}$ 筆與第（$\frac{n+1}{2}+1$）筆資料的平均」。

例 將 24 筆資料由小排到大，其中位數為「第 12、13 筆資料的平均」。

▽❸眾數：

一組資料中，出現次數最多的資料，稱為這組資料的眾數。

例 有一組資料 15、21、24、24、24、30、30、33、34，出現最多次的是 24，則其眾數為 24。

▽❹四分位數：

將一組資料由小到大排列，其中

(1) 在全部資料 $\frac{1}{4}$ 位置的數值稱為第 1 四分位數，以 Q_1 表示。

(2) 在全部資料 $\frac{2}{4}$ 位置的數值稱為第 2 四分位數，以 Q_2 表示，也就是中位數。

(3) 在全部資料 $\frac{3}{4}$ 位置的數值稱為第 3 四分位數，以 Q_3 表示。

例 有一組 18 筆資料由小到大排列為

4、6、8、10、12、14、16、18、20、22、24、26、28、30、32、34、36、38，

則 Q_1、Q_2、Q_3 是多少？

$18\times\frac{1}{4}=4.5$，$18\times\frac{2}{4}=9$，$18\times\frac{3}{4}=13.5$，

Q_1 是由小到大排列的第 5 筆資料，即為 12，

Q_2 是由小到大排列的第 9、10 筆資料的平均，即為 $\frac{20+22}{2}=21$，

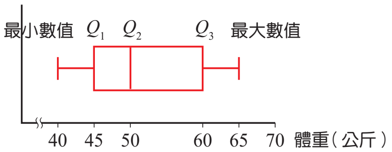
Q_3 是由小到大排列的第 14 筆資料，即為 30。

▽5 全距、四分位距與盒狀圖：

(1) 全部資料中，最大數值與最小數值的差稱為全距。

(2) 第 3 四分位數與第 1 四分位數的差（Q_3-Q_1）稱為四分位距。

(3) 將整體資料中最小數值、第 1 四分位數、中位數、第 3 四分位數與最大數值，這五個資料繪製成長方形盒子圖，稱為盒狀圖。



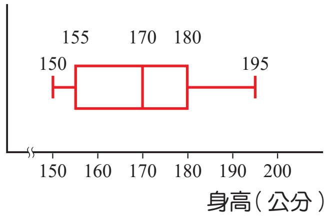
例 右圖是游泳社 40 位成員身高的盒狀圖，則

(1) 該社成員身高的全距為

$195-150=45$（公分）。

(2) 該社成員身高的四分位距為

$180-155=25$（公分）。



◎機率（3 下 2-2）

▽1 機率：

假設一個試驗所有可能的結果有 n 種，若每一種結果發生的可能性都相同，我們就說每一種結果發生的機率都是 $\frac{1}{n}$。

例 投擲一顆公正的骰子一次，可能出現的情形有 1、2、3、4、5、6，若每種結果發生的可能性都相同，則每一種結果發生的機率都是 $\frac{1}{6}$。

▽2 某事件發生的機率：

如果一個試驗所有可能的結果有 n 種，這 n 種結果發生的機率都相等，若 A 事件包含了其中 m 種（$m\leq n$）可能的結果，我們就說 A 事件發生的機率是 $\frac{m}{n}$，且 $0\leq\frac{m}{n}\leq 1$。

(1) A 事件發生的機率 $=\dfrac{A\text{ 事件發生所含可能結果的個數}}{\text{試驗所有可能結果的個數}}$，

且發生的機率都是一個從 0 到 1 的數值。

(2) 若事件的機率是 1，表示此事件一定會發生。

(3) 若事件的機率是 0，表示此事件肯定不會發生。

例 投擲一顆公正的骰子一次，若每種結果發生的機率都相等，則

(1) 出現奇數點的機率是 $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$。

(2) 出現點數小於 7 點的機率是 $\frac{6}{6}=1$。

(3) 出現 8 點的機率是 0。