

給同學的話

數學能解決日常生活中有關數、量、形的問題，因此才被列入中學的重要課程。

數學的學習至少包括兩個重點，一是基本概念的建立，一是計算程序的熟練，二者缺一不可。如果同學只是記住計算程序，並且反覆練習，在小範圍的考試時可能有效。但到高中之後，教材內容加深、加廣，變得抽象而複雜時，就學不下去了。

主動學習、專注聽講、適時演算、樂於思考解題，是學習數學的不二法門。能做到這幾點，相信您一定可以學好數學。

人物介紹



博士

數學狂熱者，擅長將數學套入各種生活情境中。



傑克

幽默風趣愛搞笑，喜歡出風頭。



威利

個性憨厚，但其實是電玩高手，號稱電玩狂人。



安琪

個子嬌小天真爛漫，有點小迷糊，愛問問題，心中永遠有十萬個為什麼？



妙麗

數學一級棒，說起話來很犀利，是博士的得力小助手。



洛基

喜歡吃美食，但又愛漂亮，藉由運動維持好身材。



艾美

外表是氣質美少女，但是愛耍冷，喜歡各種藝術類活動。

目次

Contents

3

上

1 相似形與三角比

4

- 1-1 連比 7
- 1-2 比例線段 21
- 1-3 相似多邊形 40
- 1-4 相似三角形的應用與三角比 62

2 圓形

84

- 2-1 點、線、圓 87
- 2-2 圓心角與圓周角 110

課中標示說明



學習前哨站

診斷學生是否已建立先備知識。

1 學習主題

根據該節主題切割成若干教學活動，以利同學形成階段性的數學觀念，並穩固學習的內涵。



議題

在課程內容中融入各項議題，培養學生批判思考及解決問題的能力。

例1

教學例題

與課文相關的基本題目，以實例產生呼應或作為對照說明。附有詳解，並於題號旁標示其題目類型。

探索活動

透過步驟化的學習，加強同學的思考邏輯能力，並能觀察出數學的原理原則。



跨領域

數學的應用是跨領域的，結合其他科目的學習，幫助學生統整所學。



補給站

提供與前面內容所提到的數學相關之延伸或生活常識補充，作為同學延伸思考及課外參考資料。



Thinking 動動腦

將特別值得同學思索及探討的問題，用另一個段落來呈現，以便和課文與例題有所區隔。



計算機

搭配計算機的使用教學，培養學生使用計算機的正确態度。看到 ，代表可使用計算機協助計算。



3 推理證明與三角形的心 130

3-1 推理證明

133

教學附件 189

3-2 三角形的心

150

秒懂數學 205

課後標示說明

附件標示說明

隨堂練習

通常於例題之後，安排相同類型的練習題目，以增加同學自我演算練習的機會。不附解答。

補充說明

於學習內容或例題中，針對較為困難或易產生錯誤的地方，作為提示或提醒學生注意。

重點摘要

於一段概念學習之後，將其重點條列化整理，讓同學能更容易掌握學習重點。

重點回顧

將該節中重要的學習內容，作條列化的統整，方便同學作有系統的複習。

自我評量

每一節後面均安排相關的複習題目，以利於該節結束時，可以加強演練。

自我挑戰

本單元為統整課程，由學生自行挑戰，教師視班級情況決定如何運用。

數學萬花筒

提供與該章節相關的補充知識等，作為課外的參考資料。

秒懂數學

由課程架構圖，當冊知識重點自我檢測，掌握國中所學數學概念。

教學附件

配合課本教學內容，透過附件實際操作，動手也動腦，加深學習成效。

資訊普拉斯

提供相關的資訊教學補充，培養學生正確使用工具的素養。

1

相似形與三角比

1-1 連比

1. 連比例
2. 連比例式的應用

1-3 相似多邊形

1. 圖形的縮放
2. 相似多邊形
3. 三角形的相似性質

1-2 比例線段

1. 等高三角形
2. 平行線截比例線段
3. 利用比例線段判別平行

1-4 相似三角形的應用與三角比

1. 相似三角形的比例關係
2. 簡易測量
3. 三角比



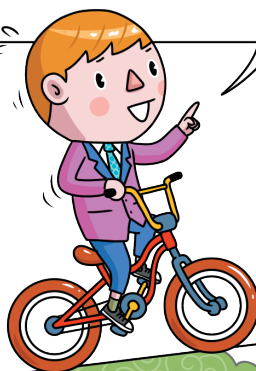


坡度 12% 就是當水平距離每移動 100 公尺時，鉛直上升 12 公尺。

斜坡騎乘距離 上升高度 12 公尺
水平移動距離 100 公尺

這段只有 2 公里而已，加油啊！

我不想知道……



連續超車



大家熱身完了，接著挑戰坡度 15% 吧！

呼，真的得多鍛鍊了！

.....



漫畫中，坡度 15% 是什麼意思呢？翻開課本 P77，你就知道囉！



學習
前哨站

本單元為學生自我複習，
教師可視班級情況決定如何運用。

回顧 ① 比例式

7 下第 3 章

若 $a:b=7:2$ ，設 $a=7r$ ， $b=2r$ ， $r \neq 0$ 。

則 $(a+2b):b = (7r+2 \times 2r):2r$

$$= 11r:2r$$

$$= 11:2$$

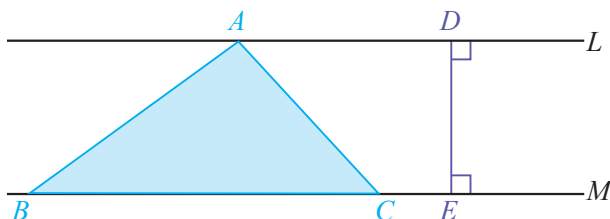
課前練習

若 $a:b=3:2$ ，則 $(2a+3b):(a-b) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

回顧 ② 平行線間距離的應用

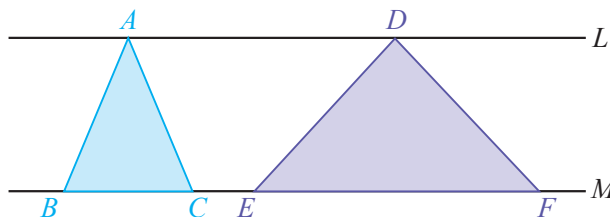
8 下第 4 章

如圖， $L \parallel M$ ， $\overline{DE}$ 垂直 L 和 M ，
若 $\overline{DE}=6$ ，則 $\triangle ABC$ 的高是 6。



課前練習

如圖， $L \parallel M$ ，且 $\overline{BC}=5$ ， $\overline{EF}=10$ ，
若 $\triangle ABC$ 的面積為 17，則
 $\triangle DEF$ 的面積為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。



1-1 連比

1 連比例

可搭配附件 2 進行更多連比練習

洛基利用假期學習做好吃的蜜汁爌肉，從網路查到的食譜如下：



材料

- ① 五花肉 600 公克 (1 斤)
- ② 「完美配方」調味料：
冰糖 1 匙，醬油 2 匙，
米酒 3 匙
- ③ 水 600 c.c.
- ④ 薑、蒜、蔥白一些

作法

- ① 熱油鍋，倒入帶皮的五花肉 1 斤，煎、炒至肉塊表面微焦。
- ② 熱油鍋，爆炒薑、蒜及蔥白，炒至表面微焦。
- ③ 倒進調味料、水與五花肉慢慢熬煮，轉小火將肉燉煮 1~1.5 小時，就會有一鍋美味的蜜汁爌肉。

在蜜汁爌肉的材料中，「完美配方」調味料為冰糖 1 匙，醬油 2 匙，米酒 3 匙，其比例為 1 : 2 : 3。像這樣三個數或至少三個以上的數連續的比，稱為**連比**。

如果洛基想做更多相同味道的蜜汁爌肉，就可以使用如下表中調味料的比例。

五花肉	冰糖	醬油	米酒	冰糖：醬油：米酒
600 公克	1 匙	2 匙	3 匙	1 : 2 : 3
1200 公克	2 匙	4 匙	6 匙	2 : 4 : 6
2400 公克	4 匙	8 匙	12 匙	4 : 8 : 12

Diagram illustrating the scaling of the recipe:

- From 600g to 1200g: $\times 2$
- From 1200g to 2400g: $\times 2$ (labeled as $\times 4$ from 600g)
- From 600g to 2400g: $\times 4$
- From 1200g to 600g: $\div 2$
- From 2400g to 600g: $\div 4$

在上表中可知，製作不同重量的爌肉，所需調味料的連比 1 : 2 : 3、2 : 4 : 6、4 : 8 : 12 都是一樣的，也就是說將連比乘以或除以相同的數，所得的連比還是相同的。



連比例的運算性質

若 a 、 b 、 c 三數的比記為 $a:b:c$ ，且 $m \neq 0$ ，則

(1) $a:b:c = ma:mb:mc$

(2) $a:b:c = \frac{a}{m} : \frac{b}{m} : \frac{c}{m}$

若 a 、 b 、 c 的最大公因數是 1，則 $a:b:c$ 稱為最簡整數比。



隨堂練習

將下列各小題化為最簡整數比。

(1) $12 : 18 : 30$ 。

(2) $\frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{4}$ 。

在「完美配方」中，冰糖、醬油和米酒的比例為 $1:2:3$ ，我們可以得到：

①冰糖、醬油的比例是 $1:2$ ，

②醬油、米酒的比例是 $2:3$ 。

如果我們分別知道「冰糖、醬油的比例」與「醬油、米酒的比例」，也可以求得冰糖、醬油和米酒三者的比例，以下例來說明。



某天洛基和妙麗為了參加全國燻肉大賽，
與師傅討論如何調整醬料的配方。



我最近試出一個更強的銷魂配方，現在傳授給你們！

然而，比賽當天……

糟糕！我只記得冰糖、醬油的比例是 $3:7$ 。



我只記得醬油、米酒的比例是 $7:5$ 。

洛基和妙麗兩人分別只記得其中兩個調味料的比例，想求得這三個調味料的連比，就要從相同的調味料著手。這兩個比中，相同的調味料醬油所對應的數都是 7 。設冰糖要 x 匙，醬油要 y 匙，米酒要 z 匙，根據上述的內容可知

$$x : \boxed{y} = 3 : \boxed{7}$$

$$\boxed{y} : z = \boxed{7} : 5$$

因此，可以直接求出 $x:y:z = 3:7:5$ 。像這樣的式子，稱為**連比例式**。

也就是說，如果只知道 $x:y$ 、 $y:z$ 與 $x:z$ 這三個比中的其中任兩個比，要求這三數的連比時，就必須先從相同文字符號所對應的數開始，如果相同就可以直接求這三個數的連比。



隨堂練習

某便利商店想更換招牌，已知正面招牌的長與寬分別是 x 公分與 y 公分，且 $x:y=11:4$ ，側面招牌的寬與長分別是 y 公分與 z 公分，且 $y:z=4:9$ ，求 $x:y:z=?$



如果相同文字符號所對應的數不同時，例如 $x:y=3:4$ ， $y:z=6:5$ ，此時求 $x:y:z$ 的連比，可將 $x:y$ 與 $y:z$ 分別乘以適當的數，使得 y 所對應的數相同，再求這三個數的連比，我們以下的例子來說明。

已知 $x:y=3:4$ ， $y:z=6:5$ ，

$$\text{所以 } x : \boxed{y} = 3 : \boxed{4}$$

$$\boxed{y} : z = \boxed{6} : 5$$

在前面的說明中，相同的文字符號是 y ，為了使對應的 y 值相同，可以乘以對方的數，使得對應的 y 值相同。

$$\begin{array}{ccccccc} \text{所以 } x : \boxed{y} & = & 3 : \boxed{4} & \xrightarrow{\text{同時乘以 } 6} & = & (3 \times 6) : (\boxed{4 \times 6}) & = 18 : \boxed{24} \\ \boxed{y} : z & = & \boxed{6} : 5 & \xrightarrow{\text{同時乘以 } 4} & = & (\boxed{6 \times 4}) : (5 \times 4) & = \boxed{24} : 20 \end{array}$$

↑
對應的 y 值相同

因此可以得到 $x:y:z=18:24:20=9:12:10$ 。



通常會約分成最簡單的整數比。

一般而言，相同文字符號所對應的數不同時，除了可以乘以對方的數，使得對應的 y 值相同，也可以選取兩數的最小公倍數，當做相同文字符號所對應的數，我們以下面的例子來說明。

例1 連比例的運算

自評 P18 第 1 題(1)、(2)

設 $x:y=3:4$ ， $y:z=6:7$ ，求 $x:y:z$ 。

解 因為 $[4, 6] = 12$ ，

$$\begin{aligned} \text{所以 } x:y &= 3:4 = (3 \times 3):(4 \times 3) = 9:12 \\ y:z &= 6:7 = (6 \times 2):(7 \times 2) = 12:14 \end{aligned}$$

因此 $x:y:z = 9:12:14$ 。

我們也可用直式來求
三數的連比，如右：

$$\begin{array}{rcl} x & : & y & : & z \\ 3 & : & 4 & & \\ & & 6 & : & 7 \\ \hline (3 \times 3) & : & (4 \times 3) & & \\ & & (6 \times 2) & : & (7 \times 2) \\ \hline 9 & : & 12 & : & 14 \end{array}$$

隨堂練習

自評 P18 第 1 題(3)

設 $x:y=\frac{5}{2}:3$ ， $x:z=4:\frac{1}{3}$ ，求：

(1) $x:y$ 與 $x:z$ 的最簡整數比。

(2) $x:y:z$ 。

例2 連比例的運算

自評 P18 第 2 題

已知 x 、 y 、 z 皆不等於 0，且 $5x=4y$ ， $3x=5z$ ，求 $x:y:z$ 。

解 由 $5x=4y$ ，可得 $x:y=4:5$ ，
 由 $3x=5z$ ，可得 $x:z=5:3$ ，
 因此 $x:y:z=20:25:12$ 。

x	:	y	:	z
4	:	5		
5			:	3
(4×5)	:	(5×5)		
(5×4)			:	(3×4)
20	:	25	:	12



隨堂練習

1. 已知 x 、 y 、 z 皆不等於 0，且 $x-2y=0$ ， $4y=3z$ ，求 $x:y:z$ 。

2. 已知 x 、 y 、 z 皆不等於 0，且 $\frac{x}{4}=\frac{y}{5}$ ， $4x=3z$ ，求 $x:y:z$ 。

2 連比例式的應用

大正公司今年的業績良好，董事會決定將 7000 萬元的營利所得，按 2 : 3 : 5 的比例提撥給 A、B、C 三個部門，那麼 A、B、C 三個部門分別可以分到多少元？

我們可以運用連比來計算，方法如下：

設 A 組、B 組、C 組分別得到 x 萬元， y 萬元， z 萬元，得 $x : y : z = 2 : 3 : 5$ ，

$$\left. \begin{array}{l} \text{由 } x : y = 2 : 3, \text{ 可得 } \frac{x}{2} = \frac{y}{3} \\ \text{由 } y : z = 3 : 5, \text{ 可得 } \frac{y}{3} = \frac{z}{5} \end{array} \right\} \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5}$$

如果 $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5} = r$ ， $r \neq 0$ ，可得 $x = 2r$ ， $y = 3r$ ， $z = 5r$ 。

$2r + 3r + 5r = 7000$ ， $10r = 7000$ ， $r = 700$ 。

因此 A 組分到 $2 \times 700 = 1400$ (萬元)、

B 組分到 $3 \times 700 = 2100$ (萬元)、

C 組分到 $5 \times 700 = 3500$ (萬元)。

連比例式的應用

已知 a 、 b 、 c 皆不等於 0，則下列三者有相同的意義。

$$(1) x : y : z = a : b : c \quad (2) \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} \quad (3) x = ar, y = br, z = cr (r \neq 0)$$

隨堂練習

自評 P19 第 3 題

製作桂圓麵包的材料中，老麵糰、新麵糰與桂圓的重量比是 6 : 17 : 2。如果將老麵糰、新麵糰與桂圓揉在一起後，秤得的總重量為 750 公克，則所含的桂圓重量是多少公克？

例3 連比例式的運算

自評 P19 第 4 題

如果 $x : y : z = 2 : 3 : 4$ ，且 $x + y + 2z = 39$ ，求 x 、 y 、 z 的值。

解 由 $x : y : z = 2 : 3 : 4$ ，設 $x = 2r$ ， $y = 3r$ ， $z = 4r$ ， $r \neq 0$ 。

$$\therefore x + y + 2z = 39$$

$$\therefore 2r + 3r + 2 \times 4r = 39$$

$$13r = 39, r = 3$$

$$\text{因此 } x = 2 \times 3 = 6,$$

$$y = 3 \times 3 = 9,$$

$$z = 4 \times 3 = 12。$$

**隨堂練習**

如果 $\frac{x}{4} = \frac{y}{3} = \frac{z}{8}$ ，求 $\frac{x+2y}{3y+2z}$ 的值。

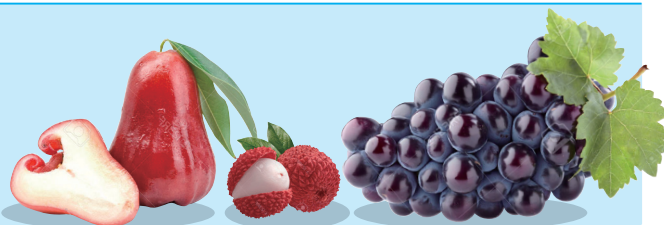
**Thinking**

若 $x : y : z = 2 : 3 : 4$ ，則 $3y = 2z$ 是否成立？

例4 連比例的應用

自評 P19 第 5 題

已知 2 個蓮霧、9 顆荔枝及 13 顆葡萄
三者的含糖量相等，則 1 個蓮霧、1 顆
荔枝和 1 顆葡萄所含糖量的比是多少？



解 設 1 個蓮霧、1 顆荔枝和 1 顆葡萄所含糖量

分別是 x 單位、 y 單位、 z 單位。

依題意可以列式得 $2x=9y=13z$ ，

由 $2x=9y$ ，得 $x:y=9:2$ ；

由 $9y=13z$ ，得 $y:z=13:9$ 。

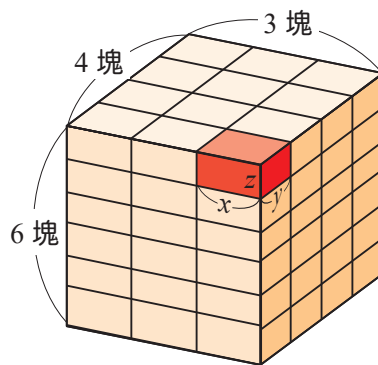
因此 $x:y:z=117:26:18$ ，

所以 1 個蓮霧、1 顆荔枝和 1 顆葡萄所含糖量的比是 $117:26:18$ 。

$$\begin{array}{rcl} x & : & y & : & z \\ 9 & : & 2 & & \\ & & 13 & : & 9 \\ \hline 117 & : & 26 & : & 18 \end{array}$$

隨堂練習

博士買了一些相同大小輕質的混凝土磚，並將它們堆成一個如右圖的實心大正立方體。已知一個混凝土磚的長、寬、高分別是 x 公分、 y 公分與 z 公分，求 $x:y:z$ 。

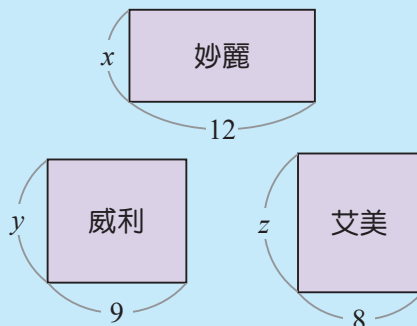


對於型如 $ax=by=cz$ 的式子，求 $x:y:z$ 的連比時也可以用下面的方法來處理。

例5 連比例的幾何問題

自評 P20 第 6 題

如果妙麗、威利、艾美打算畫出面積相等的長方形，已知三人分別以 12 公分、9 公分與 8 公分作為長方形的長，則妙麗、威利、艾美三人所畫的長方形中，寬的連比為何？



解 因為所畫的三個長方形面積相等，

所以可設三人所畫的長方形面積皆為 A 平方公分，

則 $12x=9y=8z=A$ ，

可得 $12x=A$ ， $9y=A$ ， $8z=A$ ，因此 $x=\frac{A}{12}$ ， $y=\frac{A}{9}$ ， $z=\frac{A}{8}$ ，

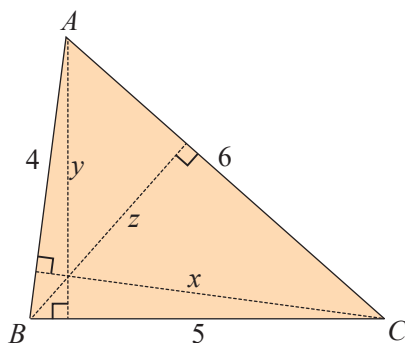
$$\begin{aligned} x:y:z &= \frac{A}{12} : \frac{A}{9} : \frac{A}{8} \\ &= \frac{1}{12} : \frac{1}{9} : \frac{1}{8} \quad \left[A \neq 0, \text{同除以 } A \right] \\ &= 6:8:9 \quad \left[(12, 9, 8) = 72, \text{同乘以 } 72 \right] \end{aligned}$$



隨堂練習

自評 P20 第 7 題

$\triangle ABC$ 中， $\overline{AB}=4$ ， $\overline{BC}=5$ ， $\overline{AC}=6$ ，如果此三角形三邊的對應高依序分別為 x 、 y 、 z ，求 $x:y:z$ 。



重點回顧

① 連比

a 比 b 比 c 記作 $a:b:c$ ，稱為 a 、 b 、 c 的連比。

② 連比例的運算性質

若 a 、 b 、 c 三數的比記為 $a:b:c$ ，且 $m \neq 0$ ，則

$$(1) a:b:c = ma:mb:mc$$

$$(2) a:b:c = \frac{a}{m}:\frac{b}{m}:\frac{c}{m}$$

③ 求連比

由 $x:y=a:b$ ， $y:z=b:c$ ， $x:z=a:c$ 中的任意兩個比例式，可求出連比例式 $x:y:z=a:b:c$ 。

例 1. $x:y=2:3$ ， $y:z=3:5$ ，

$$\begin{array}{rcl} x & : & y & : & z \\ 2 & : & 3 & & \\ \hline & & 3 & : & 5 \\ \hline 2 & : & 3 & : & 5 \end{array}$$

可求出連比例式

$$x:y:z=2:3:5。$$

2. $x:z=3:4$ ， $y:z=7:5$ ，

$$\begin{array}{rcl} x & : & y & : & z \\ 3 & : & & & 4 \\ & & 7 & : & 5 \\ \hline 15 & : & 28 & : & 20 \end{array}$$

可求出連比例式

$$x:y:z=15:28:20。$$

④ 連比例式的應用

已知 a 、 b 、 c 皆不等於 0，則下列三者有相同的意義。

$$(1) x:y:z=a:b:c$$

$$(2) \frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$$

$$(3) x=ar, y=br, z=cr (r \neq 0)$$

例 如果 $x:y:z=2:3:5$ ，

$$\text{則 } \frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{5}，$$

$$\text{或 } x=2r, y=3r, z=5r (r \neq 0)。$$

I - I 自我評量

① 求下列各題的連比：

(1) $x : y = 2 : 3$, $y : z = 4 : 5$,

則 $x : y : z =$ _____ 。

課 P11 例 1

(2) $a : b = 4 : 5$, $a : c = 3 : 8$,

則 $a : b : c =$ _____ 。

課 P11 例 1

(3) $y : z = \frac{1}{3} : \frac{1}{2}$, $x : z = \frac{1}{5} : \frac{1}{6}$,

則 $x : y : z =$ _____ 。

課 P11 隨堂

② 設 a 、 b 、 c 皆不等於 0，且 $2a = 3b$ ， $4b = 5c$ ，求：

課 P12 例 2

(1) $a : b : c$ 。

(2) 如果 $a - b = -15$ ，求 a 、 c 的值。

- ③ 有一塊由金、銀、銅組成的合金，其中所含金、銀的重量比為 $3:2$ ，金、銅的重量比為 $1:2$ 。如果此合金所含的銅與銀重量相差 36 公克，則此塊合金的重量是多少公克？

課 P13 隨堂

- ④ 如果 $\frac{x}{5} = \frac{y}{6} = \frac{z}{3}$ ，且 $x + 3y - 4z = 33$ ，求 z 的值。

課 P14 例 3

- ⑤ 已知 x 、 y 、 z 皆不等於 0，且 $3x = 4y = 5z$ ，求 $x:y:z$ 。

課 P15 例 4

- ⑥ 設 $\triangle ABC$ 三個內角分別為 $\angle A = x^\circ$ ， $\angle B = y^\circ$ ， $\angle C = z^\circ$ ，且 $x : 2y = 9 : 10$ ， $4y : 5z = 1 : 1$ ，求 $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$ 的度數。

課 P16 例 5

- ⑦ 威利從中正紀念堂到臺灣大學，若在相同路線下，發現坐公車、騎自行車、步行的時間分別是 10 分鐘、15 分鐘和 40 分鐘，則這三種交通工具平均速率的比是多少？

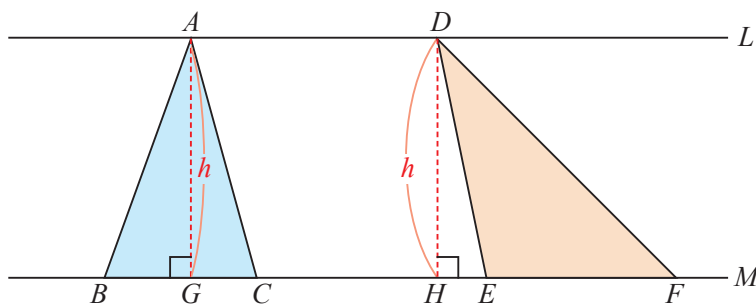
課 P16 隨堂



1-2 比例線段

1 等高三角形

如右圖，已知 $L \parallel M$ ，且有兩個三角形 $\triangle ABC$ 、 $\triangle DEF$ ，其中 $\overline{AG}$ 、 $\overline{DH}$ 分別是 $\triangle ABC$ 、 $\triangle DEF$ 的高。



因為「兩平行線間的距離相等」，所以 $\overline{AG} = \overline{DH} = h$ ，故

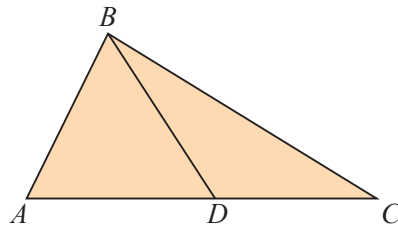
$$\begin{aligned}\triangle ABC \text{ 面積} : \triangle DEF \text{ 面積} &= \frac{1}{2} \times \overline{BC} \times \overline{AG} : \frac{1}{2} \times \overline{EF} \times \overline{DH} \\ &= \frac{1}{2} \times \overline{BC} \times h : \frac{1}{2} \times \overline{EF} \times h \\ &= \overline{BC} : \overline{EF}\end{aligned}$$

等高或同高三角形的面積比

等(同)高三角形的面積比等於其對應底邊長的比。

隨堂練習

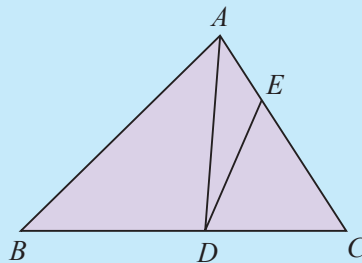
如圖， $\triangle ABC$ 中， D 為 $\overline{AC}$ 上的一點，若 $\overline{AD} : \overline{CD} = 4 : 3$ ，求 $\triangle ABD$ 與 $\triangle CBD$ 的面積比。



例1 等(同)高三角形的面積

自評 P38 第 1 題

如圖， $\triangle ABC$ 中， D 、 E 分別在 $\overline{BC}$ 與 $\overline{AC}$ 上，
若 $\overline{BD} : \overline{DC} = 4 : 3$ ， $\overline{CE} : \overline{EA} = 5 : 2$ ，
且 $\triangle ABD$ 的面積是 28，求：



- (1) $\triangle ADC$ 的面積。
- (2) $\triangle DAE$ 的面積。

解

(1) $\because \triangle ABD$ 和 $\triangle ADC$ 同高，

$$\therefore \triangle ABD \text{ 面積} : \triangle ADC \text{ 面積} = \overline{BD} : \overline{DC} = 4 : 3$$

$$28 : \triangle ADC \text{ 面積} = 4 : 3$$

$$\therefore \triangle ADC \text{ 面積} = 21。$$

(2) $\because \triangle DCE$ 和 $\triangle DAE$ 同高，

$$\therefore \triangle DCE \text{ 面積} : \triangle DAE \text{ 面積} = \overline{CE} : \overline{EA} = 5 : 2$$

$$\text{設 } \triangle DCE \text{ 面積} = 5r, \triangle DAE \text{ 面積} = 2r,$$

$$\text{又 } \triangle ADC \text{ 面積} = \triangle DCE \text{ 面積} + \triangle DAE \text{ 面積}$$

$$21 = 5r + 2r, \text{ 故 } r = 3,$$

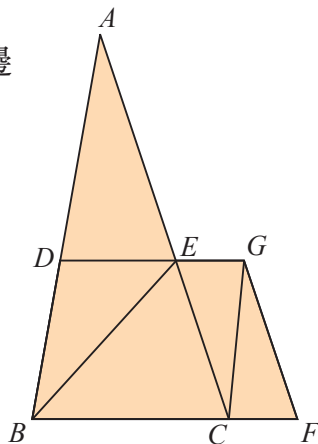
$$\therefore \triangle DAE \text{ 的面積} = 2 \times 3 = 6。$$



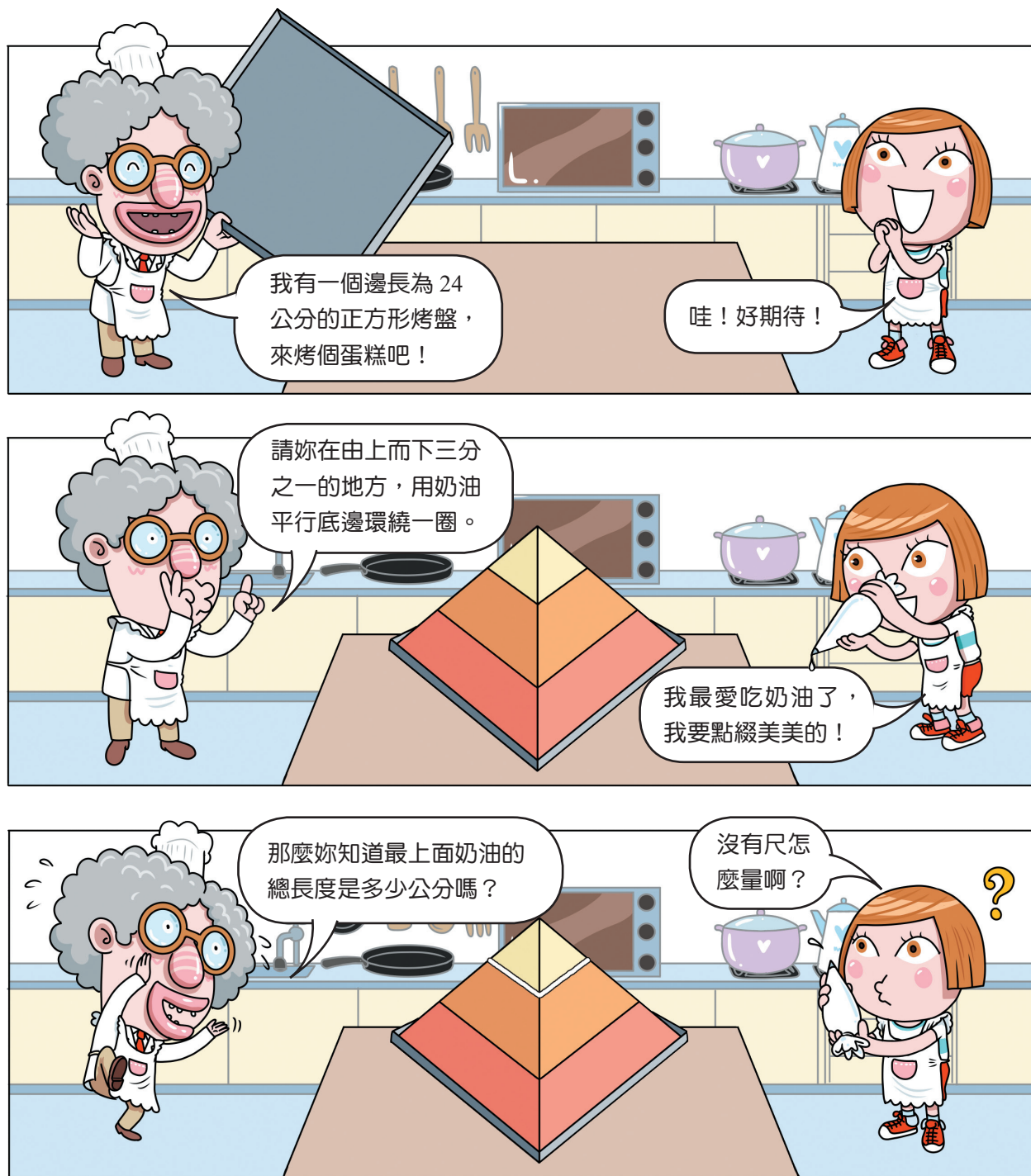
隨堂練習

如圖， $\triangle ABC$ 中， D 、 E 分別在 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 上，且 $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ 。
延長 $\overline{DE}$ 、 $\overline{BC}$ ，且分別在延長線上取 G 、 F 兩點，使得四邊形 $CFGE$ 是一個平行四邊形。若 $\overline{AD} = 10$ ， $\overline{DB} = 7$ ， $\overline{DE} = 5$ ，
 $\overline{EG} = 3$ ，回答下列問題：

- (1) $\triangle ADE$ 面積 : $\triangle BDE$ 面積 = _____ : _____。
- (2) $\triangle BDE$ 面積 : $\triangle CEG$ 面積 = _____ : _____。
- (3) $\triangle ADE$ 面積 : $\triangle BDE$ 面積 : $\triangle CFG$ 面積
= _____ : _____ : _____。



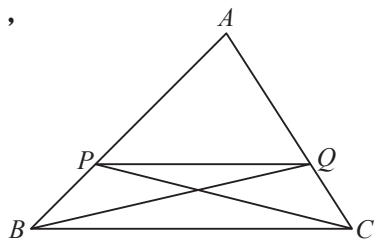
2 平行線截比例線段



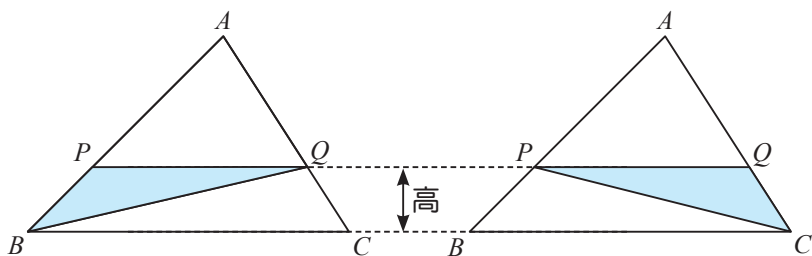
要解決漫畫中的問題，我們先利用等高三角形的面積比等於其對應底邊長的比，發展平行線截比例線段的性質，再利用這個性質來解決問題。

探索活動 平行線截比例線段

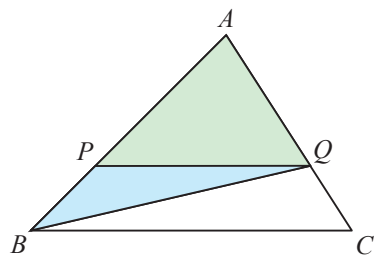
右圖 $\triangle ABC$ 中， P 、 Q 兩點分別在 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 上， $\overline{PQ} \parallel \overline{BC}$ ，
連接 $\overline{PC}$ 、 $\overline{BQ}$ ，回答下列問題：



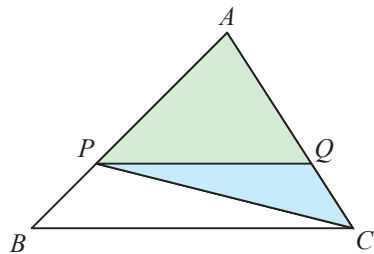
(1) $\triangle BPQ$ 面積與 $\triangle CPQ$ 面積是否相等？為什麼？



(2) 為什麼 $\triangle APQ$ 面積： $\triangle BPQ$ 面積 $= \overline{AP} : \overline{PB}$ ？



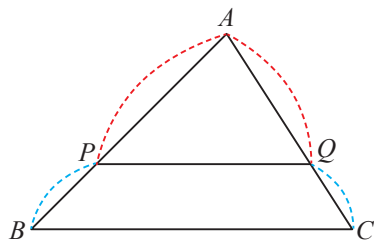
(3) 為什麼 $\triangle APQ$ 面積： $\triangle CPQ$ 面積 $= \overline{AQ} : \overline{QC}$ ？



(4) 由(1)、(2)、(3)推得 $\overline{AP} : \overline{PB}$ 與 $\overline{AQ} : \overline{QC}$ 是否相等？

由  **探索活動** 可知，若一直線平行於三角形的一邊，且與另兩邊相交，則此直線把這兩邊截成等比例的線段，我們稱為**平行線截比例線段性質**。

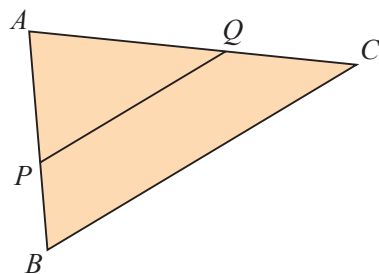
如圖， $\triangle ABC$ 中， P 、 Q 兩點分別在 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 上，若 $\overline{PQ} \parallel \overline{BC}$ ，則 $\overline{AP} : \overline{PB} = \overline{AQ} : \overline{QC}$ 。



隨堂練習

如圖， $\triangle ABC$ 中， P 、 Q 兩點分別在 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 上，若 $\overline{PQ} \parallel \overline{BC}$ ， $\overline{AP} = 6$ ， $\overline{PB} = 4$ ， $\overline{AQ} = 9$ ，求 $\overline{QC}$ 。

自評 P38 第 2 題

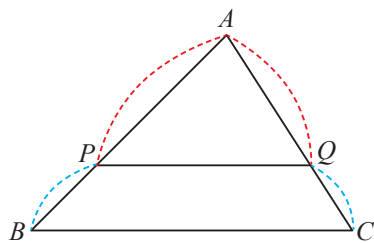


除了上面的性質之外，可進一步得到其它性質。

設 $\overline{AP} : \overline{PB} = \overline{AQ} : \overline{QC} = a : b$ 。

若 $\overline{AP} = ar$ ， $\overline{PB} = br$ ， $r \neq 0$ ，則

$$\begin{aligned}\overline{AP} : \overline{AB} &= \overline{AP} : (\overline{AP} + \overline{PB}) \\ &= ar : (ar + br) \\ &= a : (a + b)\end{aligned}$$



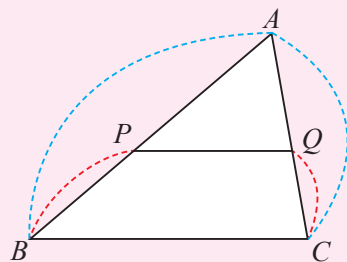
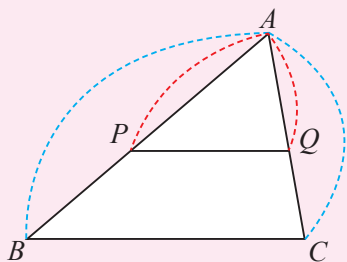
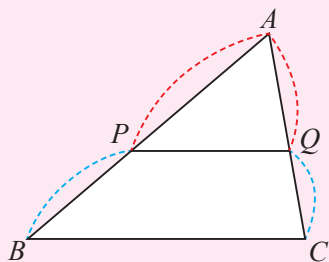
同理， $\overline{AQ} : \overline{AC} = a : (a + b)$ ，因此可以得到 $\overline{AP} : \overline{AB} = \overline{AQ} : \overline{AC}$ 。仿照這樣的過程，也可得到 $\overline{PB} : \overline{AB} = \overline{QC} : \overline{AC}$ 。



平行線截比例線段性質(一)

$\triangle ABC$ 中， P 、 Q 兩點分別在 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 上，若 $\overline{PQ} \parallel \overline{BC}$ ，則：

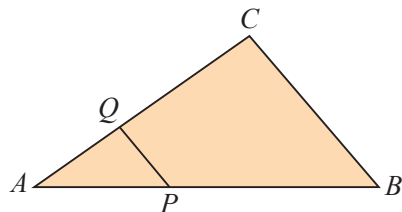
$$(1) \overline{AP} : \overline{PB} = \overline{AQ} : \overline{QC} \quad (2) \overline{AP} : \overline{AB} = \overline{AQ} : \overline{AC} \quad (3) \overline{PB} : \overline{AB} = \overline{QC} : \overline{AC}$$



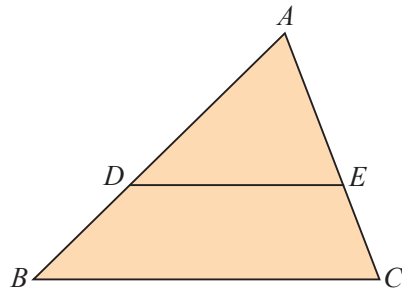
隨堂練習

自評 P38 第 2 題

1. 如圖， $\triangle ABC$ 中， P 、 Q 兩點分別在 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 上，若 $\overline{PQ} \parallel \overline{BC}$ ， $\overline{AP} = 16$ ， $\overline{AB} = 40$ ， $\overline{AQ} = 12$ ，求 $\overline{AC}$ 。

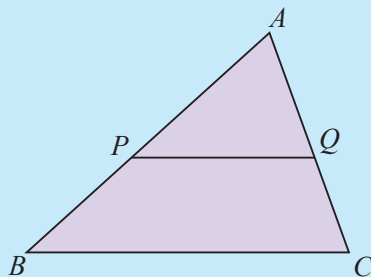


2. 如圖， $\triangle ABC$ 中， D 、 E 兩點分別在 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 上，若 $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ ， $\overline{BD} : \overline{AB} = 3 : 8$ ， $\overline{AC} = 6$ ，求 $\overline{CE}$ 。



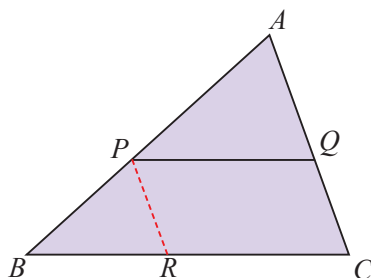
例2 平行線截比例線段

如圖， $\triangle ABC$ 中， P 、 Q 兩點分別在 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 上，
若 $\overline{PQ} \parallel \overline{BC}$ ，說明 $\overline{PQ} : \overline{BC} = \overline{AP} : \overline{AB}$ 。



說明

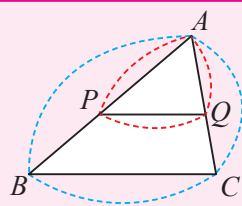
- (1) 過 P 點作 $\overline{PR} \parallel \overline{AC}$ ，交 $\overline{BC}$ 於 R 點，又 $\overline{PQ} \parallel \overline{BC}$ ，
 $\therefore$ 四邊形 $PRCQ$ 為平行四邊形，故 $\overline{PQ} = \overline{RC}$ 。
- (2) 在 $\triangle ABC$ 中， $\because \overline{PR} \parallel \overline{AC}$ ，
 $\therefore \overline{RC} : \overline{BC} = \overline{AP} : \overline{AB}$ (平行線截比例線段性質)，
 又 $\overline{RC} = \overline{PQ}$ ，故 $\overline{PQ} : \overline{BC} = \overline{AP} : \overline{AB}$ 。



由前面的學習可知：當 $\overline{PQ} \parallel \overline{BC}$ 時， $\overline{AP} : \overline{AB} = \overline{AQ} : \overline{AC}$ ，結合例2的結論，可得 $\overline{PQ} : \overline{BC} = \overline{AP} : \overline{AB} = \overline{AQ} : \overline{AC}$ 。

平行線截比例線段的性質(二)

如圖， $\triangle ABC$ 中， P 、 Q 兩點分別在 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 上，
若 $\overline{PQ} \parallel \overline{BC}$ ，則 $\overline{PQ} : \overline{BC} = \overline{AP} : \overline{AB} = \overline{AQ} : \overline{AC}$ 。

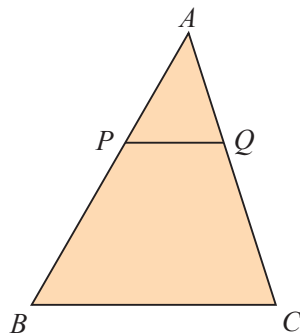


隨堂練習

自評 P38 第 3 題

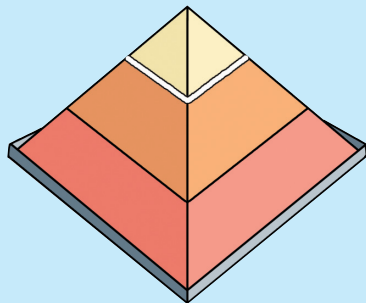
如圖， $\triangle ABC$ 中， P 、 Q 兩點分別在 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 上，
若 $\overline{PQ} \parallel \overline{BC}$ ，且 $\overline{AP} : \overline{PB} = 2 : 3$ ，則

- (1) $\overline{AP} : \overline{AB} = \underline{\hspace{1cm}} : \underline{\hspace{1cm}}$ 。
- (2) $\overline{PQ} : \overline{BC} = \underline{\hspace{1cm}} : \underline{\hspace{1cm}}$ 。



例3 平行線截比例線段的應用

右圖是一個金字塔蛋糕，已知底層是每邊 24 公分的正方形，如果在由上而下三分之一處用奶油環繞一圈平行底邊，則這一圈奶油的長度為多少公分？



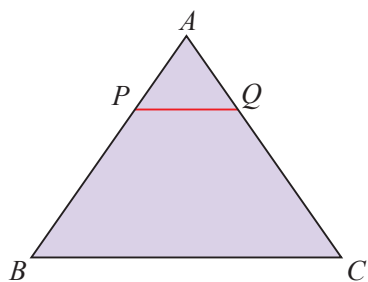
解 蛋糕其中一面的圖形如右圖，
設其中奶油的部分是 $\overline{PQ}$ ，同一邊的底層是 $\overline{BC}$ 。

$$\therefore \overline{PQ} : \overline{BC} = \overline{AP} : \overline{AB} = 1 : 3$$

$$\therefore \overline{PQ} : 24 = 1 : 3$$

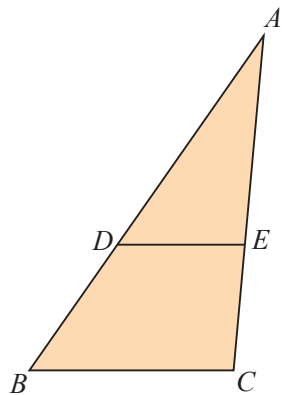
$$\overline{PQ} = 8$$

故一圈奶油的長度是 $8 \times 4 = 32$ (公分)。



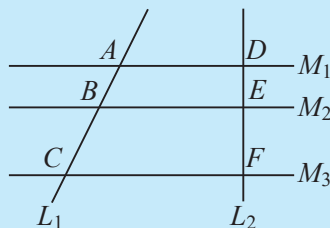
隨堂練習

如圖， $\triangle ABC$ 中， $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ ，若 $\overline{AD} = 20$ ， $\overline{BD} = 12$ ， $\overline{BC} = 16$ ， $\overline{EC} = 9$ ，求 $\triangle ADE$ 的周長。



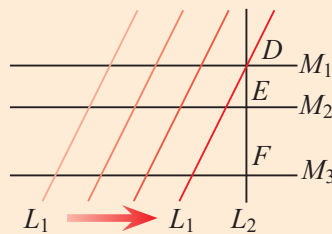
例4 平行線截比例線段性質的應用

如圖，直線 $M_1 \parallel M_2 \parallel M_3$ ，且分別與截線 L_1 交於 A 、 B 、 C 三點，與截線 L_2 交於 D 、 E 、 F 三點，說明 $\overline{AB} : \overline{BC} = \overline{DE} : \overline{EF}$ 。



思路分析

如圖，將 L_1 向右平行移動，使 L_1 與 L_2 交於 D 點，就可利用平行線截比例線段性質來說明。



說明

(1) 過 D 點作 $\overline{DH} \parallel L_1$ ，分別交 M_2 、 M_3 於 G 、 H 兩點。

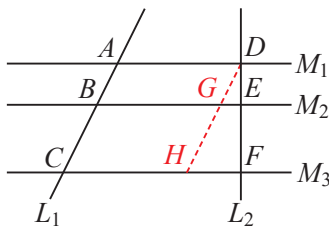
(2) $\because \overline{AD} \parallel \overline{BE} \parallel \overline{CF}$ ，且 $\overline{DH} \parallel L_1$ ，

$\therefore$ 四邊形 $ABGD$ 與四邊形 $BCHG$ 皆為平行四邊形，
故 $\overline{AB} = \overline{DG}$ ， $\overline{BC} = \overline{GH}$ 。

(3) 在 $\triangle DHF$ 中，

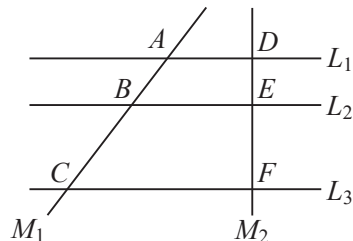
$\because \overline{GE} \parallel \overline{HF}$ ， $\therefore \overline{DG} : \overline{GH} = \overline{DE} : \overline{EF}$ ，

故 $\overline{AB} : \overline{BC} = \overline{DE} : \overline{EF}$ 。



隨堂練習

如圖，直線 $L_1 \parallel L_2 \parallel L_3$ ，直線 M_1 與 M_2 為截線，已知 $\overline{AB} = 25$ ， $\overline{BC} = 45$ ， $\overline{DE} = x + 5$ ， $\overline{EF} = 2x + 6$ ，求 x 的值。



如何在一線段上找出適當的一點，將線段分成兩個線段，使得這兩個線段長的比為給定的比，我們利用下面的例題說明作圖方法。

例5 利用平行線截比例線段性質分割線段

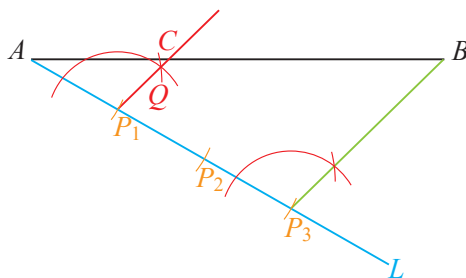
自評 P39 第 4 題

已知 $\overline{AB}$ ，利用尺規作圖，在 $\overline{AB}$ 上找出一點 C ，使得 $\overline{AC} : \overline{CB} = 1 : 2$ 。

A ————— B

作法

- 1 過 A 點作一條異於 $\overline{AB}$ 的直線 L 。
- 2 在 L 上依序取 P_1 、 P_2 、 P_3 三點，使得 $\overline{AP_1} = \overline{P_1P_2} = \overline{P_2P_3}$ 。
- 3 連接 $\overline{P_3B}$ 。
- 4 過 P_1 作 $\overline{P_1Q} \parallel \overline{P_3B}$ ，使 $\overline{P_1Q}$ 與 $\overline{AB}$ 交於 C 點，則 C 點即為所求。



在例5所作出的圖形 $\triangle ABP_3$ 中，因為 $\overline{P_1C} \parallel \overline{P_3B}$ ，由平行線截比例線段性質可知 $\overline{AC} : \overline{CB} = \overline{AP_1} : \overline{P_1P_3} = 1 : 2$ 。



隨堂練習

已知 $\overline{AB}$ ，利用尺規作圖，在 $\overline{AB}$ 上找出一點 C ，使得 $\overline{AC} : \overline{CB} = 2 : 3$ 。

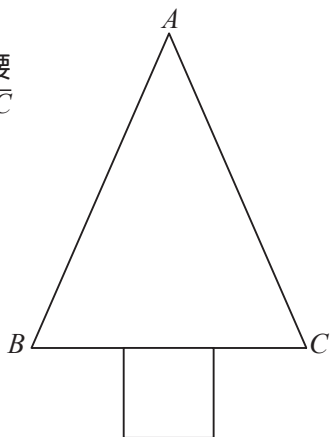
(不必寫出作法)

A ————— B

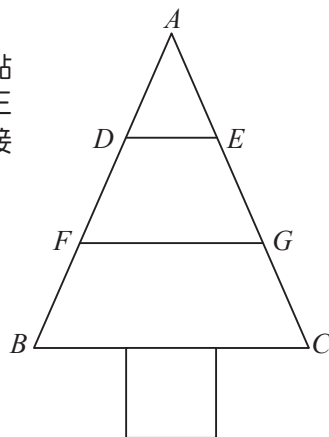
3 利用比例線段判別平行

聖誕節快到了，艾美想在教室的窗戶玻璃貼上聖誕樹的圖案，她的設計如下。

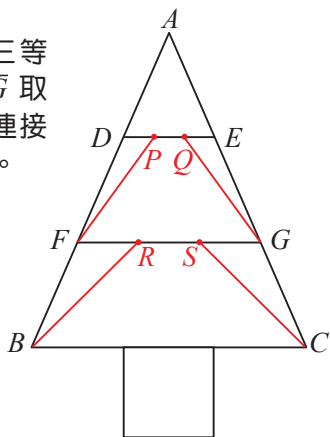
- ① 已知 $\triangle ABC$ 是等腰三角形，且 $\overline{AB}=\overline{AC}=15$ ， $\overline{BC}=12$ 。



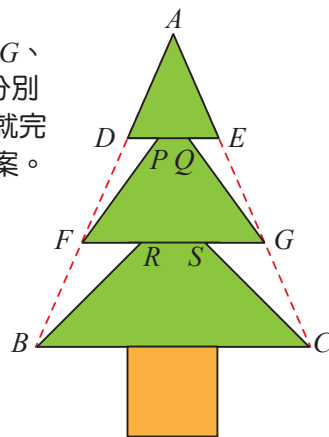
- ② 在 $\overline{AB}$ 取三等分點 D 、 F ，在 $\overline{AC}$ 取三等分點 E 、 G ，連接 $\overline{DE}$ 、 $\overline{FG}$ 。



- ③ 接著在 $\overline{DE}$ 上取三等分點 P 、 Q ，在 $\overline{FG}$ 取三等分點 R 、 S ，連接 $\overline{PF}$ 、 $\overline{QG}$ 、 $\overline{RB}$ 、 $\overline{SC}$ 。



- ④ 剪去 $\triangle DPF$ 、 $\triangle QEG$ 、 $\triangle FRB$ 、 $\triangle SGC$ ，分別塗上鮮豔的顏色，就完成漂亮的聖誕樹圖案。



在上圖中， $\overline{DE}$ 、 $\overline{FG}$ 、 $\overline{BC}$ 看似平行，但實際上是否平行呢？接下來我們將探討這個問題。



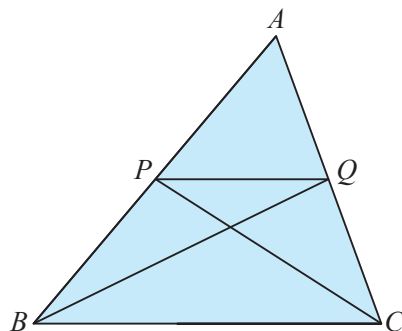
我們利用兩個等高的三角形，其面積比等於邊長的比的概念，來說明 $\overline{PQ}$ 和 $\overline{BC}$ 是否平行，方法如下：

如圖一， $\triangle APQ$ 面積： $\triangle BPQ$ 面積 $= \overline{AP} : \overline{PB}$ (同高)，

$\triangle APQ$ 面積： $\triangle CPQ$ 面積 $= \overline{AQ} : \overline{QC}$ (同高)，

因為 $\overline{AP} : \overline{PB} = \overline{AQ} : \overline{QC}$ ，

所以 $\triangle BPQ$ 面積 $= \triangle CPQ$ 面積。



圖一

如圖二，分別自 B 、 C 向 PQ 直線作高，

垂足分別是 F 、 G ，則 $\overline{BF} \parallel \overline{CG}$ 。

因為 $\triangle BPQ$ 面積 $= \triangle CPQ$ 面積

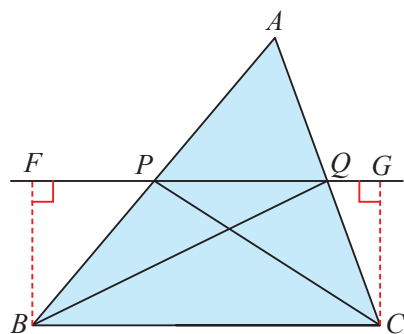
$$\frac{1}{2} \times \overline{PQ} \times \overline{BF} = \frac{1}{2} \times \overline{PQ} \times \overline{CG}$$

所以 $\overline{BF} = \overline{CG}$ 。

又 $\overline{BF} \parallel \overline{CG}$ ，

所以四邊形 $BFGC$ 是平行四邊形 (一組對邊平行且等長)，

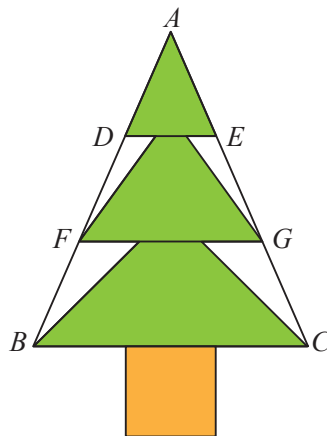
故 $\overline{FG} \parallel \overline{BC}$ ，即 $\overline{PQ} \parallel \overline{BC}$ 。



圖二

由於「 $\overline{AP} : \overline{AB} = \overline{AQ} : \overline{AC}$ 」及「 $\overline{PB} : \overline{AB} = \overline{QC} : \overline{AC}$ 」，皆可推得「 $\overline{AP} : \overline{PB} = \overline{AQ} : \overline{QC}$ 」，因此「若 $\overline{AP} : \overline{AB} = \overline{AQ} : \overline{AC}$ ，則 $\overline{PQ} \parallel \overline{BC}$ 」及「若 $\overline{PB} : \overline{AB} = \overline{QC} : \overline{AC}$ ，則 $\overline{PQ} \parallel \overline{BC}$ 」。

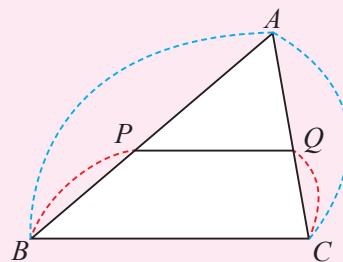
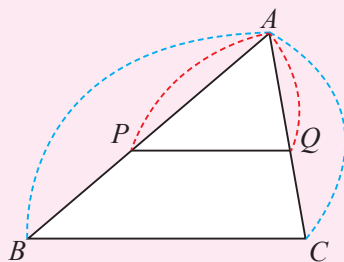
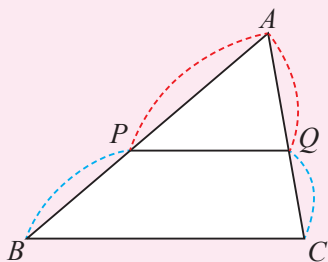
由上述可知，製作聖誕樹的過程中，
因為 $\overline{AD} : \overline{AB} = \overline{AE} : \overline{AC} = 1 : 3$ ，所以 $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ 。
同理， $\overline{FG} \parallel \overline{BC}$ ，故 $\overline{DE} \parallel \overline{FG} \parallel \overline{BC}$ 。



截線段與平行的判別

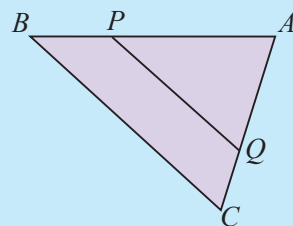
$\triangle ABC$ 中, P 、 Q 兩點分別在 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 上, 若

- (1) $\overline{AP} : \overline{PB} = \overline{AQ} : \overline{QC}$, (2) $\overline{AP} : \overline{AB} = \overline{AQ} : \overline{AC}$, (3) $\overline{PB} : \overline{AB} = \overline{QC} : \overline{AC}$,
則 $\overline{PQ} \parallel \overline{BC}$ 。 則 $\overline{PQ} \parallel \overline{BC}$ 。 則 $\overline{PQ} \parallel \overline{BC}$ 。



例6 由比例線段判別是否平行

如圖, $\triangle ABC$ 中, $\overline{AP}=8$, $\overline{PB}=4$, $\overline{AQ}=6$, $\overline{QC}=3$, 則 $\overline{PQ}$ 與 $\overline{BC}$ 是否平行? 為什麼?



解 在 $\triangle ABC$ 中,

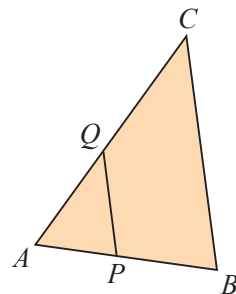
$$\left. \begin{array}{l} \because \overline{AP} : \overline{PB} = 8 : 4 = 2 : 1 \\ \overline{AQ} : \overline{QC} = 6 : 3 = 2 : 1 \end{array} \right\} \overline{AP} : \overline{PB} = \overline{AQ} : \overline{QC}$$

故 $\overline{PQ} \parallel \overline{BC}$ 。

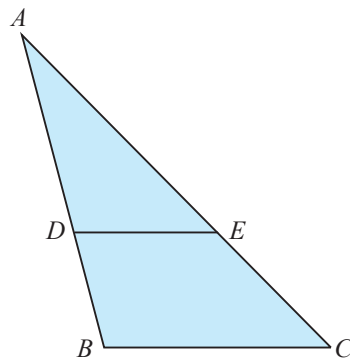
隨堂練習

自評 P38 第 3 題

如圖, $\triangle ABC$ 中, $\overline{AP} : \overline{AB} = 9 : 20$, 若 $\overline{AQ} = 18$, $\overline{AC} = 40$, 則 $\overline{PQ}$ 與 $\overline{BC}$ 是否平行? 為什麼?



如圖，我們在前面曾學過， $\triangle ABC$ 中， D 、 E 兩點分別在 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 上，若 $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ ，則 $\overline{AD} : \overline{AB} = \overline{DE} : \overline{BC}$ 。



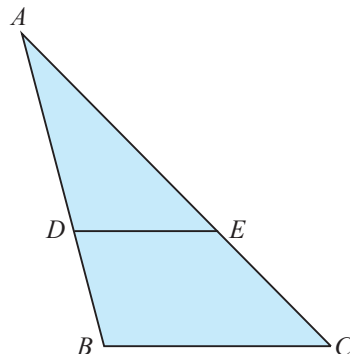
反過來說， $\triangle ABC$ 中， D 、 F 兩點分別在 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 上，若 $\overline{AD} : \overline{AB} = \overline{DF} : \overline{BC}$ ，則 $\overline{DF}$ 與 $\overline{BC}$ 是否一定會平行呢？我們以下面的  探索活動 來說明。

探索活動 由比例線段是否可判別平行

1. 如圖， $\triangle ABC$ 中， $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ ，是否可在 $\overline{AC}$ 上找到 F 點（異於 E 點），使得 $\overline{DE} = \overline{DF}$ ？如果可以，請在右圖上標示。

2. 承第 1 題， $\overline{DF} : \overline{BC}$ 是否等於 $\overline{AD} : \overline{AB}$ ？

3. $\overline{DF}$ 與 $\overline{BC}$ 是否一定會平行？

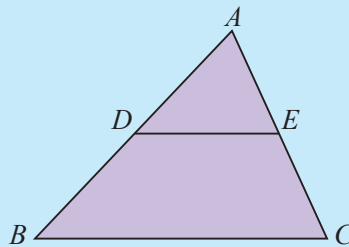


由  探索活動 可知，若 $\overline{DF} : \overline{BC} = \overline{AD} : \overline{AB}$ ，則 $\overline{DF}$ 和 $\overline{BC}$ 不一定會平行。

例7 三角形兩邊中點連線性質

如圖， $\triangle ABC$ 中， D 、 E 分別為 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 的中點，

說明 $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ 且 $\overline{DE} = \frac{1}{2} \overline{BC}$ 。



說明

(1) 在 $\triangle ABC$ 中，

$\because D$ 、 E 分別為 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 的中點，

$$\left. \begin{array}{l} \therefore \overline{AD} : \overline{AB} = 1 : 2 \\ \overline{AE} : \overline{AC} = 1 : 2 \end{array} \right\} \overline{AD} : \overline{AB} = \overline{AE} : \overline{AC}$$

故 $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ 。

(2) $\because \overline{DE} \parallel \overline{BC}$ ，

$$\therefore \overline{DE} : \overline{BC} = \overline{AD} : \overline{AB} = 1 : 2，$$

$$\text{故 } \overline{DE} = \frac{1}{2} \overline{BC}。$$

三角形兩邊中點連線性質

三角形的兩邊中點連線必平行於第三邊，且長度為第三邊長的一半。

隨堂練習

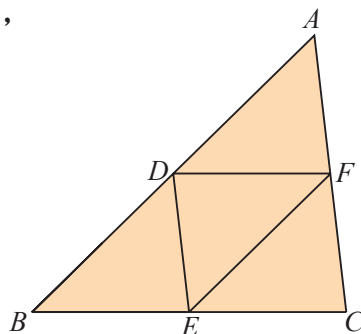
自評 P39 第 5 題

如圖， $\triangle ABC$ 中， D 、 E 、 F 分別為 $\overline{AB}$ 、 $\overline{BC}$ 、 $\overline{AC}$ 的中點，

已知 $\overline{AB} = 10$ 公分， $\overline{BC} = 8$ 公分， $\overline{AC} = 7$ 公分，求：

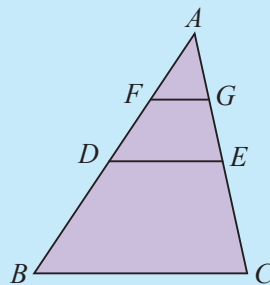
(1) $\triangle DEF$ 的周長。

(2) 四邊形 $DBEF$ 是否為平行四邊形？為什麼？



例8 三角形兩邊中點連線性質的應用

如圖， $\triangle ABC$ 中， D 、 E 分別為 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 的中點， F 、 G 分別為 $\overline{AD}$ 、 $\overline{AE}$ 的中點，若 $\overline{FG}=3$ ，求 $\overline{DE}+\overline{BC}$ 。

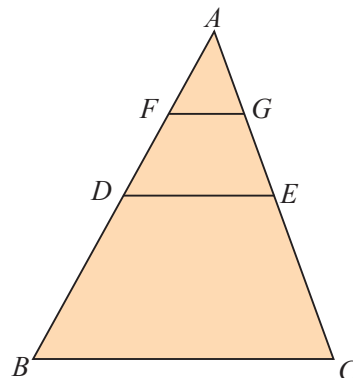


解 在 $\triangle ADE$ 中， F 、 G 分別為 $\overline{AD}$ 、 $\overline{AE}$ 的中點，
 $\therefore \overline{FG} = \frac{1}{2} \overline{DE}$ ， $\overline{DE} = 2 \overline{FG} = 6$ ，
 同理， $\overline{BC} = 2 \overline{DE} = 12$ ，
 故 $\overline{DE} + \overline{BC} = 6 + 12 = 18$ 。



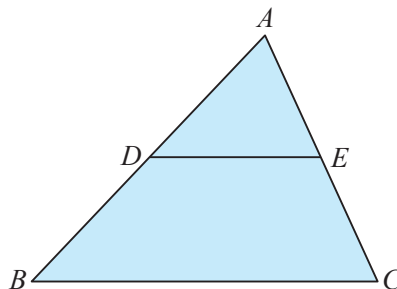
隨堂練習

如圖， $\triangle ABC$ 中， D 、 E 分別為 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 的中點， F 、 G 分別為 $\overline{AD}$ 、 $\overline{AE}$ 的中點，若 $\overline{DE}=20$ ，求 $\overline{FG}+\overline{BC}$ 。



Thinking

如圖， $\triangle ABC$ 中，若 D 為 $\overline{AB}$ 的中點， E 為 $\overline{AC}$ 上的一點，且 $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ ，則 E 是否為 $\overline{AC}$ 的中點？為什麼？



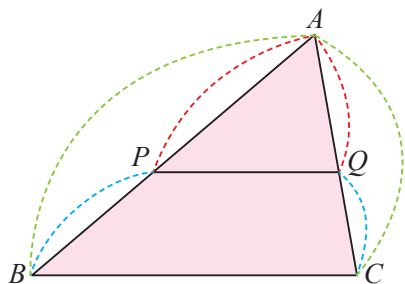
① 等高或同高三角形的面積比

等(同)高三角形的面積比等於其對應底邊長的比。

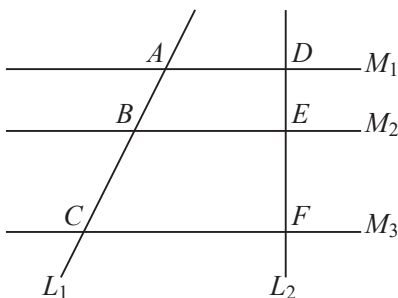
② 平行線截比例線段性質與應用

(1)如圖， $\triangle ABC$ 中， P 、 Q 分別為 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 上的一點，若 $\overline{PQ} \parallel \overline{BC}$ ，則：

- ① $\overline{AP} : \overline{PB} = \overline{AQ} : \overline{QC}$ 。
- ② $\overline{AP} : \overline{AB} = \overline{AQ} : \overline{AC}$ 。
- ③ $\overline{PB} : \overline{AB} = \overline{QC} : \overline{AC}$ 。
- ④ $\overline{PQ} : \overline{BC} = \overline{AP} : \overline{AB} = \overline{AQ} : \overline{AC}$ 。



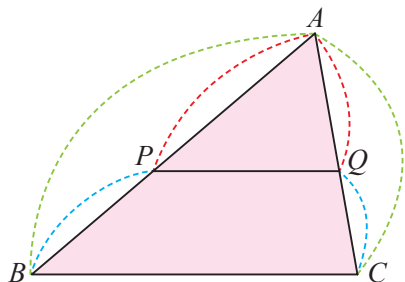
(2)如圖，直線 $M_1 \parallel M_2 \parallel M_3$ ，且分別與截線 L_1 交於 A 、 B 、 C 三點，與截線 L_2 交於 D 、 E 、 F 三點，則 $\overline{AB} : \overline{BC} = \overline{DE} : \overline{EF}$ 。



③ 截線段與平行的判別

$\triangle ABC$ 中， P 、 Q 兩點分別在 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 上，

- (1)若 $\overline{AP} : \overline{PB} = \overline{AQ} : \overline{QC}$ ，則 $\overline{PQ} \parallel \overline{BC}$ 。
- (2)若 $\overline{AP} : \overline{AB} = \overline{AQ} : \overline{AC}$ ，則 $\overline{PQ} \parallel \overline{BC}$ 。
- (3)若 $\overline{PB} : \overline{AB} = \overline{QC} : \overline{AC}$ ，則 $\overline{PQ} \parallel \overline{BC}$ 。



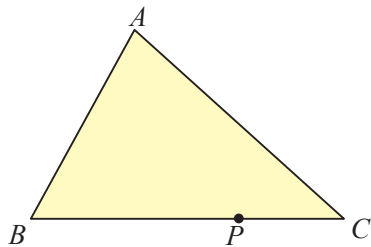
④ 三角形兩邊中點連線性質

三角形的兩邊中點連線必平行於第三邊，且長度為第三邊長的一半。

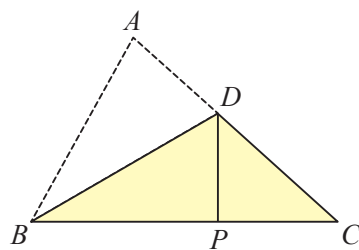
1-2 自我評量

- ①如圖一，有一張三角形 ABC 的紙片， P 在 $\overline{BC}$ 上。
將 A 點摺至 P 點時， $\overline{BD}$ 為摺痕，其中 D 點在 $\overline{AC}$ 上，如圖二。若 $\triangle ABC$ 的面積為 100， $\triangle DBC$ 的面積為 60，求 $\overline{BP} : \overline{PC}$ 。

課 P22 例 1



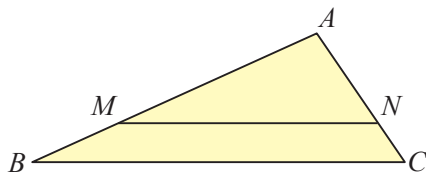
圖一



圖二

- ②如圖， $\triangle ABC$ 中， $\overline{MN} \parallel \overline{BC}$ ，若 $\overline{AM} = 2x + 4$ ，
 $\overline{MB} = x + 1$ ， $\overline{AN} = 7$ ， $\overline{NC} = 3$ ，求 x 的值。

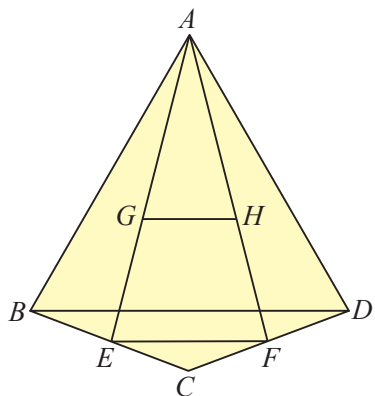
課 P25~26 隨堂



- ③如圖， E 、 F 分別是 $\overline{BC}$ 、 $\overline{CD}$ 的中點，連接 $\overline{AE}$ 、 $\overline{AF}$ 。
若 G 、 H 分別在 $\overline{AE}$ 、 $\overline{AF}$ 上，且 $\overline{AG} : \overline{GE} = 3 : 2$ ，
 $\overline{AH} : \overline{HF} = 3 : 2$ ，回答下列問題：

課 P27、33 隨堂

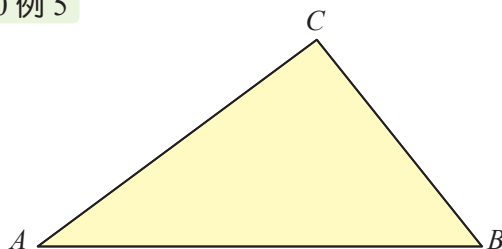
- (1) $\overline{GH}$ 和 $\overline{EF}$ 是否平行？答：_____。
- (2) $\overline{GH} : \overline{EF} =$ _____ : _____。
- (3) $\overline{GH} : \overline{BD} =$ _____ : _____。



④ 如圖，已知 $\triangle ABC$ ，回答下列問題： 課 P30 例 5

(1) 依下面的步驟利用尺規完成作圖：

- ① 過 A 點作一條異於 $\overline{AB}$ 的直線 L 。
- ② 在 L 上依序取 P_1 、 P_2 、 P_3 、 P_4 四點，
使得 $\overline{AP_1} = \overline{P_1P_2} = \overline{P_2P_3} = \overline{P_3P_4}$ 。
- ③ 連接 $\overline{P_4B}$ 。
- ④ 過 P_1 作 $\overline{P_1D} \parallel \overline{P_4B}$ ，交 $\overline{AB}$ 於 D 點。



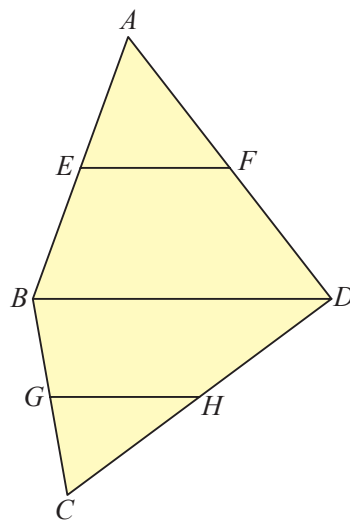
(2) 在(1)的完成圖中，

- ① $\overline{AP_1} : \overline{P_1P_4} = \underline{\hspace{1cm}} : \underline{\hspace{1cm}}$ 。
- ② 為什麼 $\overline{AD} : \overline{BD} = \overline{AP_1} : \overline{P_1P_4}$ ？
- ③ 連接 $\overline{CD}$ ，求 $\triangle ABC$ 與 $\triangle ADC$ 的面積比。

⑤ 如圖，四邊形 $ABCD$ 中， E 、 F 分別為 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AD}$ 中點，
 G 、 H 分別為 $\overline{BC}$ 、 $\overline{CD}$ 中點，若 $\overline{BD} = 8$ ，回答下列問題：

- (1) $\overline{EF} + \overline{GH}$ 。
- (2) 連接 $\overline{EG}$ 、 $\overline{FH}$ ，則四邊形 $EFHG$ 是否為平行四邊形？
為什麼？

課 P35 隨堂

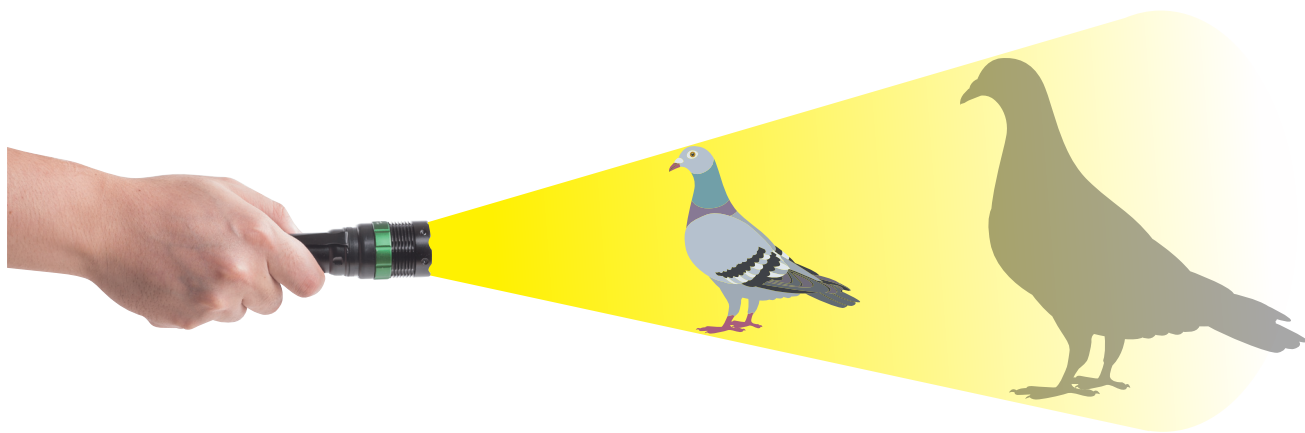


1-3 相似多邊形

1 圖形的縮放 可搭配附件 1 操作

每個物件經放大或縮小後，雖然大小和實物不同，但其形狀是相同的。用手電筒（光源）照射動物圖案，會在牆上看到它的影子，兩者的形狀相同，但大小不同。

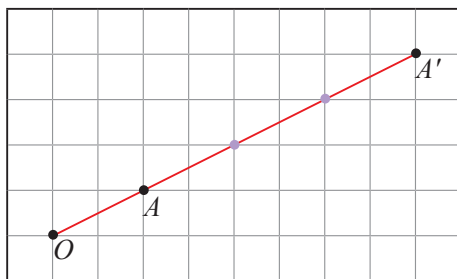
因此，我們可以將手電筒光源視為縮放中心，經過光源直線照射動物圖案的影子，就是此動物圖案的縮放圖形。



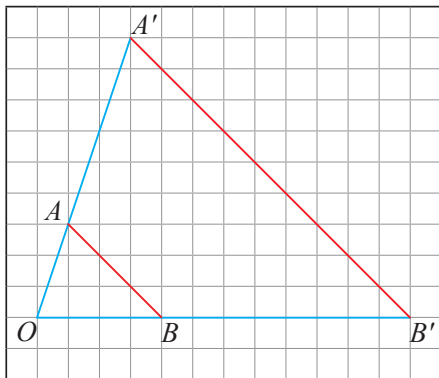
為了說明這個原理，我們先來了解以某固定點為縮放中心，任一點到此固定點距離的縮放關係。

▶ 線段的縮放

在平面上找一點 O ，視為光源固定不動，接著任取一點 A ，如右圖，在 $\overrightarrow{OA}$ 上取一點 A' ，使得 $\overline{OA'} : \overline{OA} = 4 : 1$ ，即 $\overline{OA'}$ 是 $\overline{OA}$ 的 4 倍。此時就稱 A' 點是以 O 點為縮放中心，將 A 點與 O 點的距離縮放 4 倍所得到的對應點。



如圖， $\overline{AB}$ 為一已知線段， A' 、 B' 兩點是以 O 點為縮放中心，將 A 、 B 兩點與 O 點的距離分別縮放 3 倍所得到的對應點，並連接 $\overline{A'B'}$ ，那麼 $\overline{A'B'}$ 和 $\overline{AB}$ 有什麼關係？我們先說明 $\overline{A'B'} \parallel \overline{AB}$ 且 $\overline{A'B'}$ 是 $\overline{AB}$ 的 3 倍。



說明

$\because \overline{OA} : \overline{OA'} = \overline{OB} : \overline{OB'} = 1 : 3$ ， $\therefore \overline{AB} \parallel \overline{A'B'}$ （截線段與平行的判別）。

故 $\overline{AB} : \overline{A'B'} = \overline{OA} : \overline{OA'} = 1 : 3$ （平行線截比例線段性質），因此 $\overline{A'B'}$ 是 $\overline{AB}$ 的 3 倍。

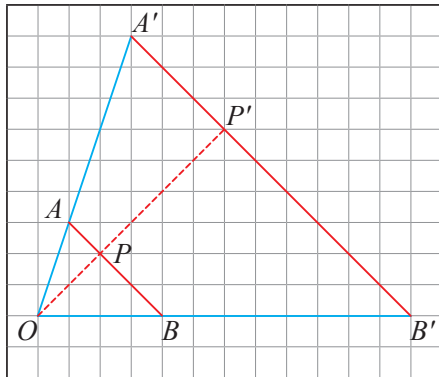
線段的縮放，就是以某固定點（ O 點）為縮放中心，將線段上的每一個點與縮放中心 O 點的距離縮放 r 倍後的結果。接下來，我們將探討 $\overline{AB}$ 每一點與 O 點的距離，縮放 3 倍的圖形與 $\overline{A'B'}$ 的關係。

探索活動 線段的縮放

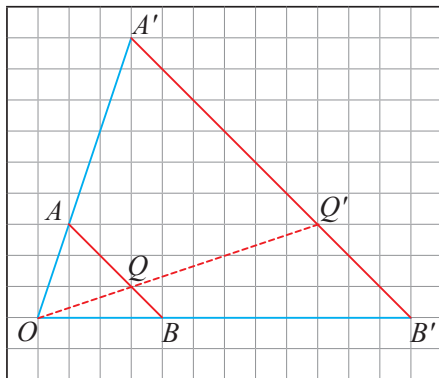
- 如圖，若 P 為 $\overline{AB}$ 上的任一點，且 P' 點是以 O 點為縮放中心，將 P 點與 O 點的距離縮放 3 倍所得的對應點，則：

(1) $\overline{OP'}$ 的長度是否為 $\overline{OP}$ 的 3 倍？

(2) 以 O 為縮放中心，將 $\overline{AB}$ 上的每一點與 O 點的距離縮放 3 倍後得到的點會在 $\overline{A'B'}$ 上嗎？



- 如圖，若 Q' 為 $\overline{A'B'}$ 上的任一點，連接 $\overline{OQ'}$ 與 $\overline{AB}$ 交於一點 Q ，若以 O 點為縮放中心，將 Q 點與 O 點的距離縮放 3 倍所得的對應點是 Q' 嗎？

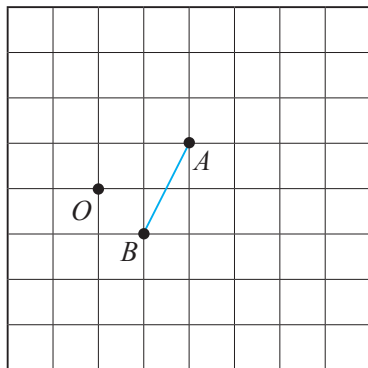


由前頁的  探索活動 可知，以 O 點為縮放中心，將 $\overline{AB}$ 上的點與 O 點的距離縮放 3 倍後的點都會在 $\overline{A'B'}$ 上，且在 $\overline{A'B'}$ 上的任一點 Q' ，都可以在 $\overline{AB}$ 上找到一點 Q ，使得 Q 點與 O 點的距離縮放 3 倍後的點是 Q' 。此時 $\overline{AB}$ 縮放 3 倍後的圖形就是 $\overline{A'B'}$ ，其中 $\overline{A'B'} = 3 \overline{AB}$ 且 $\overline{A'B'} \parallel \overline{AB}$ ，我們稱 $\overline{A'B'}$ 為 $\overline{AB}$ 的 3 倍縮放圖形。

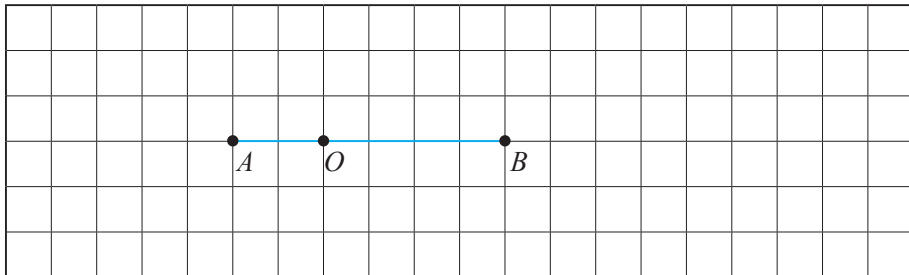


隨堂練習

1. 如圖， O 點不在 $\overline{AB}$ 上，畫出以 O 點為縮放中心，將 $\overline{AB}$ 縮放 2 倍後的圖形。



2. 如圖， O 點在 $\overline{AB}$ 上，畫出以 O 點為縮放中心，將 $\overline{AB}$ 縮放 3 倍後的圖形。



縮放的性質

1. 一線段經過縮放後仍是線段，且該線段與原線段平行，或在同一直線上。
2. 線段縮放 k 倍後，縮放後的線段長為原線段長的 k 倍。

同理，一射線經過縮放後的圖形仍是射線，且該射線與原射線平行或在同一直線上；一直線經過縮放後的圖形仍是直線，且該直線與原直線平行或兩直線重合。



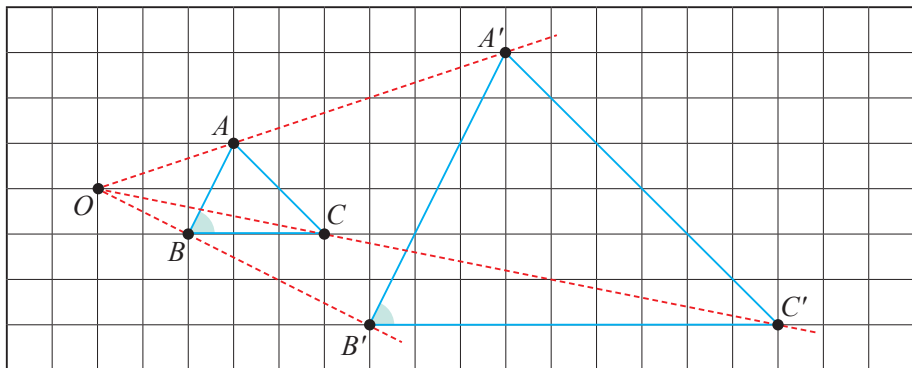
多邊形的縮放

一個多邊形經過縮放後，其內角的度數與邊長會有什麼變化呢？我們先以三角形為例進行探索。



探索活動 三角形的縮放

如圖，已知 $\triangle ABC$ 及外部一點 O ，以 O 點為縮放中心，分別將 $\overline{AB}$ 、 $\overline{BC}$ 、 $\overline{CA}$ 縮放3倍後，得到 $\triangle A'B'C'$ ，則稱 $\triangle A'B'C'$ 是 $\triangle ABC$ 的3倍縮放圖形。



(1) $\angle OBA$ 與 $\angle OB'A'$
是否相等？為什麼？

(2) $\angle OBC$ 與 $\angle OB'C'$
是否相等？為什麼？

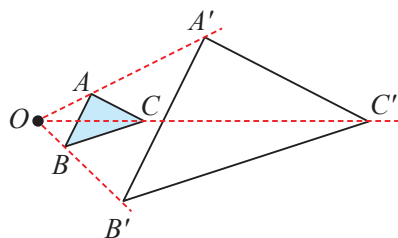
(3) $\angle ABC$ 與 $\angle A'B'C'$
是否相等？為什麼？

由 探索活動 可知，將一個 $\triangle ABC$ 的圖形縮放3倍後得到 $\triangle A'B'C'$ ，則 $\angle BAC = \angle B'A'C'$ 、 $\angle ABC = \angle A'B'C'$ 、 $\angle ACB = \angle A'C'B'$ 。即三內角經過縮放後，其角度皆不變，且其三邊長都放大3倍，所以對應邊成比例。

當三角形的縮放中心在不同位置，縮放相同倍率後，所得到的三角形是否會全等？我們以下面的例子來說明：

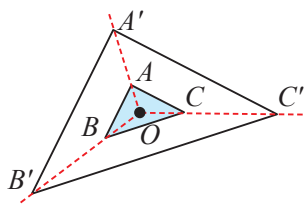
自評 P59 第 1 題

如圖一，縮放中心 O 點在三角形的外部，將 $\triangle ABC$ 縮放 3 倍後，所得的新三角形為 $\triangle A'B'C'$ 。取出附件 3，而附件 3 中的 $\triangle A'B'C'$ 為圖一的 $\triangle A'B'C'$ 。接下來，我們利用附件進行下列活動：

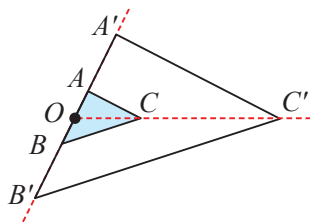


圖一 O 點在三角形外部

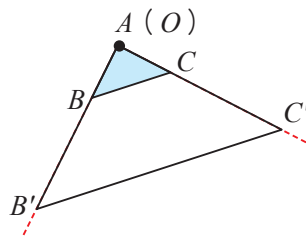
若將縮放中心 O 點改在其它的位置，把同一個 $\triangle ABC$ 縮放 3 倍後，所得的新三角形如圖二、圖三、圖四。接著將附件 3，依序與這三個新三角形疊合，可發現它們都與附件 3 的 $\triangle A'B'C'$ 全等。



圖二 O 點在三角形內部



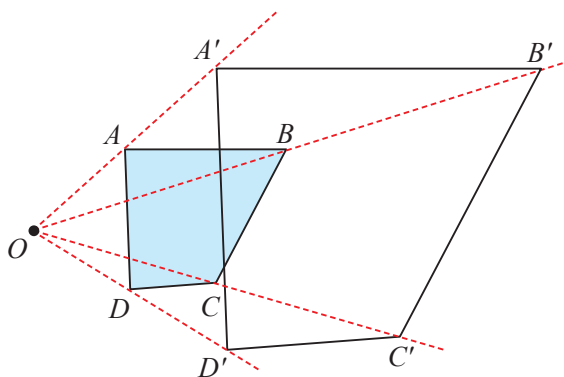
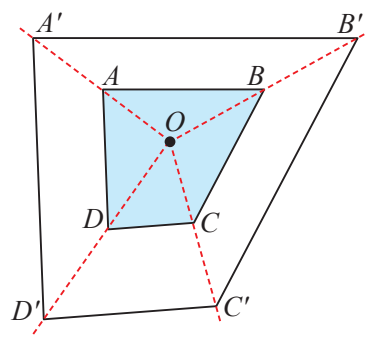
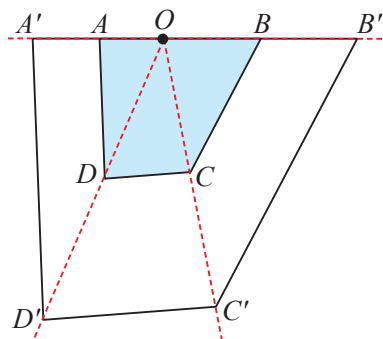
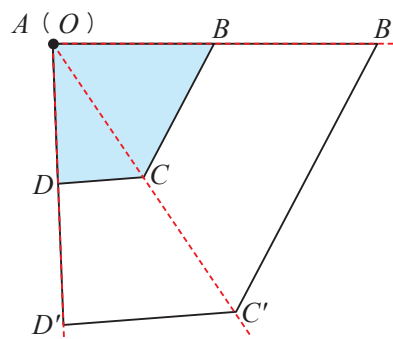
圖三 O 點在三角形邊上



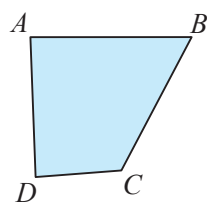
圖四 O 點在三角形的頂點

由前面的說明可知，縮放中心 O 點在不同的位置，將同一個 $\triangle ABC$ 縮放 3 倍後，所得的新三角形都會全等，它們與 $\triangle ABC$ 的對應角皆不變、對應邊成比例。

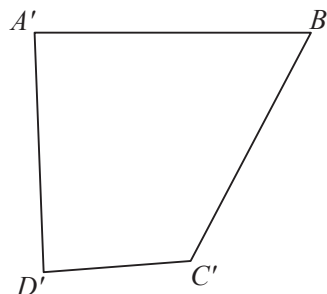
同樣的，縮放中心 O 點在不同的位置，將同一個四邊形縮放 2 倍後，所得的新四邊形也都會全等，且與原四邊形的對應角皆相等、對應邊成比例。

圖一 O 點在四邊形的外部圖二 O 點在四邊形的內部圖三 O 點在四邊形的邊上圖四 O 點在四邊形的頂點

四邊形 $ABCD$ 與四邊形 $A'B'C'D'$ 的對應關係：



縮放 r 倍

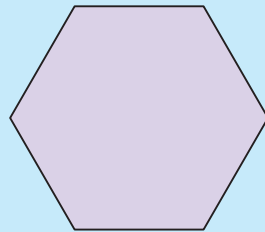


對應頂點	$A \leftrightarrow A'、B \leftrightarrow B'、C \leftrightarrow C'、D \leftrightarrow D'$
對應角相等	$\angle A = \angle A'、\angle B = \angle B'、\angle C = \angle C'、\angle D = \angle D'$
對應邊成比例	$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{C'D'}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{D'A'}}{\overline{DA}} = r$ 或 $\overline{A'B'} : \overline{B'C'} : \overline{C'D'} : \overline{D'A'} = \overline{AB} : \overline{BC} : \overline{CD} : \overline{DA}$

事實上，縮放中心所在位置不同，對同一個多邊形做 r 倍縮放，所得的圖形都會全等，則此縮放後的新圖形，稱為原多邊形的 r 倍縮放圖，它們會與原多邊形的對應角相等、對應邊成比例。

例1 多邊形的縮放

右圖是邊長為 2 公分的正六邊形，將它縮放 3 倍後所得的縮放圖形，其內角度數與邊長分別是多少？

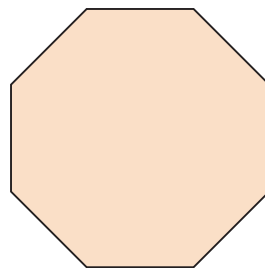


解 正六邊形的每一個內角是 120° ，
 $\therefore$ 縮放後的多邊形，
 會與原多邊形的對應角相等、對應邊成比例，
 $\therefore$ 內角度數保持不變，仍是 120° ，
 邊長變成原來的 3 倍，即 $2 \times 3 = 6$ (公分)。

正 n 邊形的每一個內角是 $\frac{(n-2) \times 180^\circ}{n}$ 。

隨堂練習

右圖是邊長為 1.5 公分的正八邊形，將它縮放 2 倍後所得的縮放圖形，其內角度數與邊長分別是多少？



2 相似多邊形

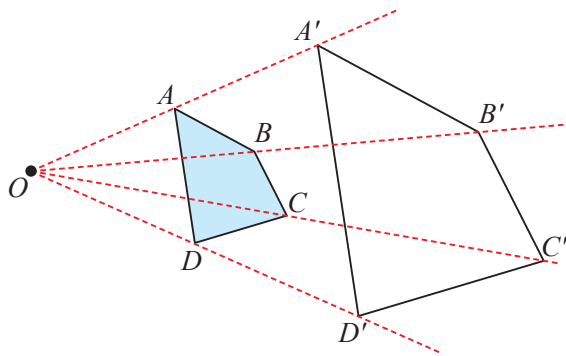


上圖是艾美設計的一組俄羅斯套娃平面圖，它們看起來相似。

兩個邊數一樣的多邊形，若其對應角相等、對應邊成比例，就稱這兩個多邊形相似。通常以符號「 $\sim$ 」表示它們的相似關係，讀作「相似於」。

如圖，四邊形 $A'B'C'D'$ 是四邊形 $ABCD$ 的縮放圖形，所以對應角相等、對應邊成比例，因此四邊形 $ABCD \sim$ 四邊形 $A'B'C'D'$ 。

也就是說，兩個多邊形相似，它們的對應角相等、對應邊成比例。



例如：四邊形 $ABCD \sim$ 四邊形 $A'B'C'D'$ ，

所以 $\angle A = \angle A'$ 、 $\angle B = \angle B'$ 、 $\angle C = \angle C'$ 、 $\angle D = \angle D'$ （對應角相等），

且 $\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'D'}{CD} = \frac{D'A'}{DA}$ （對應邊成比例）。

相似多邊形

1. 如果兩個多邊形的對應角相等、對應邊成比例，就稱這兩個多邊形相似。
2. 如果兩個多邊形相似，它們的對應角相等、對應邊成比例。

一般而言，「四邊形 $ABCD \sim$ 四邊形 $A'B'C'D'$ 」只表示此兩圖形相似，不一定表示各頂點依序對應。在本教材中各頂點皆依序對應，例如：「四邊形 $ABCD \sim$ 四邊形 $A'B'C'D'$ 」表示 A 對應到 A' ， B 對應到 B' ， C 對應到 C' ， D 對應到 D' 。

例2 相似多邊形的對應關係

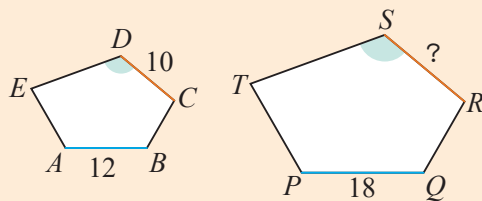
自評 P59 第 2 題

已知五邊形 $ABCDE \sim$ 五邊形 $PQRST$ ， A 、 B 、 C 、 D 、 E 的對應頂點依序為 P 、 Q 、 R 、 S 、 T ，回答下列問題：

- (1) 若 $\overline{AB} = 12$ ， $\overline{CD} = 10$ ， $\overline{PQ} = 18$ ，求 $\overline{RS}$ 的長。
- (2) 若 $\angle P + \angle Q = 240^\circ$ ， $\angle R : \angle S : \angle T = 5 : 6 : 4$ ，求 $\angle D$ 。

思路分析

五邊形 $ABCDE \sim$ 五邊形 $PQRST$ ， $\overline{AB}$ 的對應邊是 $\overline{PQ}$ ； $\overline{CD}$ 的對應邊是 $\overline{RS}$ ，利用相似多邊形對應邊成比例、對應角相等的性質來做此題。



解

- (1) $\because$ 相似形的對應邊成比例，

$$\therefore \overline{AB} : \overline{PQ} = \overline{CD} : \overline{RS}$$

$$12 : 18 = 10 : \overline{RS}$$

$$\overline{RS} = 15。$$

- (2) 設 $\angle R = 5r^\circ$ ， $\angle S = 6r^\circ$ ， $\angle T = 4r^\circ$ ， $r \neq 0$ ，

$$\therefore \angle P + \angle Q + \angle R + \angle S + \angle T = 540^\circ$$

$$\therefore 240 + 5r + 6r + 4r = 540, r = 20$$

又相似形的對應角相等，

$$\text{故 } \angle D = \angle S = 6 \times 20^\circ = 120^\circ。$$



隨堂練習

已知四邊形 $ABCD \sim$ 四邊形 $PQRS$ ， A 、 B 、 C 、 D 的對應頂點依序為 P 、 Q 、 R 、 S ，若 $\angle Q = 76^\circ$ ， $\angle R = 64^\circ$ ， $\angle S = 100^\circ$ ， $\overline{AB} = 12$ ， $\overline{BC} = 15$ ， $\overline{PQ} = 8$ ，求 $\angle A$ 及 $\overline{QR}$ 。

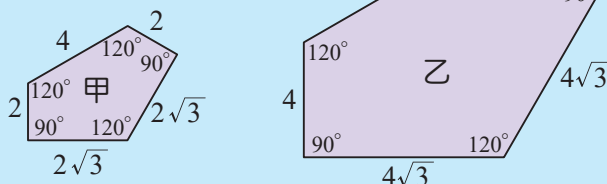
我們可利用「對應角相等」與「對應邊成比例」判別兩個多邊形是否相似。

例3 相似多邊形的判別

自評 P60 第 3 題

如圖，甲、乙都是五邊形，回答下列問題，並說明理由。

- (1) 甲與乙的對應角是否相等？
- (2) 甲與乙的對應邊是否成比例？
- (3) 甲與乙是否相似？



解

(1) 是。

∵ 對應角分別相等。

(2) 是。

∵ 對應邊長比是 1 : 2。

(3) 是。

∵ 對應角相等、對應邊成比例，

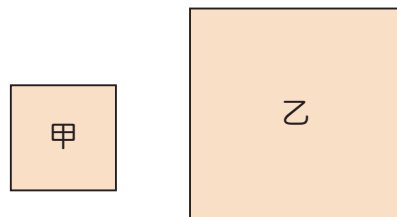
∴ 甲與乙相似。



隨堂練習

如圖，甲是邊長為 1 的正方形，乙是邊長為 2 的正方形，回答下列問題：

- (1) 甲與乙的對應角是否相等？
- (2) 甲與乙的對應邊是否成比例？
- (3) 甲與乙是否相似？



兩個多邊形的「對應角相等」與「對應邊成比例」如果只有一個條件成立，則這兩個多邊形是否一定相似？

例4 相似多邊形的判別

自評 P60 第 3 題

回答下列問題，並說明理由。

(1)兩個任意的長方形是否相似？ (2)兩個任意的菱形是否相似？

說明

(1)兩個長方形不一定相似。

∵長方形的四組對應角雖然相等（皆為 90° ），

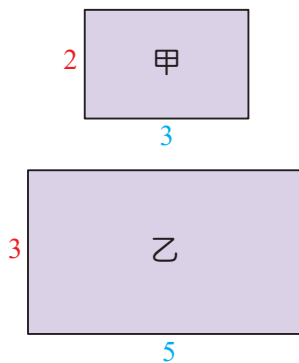
但對應邊長不一定成比例。

例如：右圖中，甲、乙兩個長方形對應邊長的

比分別為 $3:5$ 與 $2:3$ ，

∵ $3:5 \neq 2:3$ ，← 要比較 $3:5$ （較長邊之比）和 $2:3$ （較短邊之比）是否相等。

∴甲、乙兩個長方形不相似。

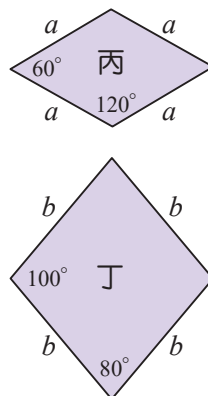


(2)兩個菱形不一定相似。

∵兩個菱形的對應邊雖然成比例，但對應角不一定相等。

例如：右圖中， 60° 和 120° 皆無法找到對應相等的角，

∴此兩個菱形不相似。



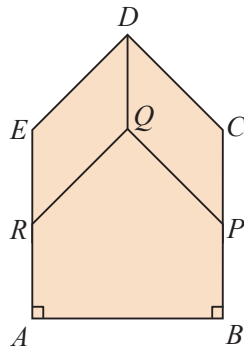
隨堂練習

如圖， $ABCDE$ 為五邊形， $\angle A = \angle B = 90^\circ$ ， $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AE}$ ，四邊形 $DERQ$ 與四邊形 $DCPQ$ 皆為平行四邊形， P 、 R 分別是 $\overline{BC}$ 、 $\overline{AE}$ 的中點，回答下列問題：

(1)五邊形 $ABCDE$ 與五邊形 $ABPQR$ 的對應角是否相等？

(2)五邊形 $ABCDE$ 與五邊形 $ABPQR$ 的對應邊是否成比例？

(3)五邊形 $ABCDE$ 與五邊形 $ABPQR$ 是否相似？



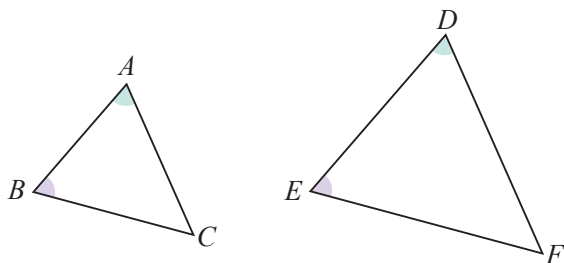
從前面的例題與 隨堂練習 可知，當兩個多邊形的「對應角相等」與「對應邊成比例」條件缺一時，則這兩個多邊形不一定相似。

3 三角形的相似性質

兩個多邊形必須對應邊成比例與對應角相等，這兩個多邊形才會相似。至於兩個三角形的相似，是否這些條件也必須都符合才相似呢？我們曾經學過三角形的全等性質有 SSS 、 SAS 、 ASA 、 AAS 、 RHS 等，那麼要判別兩個三角形是否相似，也會有類似的性質嗎？接下來，我們來探討三角形的相似性質。

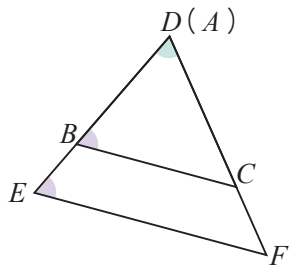
AA 相似性質

如右圖， $\triangle ABC$ 與 $\triangle DEF$ 中，
若 $\angle A = \angle D$ ， $\angle B = \angle E$ ，
則 $\triangle ABC$ 與 $\triangle DEF$ 是否相似？



由於 $\angle A = \angle D$ ，
可將 $\triangle ABC$ 疊合在 $\triangle DEF$ 上，
使得 A 點落在 D 點上，
則 B 、 C 兩點分別在 $\overline{DE}$ 與 $\overline{DF}$ 上。

又 $\angle B = \angle E$ ，所以 $\overline{BC} \parallel \overline{EF}$ ，
可得 $\angle C = \angle F$ ，
且 $\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}}$ 。



由上可知， $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 的對應角相等、對應邊成比例，所以 $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ 。

AA 相似性質

若兩個三角形的兩組對應角相等，則這兩個三角形相似，這個性質稱為 **AA 相似性質**。

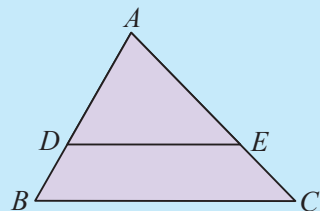
若兩個三角形中，有兩組角對應相等，則這兩個三角形的第三組角也會對應相等，所以 AA 相似性質也可以稱為 **AAA 相似性質**。

例5 平行線與相似三角形

如圖， $\triangle ABC$ 中， D 、 E 兩點分別在 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 上，
已知 $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ ， $\overline{AD}=6$ ， $\overline{BD}=3$ ， $\overline{DE}=8$ 。

(1) 說明 $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ 。

(2) 求 $\overline{BC}$ 。



解

(1) 在 $\triangle ADE$ 與 $\triangle ABC$ 中，

$\because \overline{DE} \parallel \overline{BC}$ ， $\therefore \angle ADE = \angle B$ (同位角相等)，

又 $\angle A = \angle A$ (公用角)，

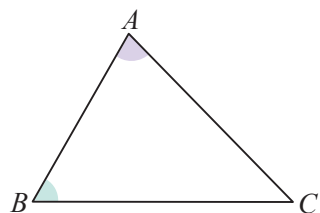
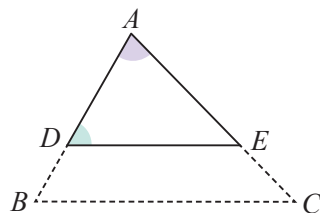
$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC$ (AA 相似性質)。

(2) $\because \triangle ADE \sim \triangle ABC$

$\therefore \overline{DE} : \overline{BC} = \overline{AD} : \overline{AB}$

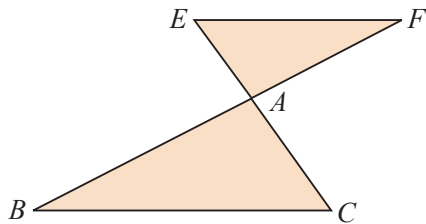
$8 : \overline{BC} = 6 : (6 + 3)$

$\overline{BC} = 12$



隨堂練習

如圖， $\overline{EF} \parallel \overline{BC}$ ， $\overline{EC}$ 與 $\overline{BF}$ 交於 A 點， $\overline{EF}=18$ ，
 $\overline{BC}=27$ ， $\overline{AE}=8$ ，求 $\overline{AC}$ 。

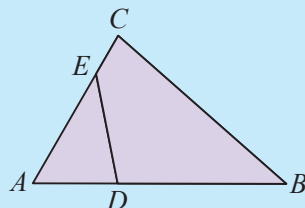


例6 AA 相似性質

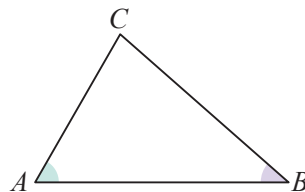
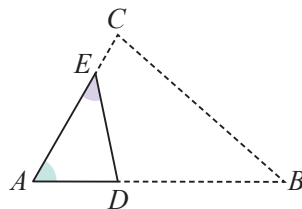
可搭配附件 5 操作

自評 P60 第 4 題

如圖， $\triangle ABC$ 中， D 、 E 兩點分別在 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 上，
已知 $\angle AED = \angle B$ ， $\overline{AD} = 10$ ， $\overline{BD} = 20$ ， $\overline{AE} = 15$ ，
求 $\overline{EC}$ 。



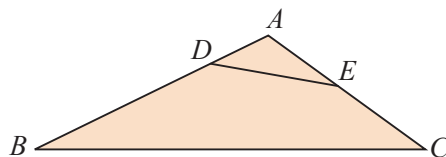
解 在 $\triangle ADE$ 與 $\triangle ACB$ 中，
 $\because \angle AED = \angle B$ (已知)，
 $\angle A = \angle A$ (公用角)，
 $\therefore \triangle ADE \sim \triangle ACB$ (AA 相似性質)，
 因此 $\overline{AD} : \overline{AC} = \overline{AE} : \overline{AB}$
 $10 : \overline{AC} = 15 : (10 + 20)$
 $\overline{AC} = 20$
 故 $\overline{EC} = \overline{AC} - \overline{AE} = 20 - 15 = 5$ 。



隨堂練習

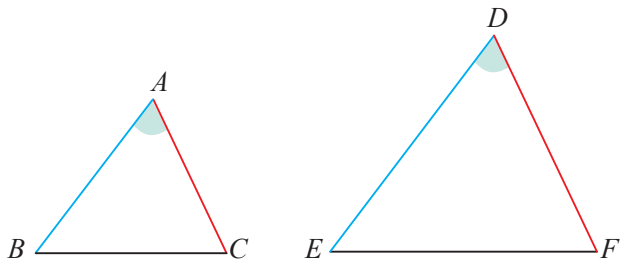
如圖， $\triangle ABC$ 中， D 、 E 兩點分別在 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 上，
已知 $\angle ADE = \angle C$ ， $\overline{AD} = 2$ ， $\overline{AB} = 8$ ， $\overline{AC} = 6$ ，
 $\overline{BC} = 12$ ，求 $\overline{AE}$ 與 $\overline{DE}$ 。

自評 P61 第 5 題



SAS 相似性質

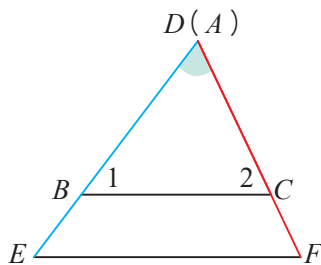
如右圖， $\triangle ABC$ 與 $\triangle DEF$ 中，
若 $\angle A = \angle D$ ， $\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}}$ ，
則 $\triangle ABC$ 與 $\triangle DEF$ 是否相似呢？



由於 $\angle A = \angle D$ ，
可將 $\triangle ABC$ 與 $\triangle DEF$ 疊合，
使得 A 點落在 D 點上，
則 B 、 C 兩點分別在 $\overline{DE}$ 與 $\overline{DF}$ 上。



又 $\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}}$ ，即 $\frac{\overline{DB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{DC}}{\overline{DF}}$ ，
所以 $\overline{BC} \parallel \overline{EF}$ ，
因此 $\angle 1 = \angle E$ 、 $\angle 2 = \angle F$ ，
且 $\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}}$ 。



由上可知， $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 的對應角相等、對應邊成比例，所以 $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ 。

SAS 相似性質

若兩個三角形有一組對應角相等，且夾此等角的兩組對應邊成比例，則這兩個三角形相似，這個性質稱為 **SAS 相似性質**。

例7 SAS 相似性質

可搭配附件 6 操作

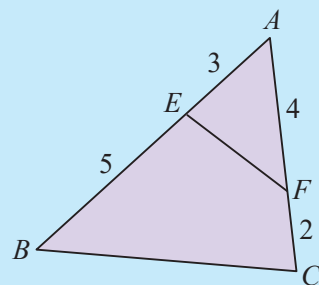
自評 P60 第 4 題

如圖， $\triangle ABC$ 中， $\overline{AE}=3$ ， $\overline{EB}=5$ ， $\overline{AF}=4$ ， $\overline{FC}=2$ ，

回答下列問題：

(1) $\triangle AEF$ 與 $\triangle ACB$ 是否相似？為什麼？

(2) 若 $\overline{EF}=3.3$ ，求 $\overline{BC}$ 。



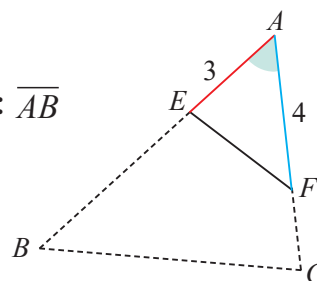
解

(1) 在 $\triangle AEF$ 與 $\triangle ACB$ 中，

$$\left. \begin{aligned} \overline{AE} : \overline{AC} &= 3 : (4+2) = 3 : 6 = 1 : 2 \\ \overline{AF} : \overline{AB} &= 4 : (3+5) = 4 : 8 = 1 : 2 \end{aligned} \right\} \overline{AE} : \overline{AC} = \overline{AF} : \overline{AB}$$

又 $\angle A = \angle A$ ，

$\therefore \triangle AEF \sim \triangle ACB$ (SAS 相似性質)。

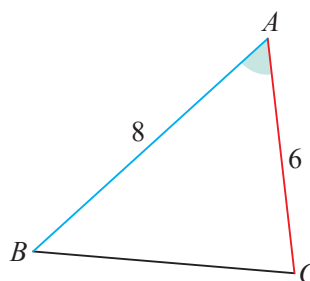


(2) $\because \triangle AEF \sim \triangle ACB$ ，

$$\therefore \overline{EF} : \overline{BC} = \overline{AE} : \overline{AC}$$

$$3.3 : \overline{BC} = 3 : 6$$

$$\overline{BC} = 6.6。$$

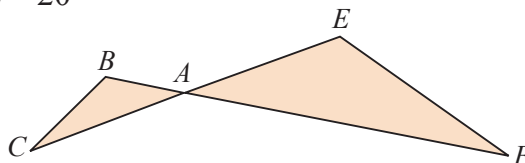


隨堂練習

自評 P61 第 6 題

如圖， $\overline{EC}$ 與 $\overline{BF}$ 交於 A 點， $\overline{AB}=10$ ， $\overline{AC}=\overline{AE}=20$ ，

$\overline{AF}=40$ ， $\overline{EF}=25.6$ ，求 $\overline{BC}$ 。



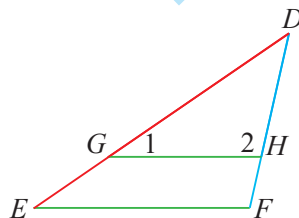
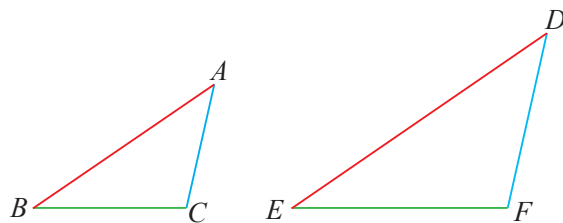
▶ SSS 相似性質

如右圖， $\triangle ABC$ 與 $\triangle DEF$ 中，

$$\overline{DE} > \overline{AB},$$

$$\text{若 } \frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}},$$

則 $\triangle ABC$ 與 $\triangle DEF$ 是否相似？



在 $\overline{DE}$ 上取一點 G ，使得 $\overline{DG} = \overline{AB}$ ；

在 $\overline{DF}$ 上取一點 H ，使得 $\overline{DH} = \overline{AC}$ 。

因為 $\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}}$ (已知)，

$$\text{所以 } \frac{\overline{DG}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{DH}}{\overline{DF}},$$

因此 $\overline{GH} \parallel \overline{EF}$ 。

由此可得 $\angle 1 = \angle E$ ， $\angle 2 = \angle F$ ，

$$\text{即 } \angle B = \angle 1 = \angle E,$$

$$\angle C = \angle 2 = \angle F。$$

再由三角形內角和均為 180° 可得 $\angle A = \angle D$ 。

由上可知， $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 的對應角相等、
對應邊成比例，所以 $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ 。

因為 $\overline{GH} \parallel \overline{EF}$ ，

$$\text{所以 } \frac{\overline{DG}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{DH}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{GH}}{\overline{EF}},$$

$$\text{又 } \frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} \text{ (已知),}$$

所以 $\overline{GH} = \overline{BC}$ ，

故 $\triangle ABC \cong \triangle DGH$ (SSS 全等性質)，

因此 $\angle B = \angle 1$ ， $\angle C = \angle 2$ 。

📌 SSS 相似性質

若兩個三角形的三組對應邊成比例，則這兩個三角形相似，這個性質稱為 **SSS 相似性質**。

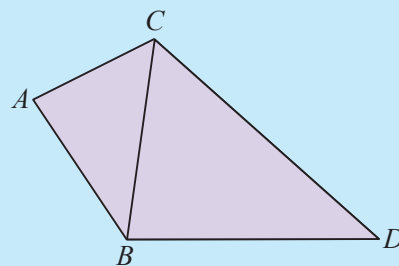
例8 SSS 相似性質

可搭配附件 7 操作

自評 P60 第 4 題

如圖， $\overline{AB}=10$ ， $\overline{AC}=8$ ， $\overline{BC}=12$ ， $\overline{BD}=15$ ， $\overline{CD}=18$ ，回答下列問題：

- (1) 為什麼 $\triangle ABC \sim \triangle BDC$ ？
- (2) $\angle D$ 與 $\triangle ABC$ 的哪個角相等？



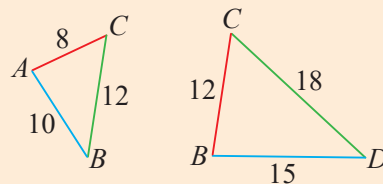
思路分析

可以分別從兩個三角形邊長的大小關係找到對應邊。

將 $\triangle ABC$ 與 $\triangle BDC$ 的三邊長分別由小到大排列，

$\triangle ABC$ 的邊長分別為 $\overline{AC}=8$ ， $\overline{AB}=10$ ， $\overline{BC}=12$ ，

$\triangle BDC$ 的邊長分別為 $\overline{BC}=12$ ， $\overline{BD}=15$ ， $\overline{CD}=18$ 。



解

- (1) 在 $\triangle ABC$ 與 $\triangle BDC$ 中，

$$\left. \begin{aligned} \because \overline{AC} : \overline{BC} &= 8 : 12 = 2 : 3 \\ \overline{AB} : \overline{BD} &= 10 : 15 = 2 : 3 \\ \overline{BC} : \overline{CD} &= 12 : 18 = 2 : 3 \end{aligned} \right\} \overline{AC} : \overline{BC} = \overline{AB} : \overline{BD} = \overline{BC} : \overline{CD}$$

$\therefore \triangle ABC \sim \triangle BDC$ (SSS 相似性質)。

- (2) $\because \triangle BDC \sim \triangle ABC$ ，

$\therefore \angle D = \angle ABC$ 。



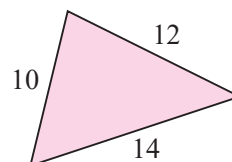
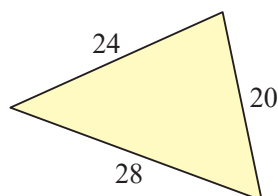
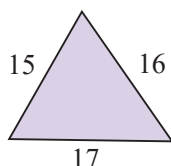
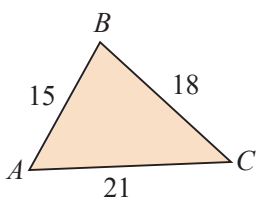
隨堂練習

下列哪些三角形與 $\triangle ABC$ 相似，在 $\square$ 中打「 $\checkmark$ 」。

(1) $\square$

(2) $\square$

(3) $\square$



重點回顧

1 縮放的性質

- (1) 線段縮放 k 倍後，縮放後的線段長為原線段長的 k 倍。
- (2) 任意一個多邊形經過縮放 r 倍後的新多邊形，其對應角的角度不變，對應的邊長變成原來的 r 倍。

2 相似多邊形

- (1) 如果兩個多邊形的對應角相等、對應邊成比例，就稱這兩個多邊形相似。

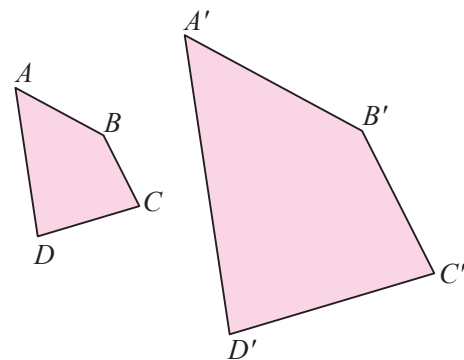
例 如圖，四邊形 $ABCD$ 和四邊形 $A'B'C'D'$ ，

$$\angle A' = \angle A, \angle B' = \angle B,$$

$$\angle C' = \angle C, \angle D' = \angle D \text{ (對應角相等),}$$

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{C'D'}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{D'A'}}{\overline{DA}} \text{ (對應邊成比例),}$$

就稱四邊形 $ABCD \sim$ 四邊形 $A'B'C'D'$ 。

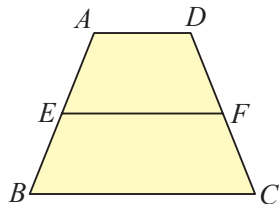


- (2) 若兩個多邊形相似，則其對應角相等，
對應邊成比例。

3 三角形的相似性質

AA 相似性質	SAS 相似性質	SSS 相似性質
$\angle A = \angle D, \angle B = \angle E$	$\angle A = \angle D, \frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}}$	$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}}$

- ③如圖，四邊形 $ABCD$ 為等腰梯形， $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ，
 E 、 F 分別為 $\overline{AB}$ 、 $\overline{DC}$ 的中點，已知 $\overline{AD}=3$ ，
 $\overline{BC}=7$ ，回答下列問題： 課 P49、50 例 3、4



(1) 四邊形 $AEFD$ 與四邊形 $EBCF$ ：

① 對應角是否相等？ ☐ 是 ☐ 否

② 對應邊是否成比例 ☐ 是 ☐ 否

③ 兩圖形是否相似？ ☐ 是 ☐ 否

(2) 四邊形 $AEFD$ 與四邊形 $ABCD$ ：

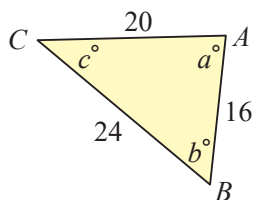
① 對應角是否相等？ ☐ 是 ☐ 否

② 對應邊是否成比例？ ☐ 是 ☐ 否

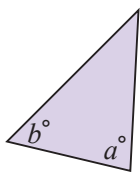
③ 兩圖形是否相似？ ☐ 是 ☐ 否

- ④ 下列哪些三角形與 $\triangle ABC$ 相似，在 ☐ 中打「 $\checkmark$ 」，並寫出所用的相似性質：

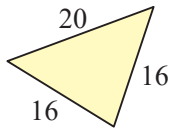
課 P53、55、57 例 6~8



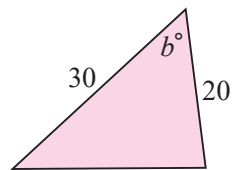
(1) ☐ _____ 相似性質



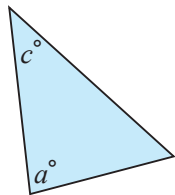
(2) ☐ _____ 相似性質



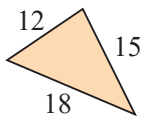
(3) ☐ _____ 相似性質



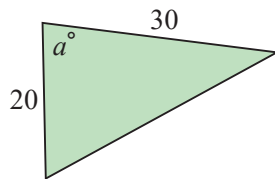
(4) ☐ _____ 相似性質



(5) ☐ _____ 相似性質



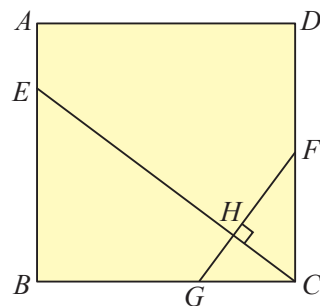
(6) ☐ _____ 相似性質



- ⑤ 如圖，四邊形 $ABCD$ 是邊長為 8 的正方形， E 、 F 分別在 $\overline{AB}$ 、 $\overline{CD}$ 上， $\overline{AE}=2$ ，且 F 是 $\overline{CD}$ 的中點，自 F 點作直線垂直 $\overline{EC}$ 且分別交 $\overline{EC}$ 、 $\overline{BC}$ 於 H 、 G ，回答下列問題：

課 P53 隨堂

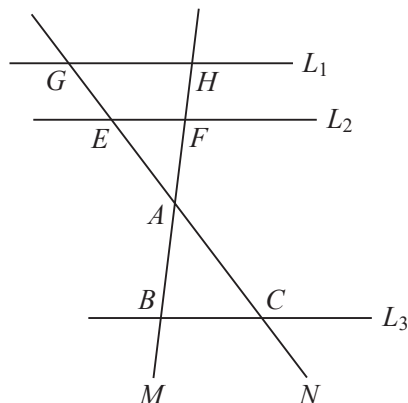
- (1) $\triangle EBC$ 與 $\triangle GCF$ 是否相似？為什麼？ (2) 求 $\overline{BG}$ 。



- ⑥ 如圖， L_1 、 L_2 、 L_3 皆為直線， $L_1 \parallel L_2 \parallel L_3$ ，直線 M 、 N 交於 A 點， $\overline{GE}=2$ ， $\overline{EA}=3$ ， $\overline{AC}=4$ ， $\overline{HA}=4$ ，求：

課 P55 隨堂

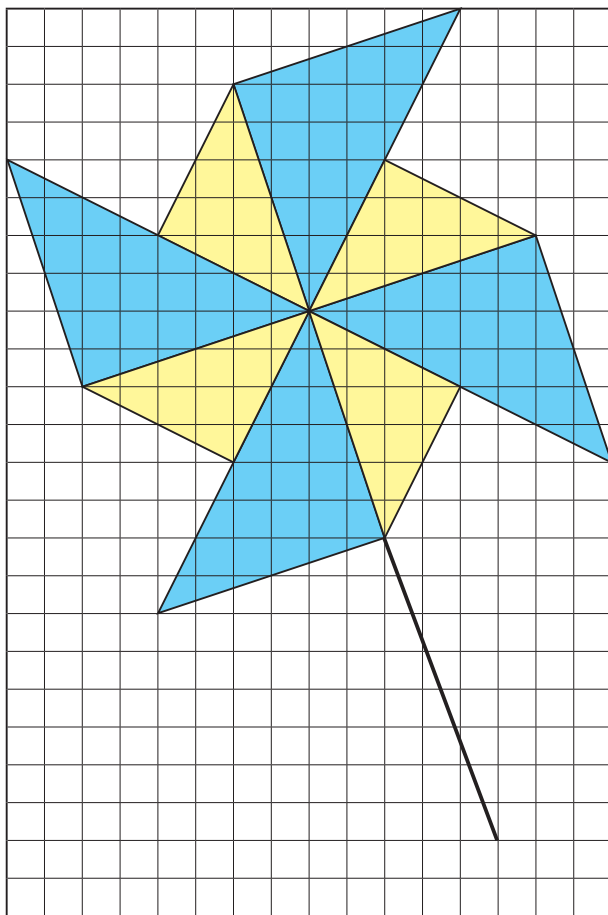
- (1) $\overline{FA}$ 。 (2) 若 $\overline{EF}=2.1$ ，求 $\overline{BC}$ 。



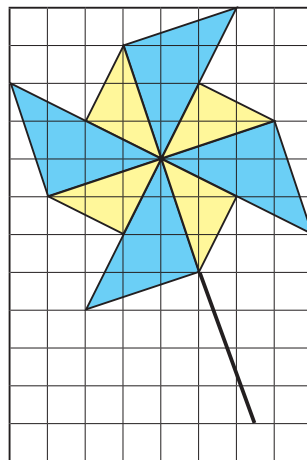
1-4 相似三角形的應用與三角比

1 相似三角形的比例關係

安琪利用暑假設計兩個相似但大小不同的風車圖案，這兩個風車分別使用 4 個大的和 4 個小的等腰直角三角形拼湊完成，此兩圖中同顏色三角形的對應邊長比是 $2:1$ 。



圖一



圖二

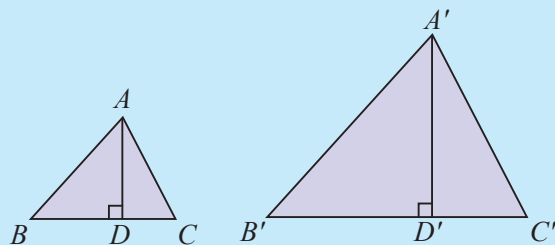
Thinking

圖一中黃色三角形面積與圖二黃色三角形面積的比是多少？

接下來將探討兩個相似三角形面積比與其對應邊長比的關係。

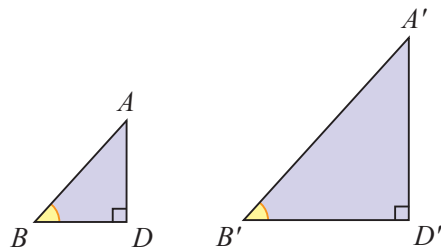
例1 相似三角形對應高的比＝對應邊長的比

如圖， $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ ， A 、 B 、 C 的對應點分別是 A' 、 B' 、 C' ， $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ 於 D 點， $\overline{A'D'} \perp \overline{B'C'}$ 於 D' 點，說明 $\overline{AD} : \overline{A'D'} = \overline{AB} : \overline{A'B'}$ 。



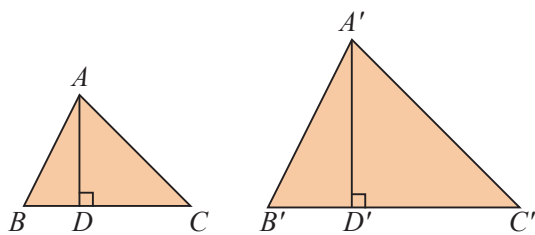
說明

$\angle B = \angle B'$ ($\because \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$)
 $\angle ADB = \angle A'D'B' = 90^\circ$
 ($\because \overline{AD} \perp \overline{BC}$ 且 $\overline{A'D'} \perp \overline{B'C'}$)，
 $\therefore \triangle ABD \sim \triangle A'B'D'$ (AA 相似性質)，
 故 $\overline{AD} : \overline{A'D'} = \overline{AB} : \overline{A'B'}$ 。



隨堂練習

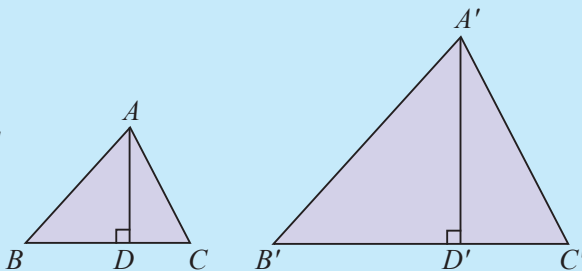
如圖， $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ ， A 、 B 、 C 的對應點分別是 A' 、 B' 、 C' ， $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ 於 D 點， $\overline{A'D'} \perp \overline{B'C'}$ 於 D' 點，若 $\overline{BC} = 6$ ， $\overline{B'C'} = 9$ ， $\overline{AD} = 4$ ，求 $\overline{A'D'}$ 。



例2 相似三角形面積的比＝對應邊長的平方比

自評 P79 第 1 題

如圖， $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ ， A 、 B 、 C 的對應點分別是 A' 、 B' 、 C' ， $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ 於 D 點， $\overline{A'D'} \perp \overline{B'C'}$ 於 D' 點，說明 $\triangle ABC$ 面積： $\triangle A'B'C'$ 面積 $= \overline{BC}^2 : \overline{B'C'}^2$ 。



說明

$\because \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ ，

$\therefore \overline{AD} : \overline{A'D'} = \overline{BC} : \overline{B'C'}$ 。← 對應高的比＝對應邊長的比

$$\text{因此 } \frac{\triangle ABC \text{ 面積}}{\triangle A'B'C' \text{ 面積}} = \frac{\frac{1}{2} \times \overline{BC} \times \overline{AD}}{\frac{1}{2} \times \overline{B'C'} \times \overline{A'D'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} \times \frac{\overline{AD}}{\overline{A'D'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} \times \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{BC}^2}{\overline{B'C'}^2}$$

$\therefore \triangle ABC \text{ 面積} : \triangle A'B'C' \text{ 面積} = \overline{BC}^2 : \overline{B'C'}^2$ 。

同理，若 $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ ，則 $\triangle ABC$ 面積： $\triangle A'B'C'$ 面積 $= \overline{AB}^2 : \overline{A'B'}^2 = \overline{AC}^2 : \overline{A'C'}^2$ 。

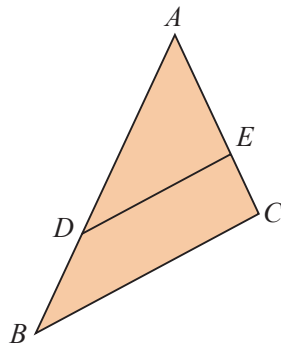
相似三角形的比例關係

兩個相似三角形，有下列關係：

(1) 對應高的比＝對應邊長的比；(2) 面積的比＝對應邊長的平方比。

隨堂練習

如圖， $\triangle ABC$ 中， D 、 E 兩點分別在 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 上， $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ ，若 $\overline{AD}=4$ ， $\overline{BD}=2$ ， $\triangle ADE$ 的面積為 4，求 $\triangle ABC$ 的面積。

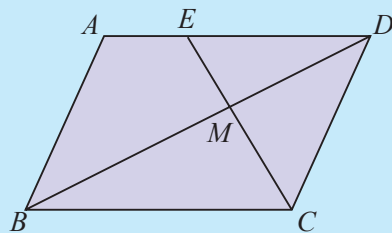


例3 相似三角形面積比的應用

自評 P79 第 2 題

如圖，平行四邊形 $ABCD$ 中， $\overline{AE}:\overline{ED}=1:2$ ，
回答下列問題：

- (1) 說明 $\triangle EMD \sim \triangle CMB$ 。
- (2) 求 $\triangle EMD$ 與 $\triangle CMB$ 的面積比。



說明

- (1) 在 $\triangle EMD$ 與 $\triangle CMB$ 中，

$$\because \angle EDM = \angle CBM (\overline{DE} \parallel \overline{BC}),$$

$$\angle EMD = \angle CMB (\text{對頂角}),$$

$$\therefore \triangle EMD \sim \triangle CMB (\text{AA 相似性質}).$$

- (2) $\because \overline{AE}:\overline{ED}=1:2$

$$\therefore \overline{DE} = \frac{2}{3} \overline{AD} = \frac{2}{3} \overline{BC} (\because ABCD \text{ 是平行四邊形，對邊相等}).$$

$$\text{故 } \overline{DE}:\overline{BC}=2:3.$$

$$\therefore \triangle EMD \text{ 面積}:\triangle CMB \text{ 面積} = \overline{DE}^2:\overline{BC}^2 = 2^2:3^2 = 4:9. \leftarrow \begin{array}{l} \text{相似三角形面積的比} \\ = \text{對應邊長的平方比} \end{array}$$

隨堂練習

如圖，平行四邊形 $ABCD$ 中， E 為 $\overline{CD}$ 中點， $\overrightarrow{AE}$ 與 $\overrightarrow{BC}$ 交於 F 點，回答下列問題：

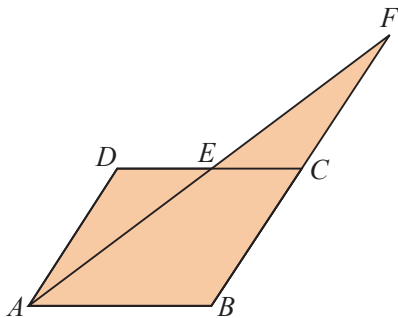
- (1) $\triangle ADE$ 與 $\triangle FBA$ 中，

$$\because \angle DAE = \angle F (\text{理由: } \underline{\hspace{2cm}}),$$

$$\angle DEA = \angle BAF (\text{理由: } \underline{\hspace{2cm}}),$$

$$\therefore \text{根據 } \underline{\hspace{2cm}} \text{ 相似性質，可知 } \triangle ADE \sim \triangle FBA.$$

- (2) 若 $\triangle ADE$ 的面積為 12，求 $\triangle FBA$ 的面積。

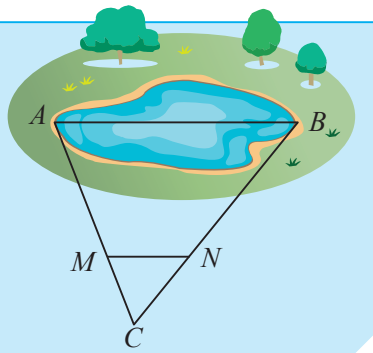


2 簡易測量

利用相似三角形對應邊成比例，可以測量湖寬、距離、樹高、……等。

例4 測量湖寬

如圖，湖邊有 A 、 B 兩點，安琪 想知道它們之間的距離。首先她在湖邊的空地找另一點 C ，測得 $\overline{AC}$ 長 75 公尺、 $\overline{BC}$ 長 90 公尺，接著自 C 點出發分別在 $\overline{AC}$ 、 $\overline{BC}$ 上取 M 、 N 兩點，使得 $\overline{MC}=25$ 公尺， $\overline{NC}=30$ 公尺，此時 $\overline{MN}=28$ 公尺，求湖寬 $\overline{AB}$ 。



解 在 $\triangle CMN$ 與 $\triangle CAB$ 中，

$$\left. \begin{aligned} \because \overline{CM} : \overline{CA} &= 25 : 75 = 1 : 3 \\ \overline{CN} : \overline{CB} &= 30 : 90 = 1 : 3 \end{aligned} \right\} \overline{CM} : \overline{CA} = \overline{CN} : \overline{CB}$$

$\angle C = \angle C$ (公用角)，

$\therefore \triangle CMN \sim \triangle CAB$ (SAS 相似性質)。

$$\overline{MN} : \overline{AB} = \overline{CM} : \overline{CA}$$

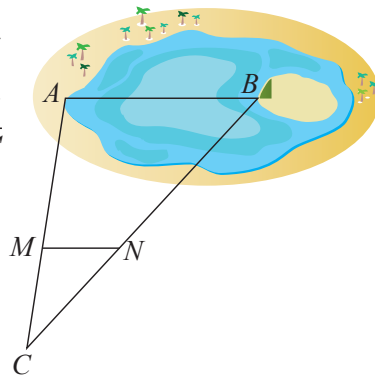
$$28 : \overline{AB} = 25 : 75$$

$\overline{AB} = 84$ ，故湖寬 $\overline{AB} = 84$ (公尺)。



隨堂練習

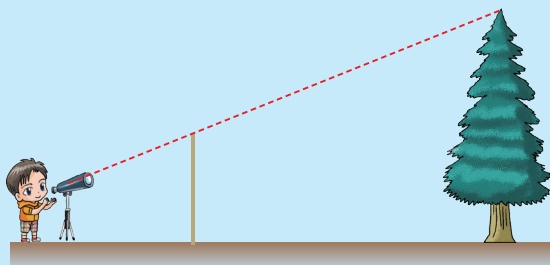
如圖，威利 想知道湖邊 A 點到湖中小島 B 點的距離，他在湖外找了一點 C ，測得 $\overline{AC}$ 長 20 公尺，接著在 $\overline{AC}$ 上離 C 點 8 公尺處選取 M 點，自 M 點作 $\overline{MN} \parallel \overline{AB}$ ，交 $\overline{BC}$ 於 N 點，若測得 $\overline{MN} = 6$ 公尺，求 A 、 B 兩點的距離。



例5 測量樹高

自評 P80 第 3 題

如圖，志豪想要測量樹高，他在樹前 5 公尺垂直豎立了一根長 1.8 公尺的木棍，並繼續往同方向在木棍後方找到觀測點，從望遠鏡看到木棍頂端與樹梢重疊。經測量木棍與望遠鏡的水平距離是 2 公尺，望遠鏡至地面的高度為 1 公尺，求樹高。



解

依題意畫出右圖，

$\because \overline{CD}$ 與 $\overline{AB}$ 皆垂直於 $\overline{BD}$ ， $\therefore \overline{CD} \parallel \overline{AB}$ ，

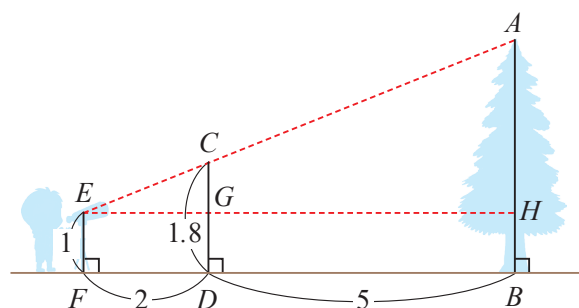
在 $\triangle AEH$ 中， $\because \overline{CG} \parallel \overline{AH}$ ，

$\therefore \overline{EG} : \overline{EH} = \overline{CG} : \overline{AH}$

$$2 : (2 + 5) = (1.8 - 1) : \overline{AH}$$

$$\overline{AH} = 2.8$$

則 $\overline{AB} = 2.8 + 1 = 3.8$ ，故樹高 $\overline{AB} = 3.8$ (公尺)。

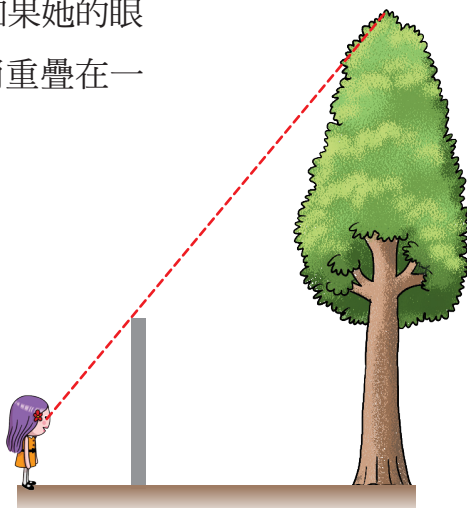


樹高是 $\overline{AB}$ ，垂直木棍是 $\overline{CD}$ ，望遠鏡是 E 點，自 E 點作垂線分別交 $\overline{CD}$ 與 $\overline{AB}$ 於 G 、 H 兩點。



隨堂練習

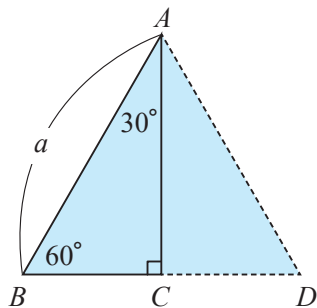
如圖，艾美站在一道高 4 公尺的牆前 2 公尺處，如果她的眼睛距離地面 1.6 公尺，向牆望去，觀得牆頂與樹梢重疊在一起，若樹與牆相距 6 公尺，求樹高。



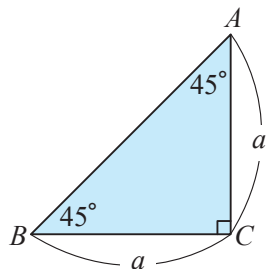
3 三角比

▶ 特殊直角三角形的邊長比

在八下曾學過利用正三角形的邊長來求其高，如右圖，若正三角形 ABD 的邊長為 a ， $\overline{AC}$ 為 $\overline{BD}$ 邊上的高，則 $\overline{BC} = \frac{1}{2} \overline{BD} = \frac{1}{2} a$ ， $\overline{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2} a$ ，所以 $\triangle ABC$ 三邊長的比為 $\overline{BC} : \overline{AC} : \overline{AB} = \frac{1}{2} a : \frac{\sqrt{3}}{2} a : a = 1 : \sqrt{3} : 2$ 。

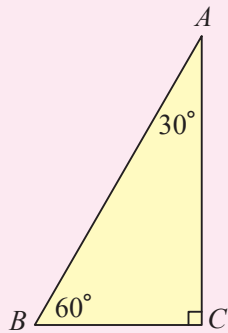


同樣地，如右圖，若等腰直角三角形 ABC 中， $\angle A = \angle B = 45^\circ$ ， $\angle C = 90^\circ$ ， $\overline{AC} = \overline{BC} = a$ ，則 $\overline{AB} = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = \sqrt{2} a$ ，所以 $\triangle ABC$ 三邊長的比為 $\overline{BC} : \overline{AC} : \overline{AB} = a : a : \sqrt{2} a = 1 : 1 : \sqrt{2}$ 。

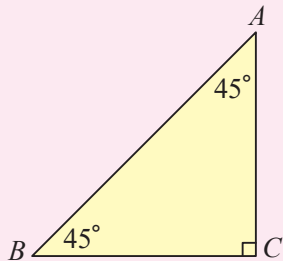


📌 特殊直角三角形的邊長比

1. 直角三角形 ABC 中， $\angle A = 30^\circ$ ， $\angle B = 60^\circ$ ， $\angle C = 90^\circ$ ，則 $\overline{BC} : \overline{AC} : \overline{AB} = 1 : \sqrt{3} : 2$ 。



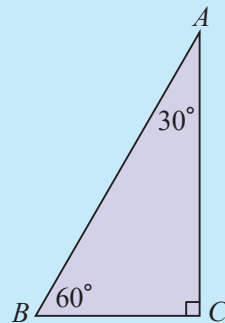
2. 等腰直角三角形 ABC 中， $\angle A = \angle B = 45^\circ$ ， $\angle C = 90^\circ$ ，則 $\overline{BC} : \overline{AC} : \overline{AB} = 1 : 1 : \sqrt{2}$ 。



例6 30° - 60° - 90° 度三角形的三邊長

自評 P80 第 4 題

如圖，直角三角形 ABC 中， $\angle A = 30^\circ$ ， $\angle B = 60^\circ$ ， $\angle C = 90^\circ$ ，若 $\overline{AB} = 6$ ，求 $\overline{AC}$ 、 $\overline{BC}$ 的長。



解

在直角三角形 ABC 中，

$$\because \angle A = 30^\circ, \angle B = 60^\circ, \angle C = 90^\circ,$$

$$\therefore \overline{BC} : \overline{AC} : \overline{AB} = 1 : \sqrt{3} : 2。$$

$$\overline{BC} : \overline{AC} : 6 = 1 : \sqrt{3} : 2$$

$$\therefore \frac{\overline{BC}}{1} = \frac{\overline{AC}}{\sqrt{3}} = \frac{6}{2},$$

$$\text{可得 } \overline{AC} = 3\sqrt{3}, \overline{BC} = 3。$$

若 $x : y : z = a : b : c$ ，
且 a, b, c 皆不為 0，
則 $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$ 。



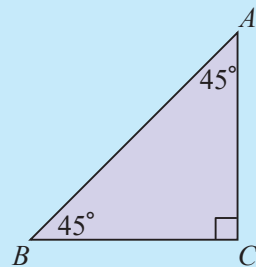
隨堂練習

直角三角形 ABC 中， $\angle A = 30^\circ$ ， $\angle B = 60^\circ$ ， $\angle C = 90^\circ$ ，若 $\overline{AB} = 12$ ，求 $\overline{AC}$ 、 $\overline{BC}$ 的長。

例 7 45 - 45 - 90 度三角形的三邊長

自評 P80 第 4 題

如圖，等腰直角三角形 ABC 中， $\angle A = \angle B = 45^\circ$ ， $\angle C = 90^\circ$ ，若 $\overline{AB} = 6$ ，求 $\overline{AC}$ 、 $\overline{BC}$ 的長。



解 在等腰直角三角形 ABC 中，

$$\because \angle A = \angle B = 45^\circ, \angle C = 90^\circ,$$

$$\therefore \overline{AC} : \overline{BC} : \overline{AB} = 1 : 1 : \sqrt{2}.$$

$$\overline{AC} : \overline{BC} : 6 = 1 : 1 : \sqrt{2}$$

$$\frac{\overline{AC}}{1} = \frac{\overline{BC}}{1} = \frac{6}{\sqrt{2}},$$

$$\overline{AC} = \frac{6}{\sqrt{2}} = \frac{6 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2},$$

$$\text{同理, } \overline{BC} = \overline{AC} = 3\sqrt{2}.$$



隨堂練習

等腰直角三角形 ABC 中， $\angle A = \angle B = 45^\circ$ ， $\angle C = 90^\circ$ ，若 $\overline{AB} = 12$ ，求 $\overline{AC}$ 、 $\overline{BC}$ 的長。

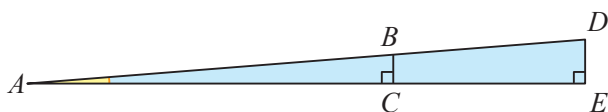
▶ 直角三角形的三角比



內政部營建署 建築物無障礙設施設計規範中，關於無障礙坡道的設計，其中必須符合「坡道之坡度(高度與水平長度之比值)不得大於 $\frac{1}{12}$ 」的規定，意思是「每前進 12 公尺的水平距離，上升高度不能大於 1 公尺」。



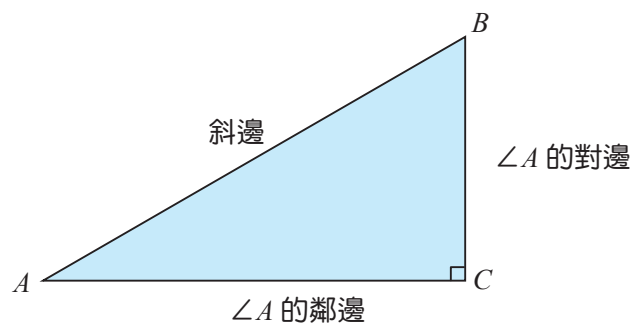
右圖為符合標準的無障礙坡道示意圖，坡道之坡度剛好是 $\frac{1}{12}$ ， $\overline{AD}$ 是無障礙坡道長， $\overline{AE}$ 是地面上的水平距離， $\overline{BC}$ 、 $\overline{DE}$ 皆垂直 $\overline{AE}$ 。



因為 $\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{AE}} = \frac{1}{12}$ ，亦即在直角三角形 ABC 與直角三角形 ADE 中，兩股長的比值是固定的。

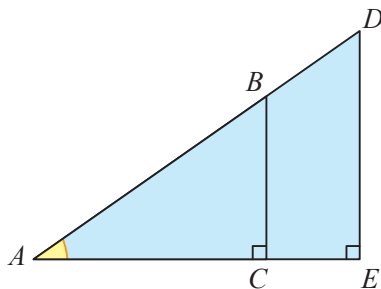
為了討論一般直角三角形三邊的關係，我們規定如下：

如圖， $\triangle ABC$ 為直角三角形， $\angle C = 90^\circ$ ， $\angle A$ 是其中一個銳角，則 $\overline{BC}$ 稱為 $\angle A$ 的**對邊**， $\overline{AC}$ 稱為 $\angle A$ 的**鄰邊**。



在前面提到無障礙坡道中，兩股長的比值是固定的，也就是說當 $\triangle ABC$ 為直角三角形， $\angle C = 90^\circ$ ，只要 $\angle A$ 的度數固定， $\frac{\angle A \text{ 對邊長}}{\angle A \text{ 鄰邊長}}$ 的比值就會固定不變。事實上， $\frac{\angle A \text{ 對邊長}}{\text{斜邊長}}$ 、 $\frac{\angle A \text{ 鄰邊長}}{\text{斜邊長}}$ 的比值也是固定不變的，說明如下頁。

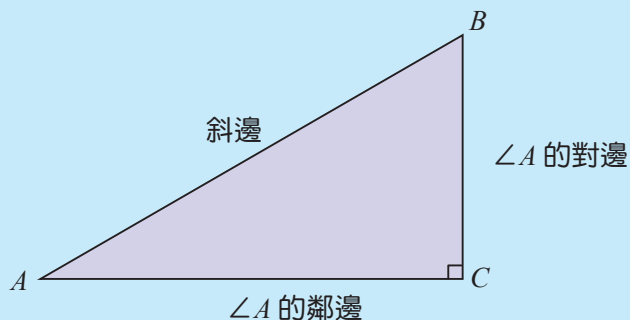
如圖， $\triangle ABC$ 、 $\triangle ADE$ 為直角三角形，
 $\angle ACB = \angle AED = 90^\circ$ ，因為 $\angle A$ 為公用角，
 所以 $\triangle ABC \sim \triangle ADE$ (AA 相似)，由此可得



$$\frac{\overline{BC}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{AD}} \left(\frac{\angle A \text{ 對邊長}}{\text{斜邊長}} \right) \\ \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AD}} \left(\frac{\angle A \text{ 鄰邊長}}{\text{斜邊長}} \right) \\ \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{AE}} \left(\frac{\angle A \text{ 對邊長}}{\angle A \text{ 鄰邊長}} \right) \end{cases}$$

從上面的說明可知，若直角三角形的一個銳角是 $\angle A$ ，當 $\angle A$ 的度數固定不變時，則 $\frac{\angle A \text{ 對邊長}}{\text{斜邊長}}$ 、 $\frac{\angle A \text{ 鄰邊長}}{\text{斜邊長}}$ 、 $\frac{\angle A \text{ 對邊長}}{\angle A \text{ 鄰邊長}}$ 的比值也是固定不變，我們稱這些比值為 $\angle A$ 的三角比，並用 $\sin \angle A$ 、 $\cos \angle A$ 、 $\tan \angle A$ 來表示這三個比值。

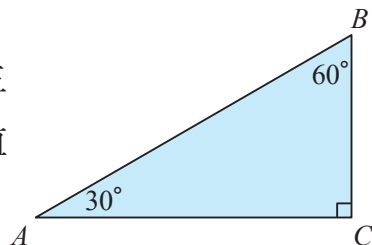
如圖，在直角三角形 ABC 中，
 $\angle C = 90^\circ$ ，



- (1) $\frac{\angle A \text{ 對邊長}}{\text{斜邊長}}$ 記作 $\sin \angle A$ ，簡記成 **sin A** (讀做 sine A)，即 $\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \sin A$ 。
- (2) $\frac{\angle A \text{ 鄰邊長}}{\text{斜邊長}}$ 記作 $\cos \angle A$ ，簡記成 **cos A** (讀做 cosine A)，即 $\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \cos A$ 。
- (3) $\frac{\angle A \text{ 對邊長}}{\angle A \text{ 鄰邊長}}$ 記作 $\tan \angle A$ ，簡記成 **tan A** (讀做 tangent A)，即 $\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \tan A$ 。

這三個比值，皆稱為 $\angle A$ 的三角比。

如圖，在前面曾學過直角三角形 ABC 中， $\angle A = 30^\circ$ ， $\angle B = 60^\circ$ ， $\angle C = 90^\circ$ ，則無論三角形的大小， $\overline{BC} : \overline{AC} : \overline{AB}$ 三邊長的比都是 $1 : \sqrt{3} : 2$ ，我們可以得到 30° ($\angle A$) 三角比的值是固定不變的。同理， 45° 、 60° 三角比的值也是固定不變的。

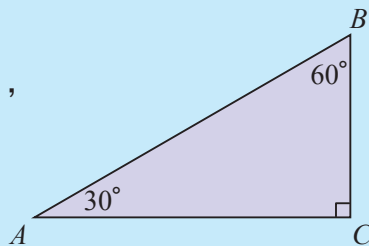


例8 特殊角的三角比

自評 P81 第 5 題

如圖，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle A = 30^\circ$ ， $\angle B = 60^\circ$ ， $\angle C = 90^\circ$ ，

求 $\frac{\angle A \text{ 對邊長}}{\text{斜邊長}}$ 、 $\frac{\angle A \text{ 鄰邊長}}{\text{斜邊長}}$ 、 $\frac{\angle A \text{ 對邊長}}{\angle A \text{ 鄰邊長}}$ 。



解

$$\because \angle A = 30^\circ, \angle B = 60^\circ, \angle C = 90^\circ,$$

$$\therefore \overline{BC} : \overline{AC} : \overline{AB} = 1 : \sqrt{3} : 2.$$

$$\frac{\angle A \text{ 對邊長}}{\text{斜邊長}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{1}{2}$$

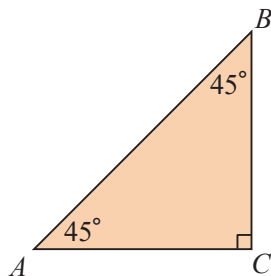
$$\frac{\angle A \text{ 鄰邊長}}{\text{斜邊長}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{\angle A \text{ 對邊長}}{\angle A \text{ 鄰邊長}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

隨堂練習

如圖，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle A = \angle B = 45^\circ$ ， $\angle C = 90^\circ$ ，

求 $\frac{\angle A \text{ 對邊長}}{\text{斜邊長}}$ 、 $\frac{\angle A \text{ 鄰邊長}}{\text{斜邊長}}$ 、 $\frac{\angle A \text{ 對邊長}}{\angle A \text{ 鄰邊長}}$ 。





在例8中， $\frac{\angle A \text{ 鄰邊長}}{\text{斜邊長}}$ 可用 $\cos 30^\circ$ 表示， 30° 度角的三角比也可以用計算機來協助計算，方法如下：

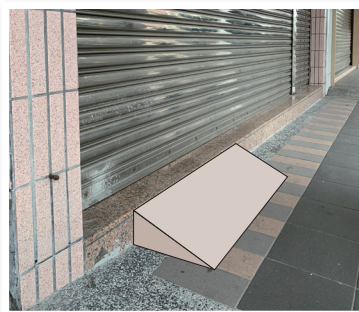
數值	按法	螢幕顯示
$\cos 30^\circ$	30 COS	
$\frac{\sqrt{3}}{2}$	3 SHIFT x² ÷ 2 =	

螢幕顯示 $\cos 30^\circ$ 與 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 的近似值相同。
一般而言，任何銳角的三角比也可以用計算機協助計算。

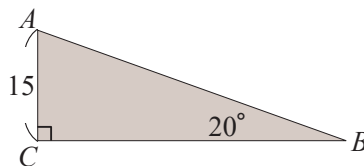


本教材使用之計算機，
若需 $\sqrt{\quad}$ 功能，須先按
SHIFT，再按 **x²**

傑克家的地面比騎樓高 15 公分，爸爸為了家裡的摩托車與輪椅進出方便，做了一個活動式木板斜坡，如右圖。若將斜坡角度設定為 20° ，則木板斜坡要多少公分，才會和地面形成 20° 的夾角？



如圖， $\triangle ABC$ 為直角三角形，設斜坡的長度為 $\overline{AB}$ ，騎樓與家裡地面的距離為 $\overline{AC}$ ，斜坡的角度為 20° ，利用三角比可以列得算式 $\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{15}{\overline{AB}} = \sin 20^\circ \approx 0.3420$ ，所以 $\overline{AB} \approx \frac{15}{0.3420} \approx 44$ (公分)，即傑克家的木板斜坡長約 44 公分。



依序輸入 20 **SIN**，螢幕顯示

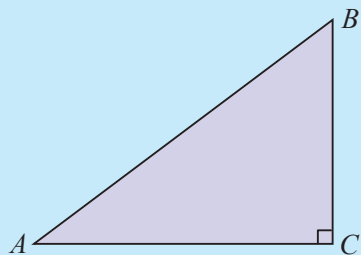


例9 直角三角形的三角比

如圖， $\triangle ABC$ 為直角三角形， $\angle C=90^\circ$ ，

且 $\overline{AB}:\overline{AC}:\overline{BC}=5:4:3$ ，

求 $\frac{\angle A \text{ 對邊長}}{\text{斜邊長}}$ 、 $\frac{\angle A \text{ 鄰邊長}}{\text{斜邊長}}$ 、 $\frac{\angle A \text{ 對邊長}}{\angle A \text{ 鄰邊長}}$ ，
並將這三個比值用 $\sin A$ 、 $\cos A$ 、 $\tan A$ 表示。



解

$$\because \overline{AB}:\overline{AC}:\overline{BC}=5:4:3,$$

$$\therefore \text{設 } \overline{AB}=5r, \overline{AC}=4r, \overline{BC}=3r,$$

$$\text{因此, } \frac{\angle A \text{ 對邊長}}{\text{斜邊長}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{3r}{5r} = \frac{3}{5}, \text{ 即 } \sin A = \frac{3}{5}.$$

$$\frac{\angle A \text{ 鄰邊長}}{\text{斜邊長}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{4r}{5r} = \frac{4}{5}, \text{ 即 } \cos A = \frac{4}{5}.$$

$$\frac{\angle A \text{ 對邊長}}{\angle A \text{ 鄰邊長}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{3r}{4r} = \frac{3}{4}, \text{ 即 } \tan A = \frac{3}{4}.$$

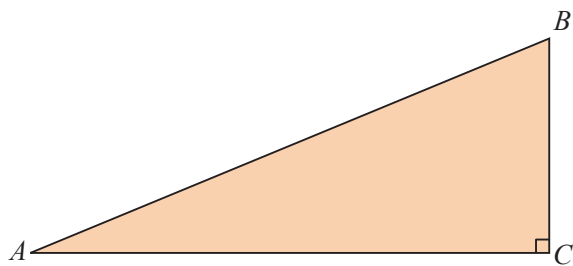


隨堂練習

如圖，在直角三角形 ABC 中， $\angle C=90^\circ$ ，

且 $\overline{AB}:\overline{AC}:\overline{BC}=13:12:5$ ，在下列空格

中填入數值，並選出適當的三角比。



(1) $\frac{\angle A \text{ 鄰邊長}}{\text{斜邊長}} = \underline{\hspace{2cm}}$ ，其值與 $\underline{\hspace{2cm}}$ 相等。(填入 $\sin A$ 、 $\cos A$ 或 $\tan A$)

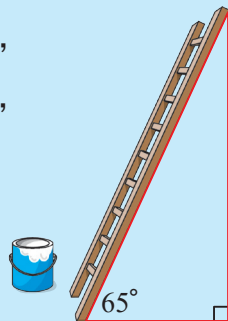
(2) $\frac{\angle A \text{ 對邊長}}{\angle A \text{ 鄰邊長}} = \underline{\hspace{2cm}}$ ，其值與 $\underline{\hspace{2cm}}$ 相等。(填入 $\sin A$ 、 $\cos A$ 或 $\tan A$)

(3) $\frac{\angle A \text{ 對邊長}}{\text{斜邊長}} = \underline{\hspace{2cm}}$ ，其值與 $\underline{\hspace{2cm}}$ 相等。(填入 $\sin A$ 、 $\cos A$ 或 $\tan A$)

例10 三角比的應用

如圖，一座梯子長度為 2 公尺，考量油漆工人放置梯子的安全，在施工時將梯子靠著牆面置放。若梯子與地面的夾角為 65° ，求：（利用計算機計算，並四捨五入取至小數點後第二位）

- (1) 梯子底部與牆面的距離。
- (2) 梯子頂部與地面的距離。



解

- (1) 設梯子底部與牆面的距離為 x 公尺，

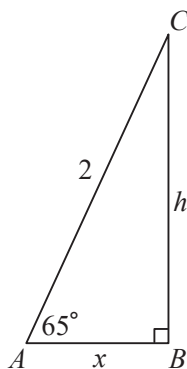
$$\text{則 } \frac{\angle A \text{ 鄰邊長}}{\text{斜邊長}} = \frac{x}{2} = \cos 65^\circ \doteq 0.422618261,$$

$$\text{故 } x \doteq 2 \times 0.422618261 = 0.845236522 \doteq 0.85 \text{ (公尺)}。$$

- (2) 設梯子頂部與地面的距離為 h 公尺，

$$\text{則 } \frac{\angle A \text{ 對邊長}}{\text{斜邊長}} = \frac{h}{2} = \sin 65^\circ \doteq 0.906307787,$$

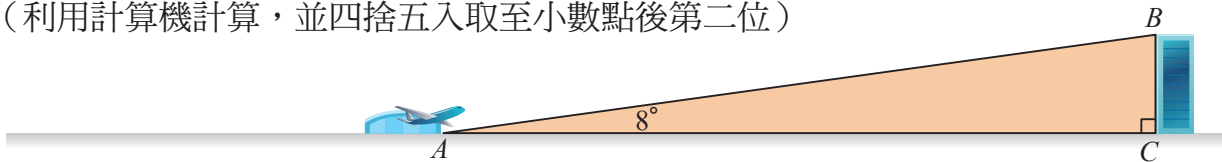
$$\text{故 } h \doteq 2 \times 0.906307787 = 1.812615574 \doteq 1.81 \text{ (公尺)}。$$



隨堂練習

自評 P81 第 6 題

如圖，某機場基於安全考量限制機場附近的建築物，從機場跑道的端點到建築物頂樓最高處的仰角不得超過 8° 。安心建築公司打算在離跑道端點（A 點）3 公里處蓋一棟大樓（ $\overline{BC}$ ），經測量該棟大樓地面高度和機場跑道的端點一樣高，則在仰角 $\angle BAC = 8^\circ$ 時，該大樓在地面上的高度是多少公尺？（利用計算機計算，並四捨五入取至小數點後第二位）

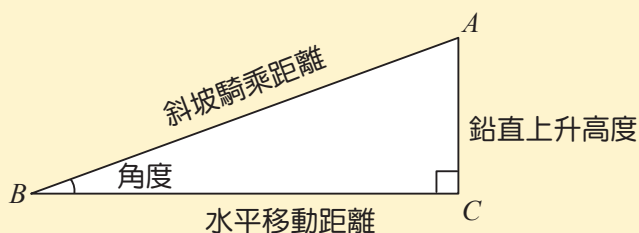




坡度

騎自行車是臺灣非常盛行的一種休閒運動，而陡峭的斜坡考驗車友的體力與毅力，是車友又愛又恨的挑戰。

通常我們用「坡度」來表示斜坡陡峭的程度，這個數值是以百分比來表示，以下為斜坡角度與坡度的關係。



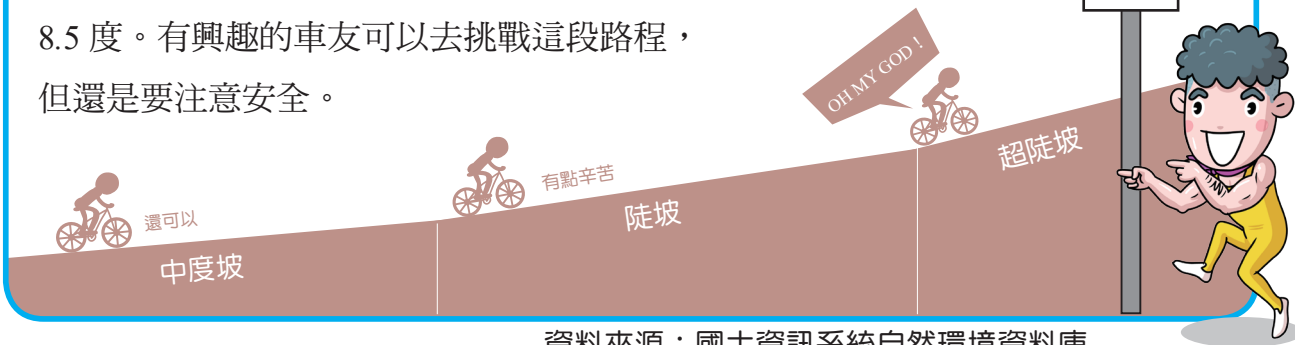
$$\tan(\text{角度}) = \frac{\text{鉛直上升高度}}{\text{水平移動距離}}$$

$$\text{坡度} = \frac{\text{鉛直上升高度}}{\text{水平移動距離}} \times 100\%$$

坡度在 5~10% 屬於中度坡；10~15% 屬於陡坡；15~25% 屬於超陡坡。

自行車車友最喜歡挑戰的一條路是埔里到合歡山武嶺，這段路程最低海拔高度 481 公尺，最高海拔高度 3275 公尺，鉛直上升高度共 2794 公尺，且整段路程有百分之五的超陡坡、百分之十七的陡坡及百分之四十四的中度坡。

在爬坡的路上，如果看到交通標誌如右圖，其坡度表示 15%
 $= \frac{\text{鉛直上升高度}}{\text{水平移動距離}} \times 100\%$ ，利用計算機得知： $\tan 8^\circ \approx 0.1405$ ，
 $\tan 8.5^\circ \approx 0.1495$ ， $\tan 9^\circ \approx 0.1584$ ，此時上升的斜坡的角度大約是 8.5 度。有興趣的車友可以去挑戰這段路程，但還是要注意安全。



資料來源：國土資訊系統自然環境資料庫

重點回顧

1 相似三角形的比例關係

兩個相似三角形有下列關係：

(1) 對應高的比 = 對應邊長的比；(2) 面積的比 = 對應邊長的平方比。

2 生活中無法直接求得的距離或長度，可利用相似三角形作簡易測量。

3 特殊直角三角形的邊長比

(1) 直角三角形 ABC 中， $\angle A = 30^\circ$ ， $\angle B = 60^\circ$ ， $\angle C = 90^\circ$ ，

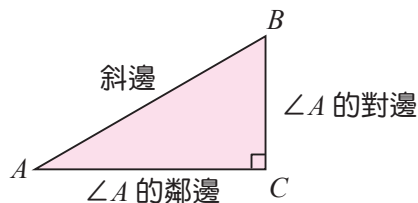
則 $\overline{BC} : \overline{AC} : \overline{AB} = 1 : \sqrt{3} : 2$ 。

(2) 等腰直角三角形 ABC 中， $\angle A = \angle B = 45^\circ$ ， $\angle C = 90^\circ$ ，

則 $\overline{BC} : \overline{AC} : \overline{AB} = 1 : 1 : \sqrt{2}$ 。

4 三角比

如圖，在直角三角形 ABC 中， $\angle C = 90^\circ$ ，



(1) $\frac{\angle A \text{ 對邊長}}{\text{斜邊長}}$ 簡記作 $\sin A$ (讀做 sine A)，即 $\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \sin A$ 。

(2) $\frac{\angle A \text{ 鄰邊長}}{\text{斜邊長}}$ 簡記作 $\cos A$ (讀做 cosine A)，即 $\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \cos A$ 。

(3) $\frac{\angle A \text{ 對邊長}}{\angle A \text{ 鄰邊長}}$ 簡記作 $\tan A$ (讀做 tangent A)，即 $\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \tan A$ 。

這三個比值，皆稱為 $\angle A$ 的三角比。

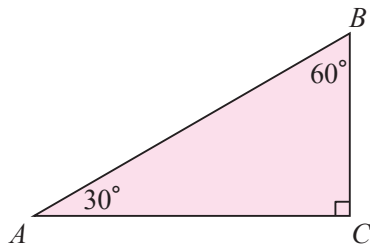
例 如圖， $\triangle ABC$ 為直角三角形， $\angle A = 30^\circ$ ， $\angle B = 60^\circ$ ， $\angle C = 90^\circ$ ，

$\therefore \overline{BC} : \overline{AC} : \overline{AB} = 1 : \sqrt{3} : 2$ ，可得：

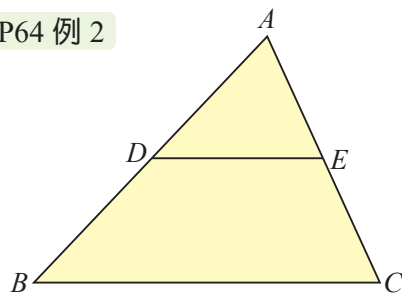
$$\frac{\angle A \text{ 對邊長}}{\text{斜邊長}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{1}{2} = \sin 30^\circ$$

$$\frac{\angle A \text{ 鄰邊長}}{\text{斜邊長}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos 30^\circ$$

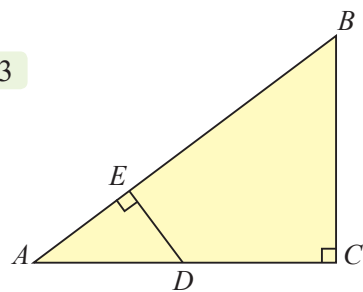
$$\frac{\angle A \text{ 對邊長}}{\angle A \text{ 鄰邊長}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \tan 30^\circ$$



- ①如圖， $\triangle ABC$ 中， D 、 E 分別為 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 的中點，課 P64 例 2
若 $\triangle ABC$ 的面積為 16 平方公分，求 $\triangle ADE$ 的面積。

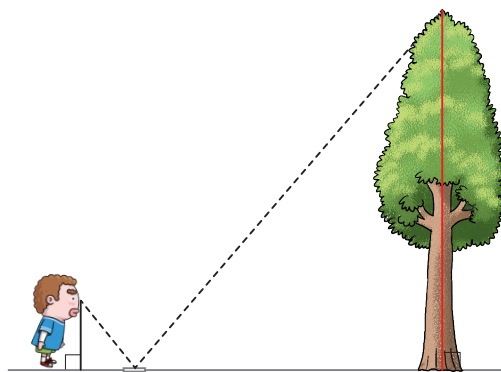


- ②如圖， $\triangle ABC$ 中， $\angle C=90^\circ$ ，已知 $\overline{BC}=6$ ，課 P65 例 3
 $\overline{AC}=8$ ， D 為 $\overline{AC}$ 的中點， $\overline{DE} \perp \overline{AB}$ ，求：
(1) $\overline{DE}$ 。(2) 四邊形 $DEBC$ 面積。



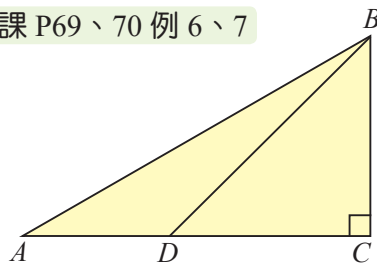
- ③如圖，威利在地上放了一面鏡子，透過鏡子的反射（入射角等於反射角），他可以看見樹梢。已知威利與鏡子的距離是 1.2 公尺，鏡子與樹的距離是 6 公尺，威利眼睛離地面的高度是 1.5 公尺，求樹高。

課 P67 例 5



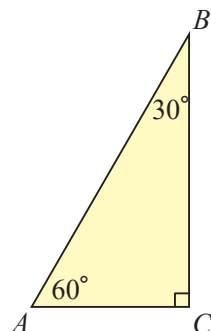
- ④如圖， $\triangle ABC$ 中，若 $\angle A = 30^\circ$ ， $\angle B = 60^\circ$ ， $\angle C = 90^\circ$ ，且 D 在 $\overline{AC}$ 上， $\angle BDC = 45^\circ$ ，若 $\overline{BC} = 12$ ，求：
- (1) $\overline{AD}$ 。
 - (2) $\triangle ABD$ 的面積。

課 P69、70 例 6、7



- ⑤ 如圖，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle A = 60^\circ$ ， $\angle B = 30^\circ$ ， $\angle C = 90^\circ$ ，

求 $\frac{\angle A \text{ 對邊長}}{\text{斜邊長}}$ 、 $\frac{\angle A \text{ 鄰邊長}}{\text{斜邊長}}$ 、 $\frac{\angle A \text{ 對邊長}}{\angle A \text{ 鄰邊長}}$ 。 課 P73 例 8

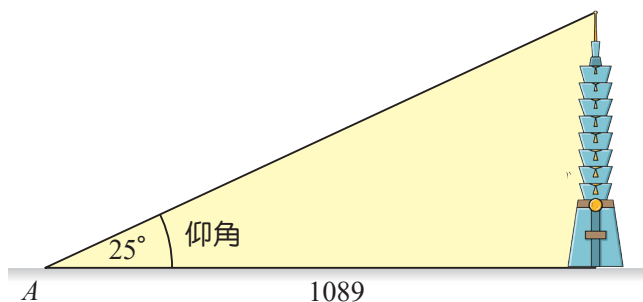


- ⑥ 妙麗欲測量臺北 101 大樓的高度，先在地面上 A 點測得樓頂的仰角為 25° ，再朝

大樓方向前進 1089 公尺到達大樓底部，求臺北 101 大樓高度。

課 P76 隨堂

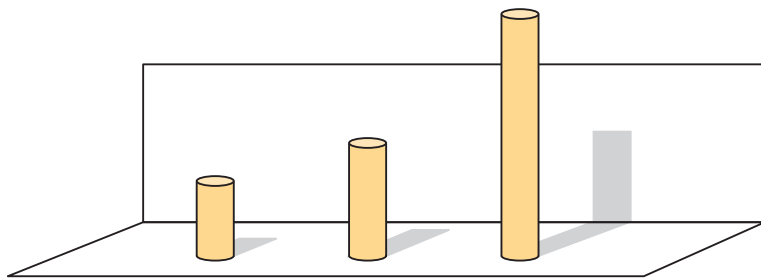
(利用計算機計算，並四捨五入取到整數位)



自我挑戰

本頁為概念統整課程，由學生自行挑戰，
教師可視班級情況而自行決定如何運用。

在公園有三座垂直於水平地面且高度不一的圓柱，三座圓柱後面有一堵與地面互相垂直的牆，且圓柱與牆的距離皆為 120 公分。安琪觀察到第 1 根柱子的高為 100 公分，其影子落在地面上的影長為 60 公分；而第 3 根柱子的部分影子落在牆上，如下圖。



已知落在地面上的影子皆與牆面垂直，並視太陽光為平行光，在不計圓柱厚度與影子寬度的情況下，回答下列問題：

(1) 若第 2 根柱子的高為 150 公分，且影子完全落在地面上，則影長為多少公分？

解

(2) 若同一時間測得第 3 根柱子落在牆上的影長為 120 公分，則第 3 根柱子的高度為多少公分？

解

數學萬花筒

遠離大卡車



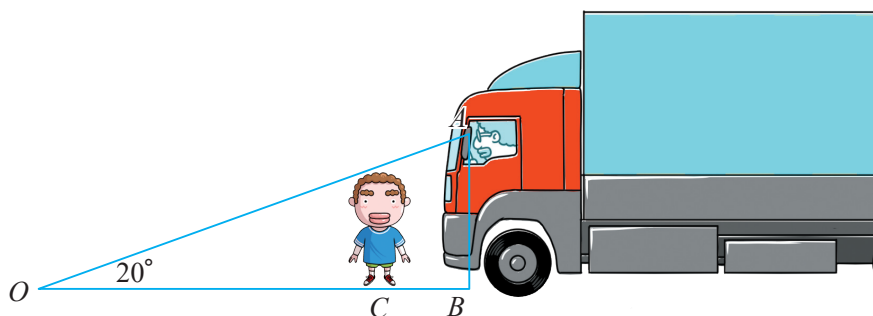
根據警政署統計，每年因大型車未保持安全距離的傷亡人數高達一千多人，當行人或機車騎士騎在大卡車的前後方、左右方或大卡車轉彎形成的區域範圍內，都會造成視線死角，是最可怕的道路殺手。

如下圖，駕駛在座位上的位置，他的眼睛位於地平面 B 點正上方約 2 公尺，且視線與地面的水平線約夾 20° ，形成一個直角三角形 OAB ，其中 $\angle OBA = 90^\circ$ 。若某位身高 1.5 公尺的學生站在卡車前方地平面 C 點處，則：

$$\frac{1.5}{OC} = \frac{2}{OB} = \tan 20^\circ \approx 0.3640,$$

$$\overline{OC} \approx 4.1209, \overline{OB} \approx 5.4945,$$

$$\overline{BC} \approx 5.4945 - 4.1209 \approx 1.4。$$



也就是說，當此學生與卡車司機的水平距離在約 1.4 公尺以內時，司機是看不到的。



除了大卡車的前方，在大卡車的左右兩側、後方造成的視線死角和內輪差區域都相當危險，千萬不能掉以輕心。

2

圓形

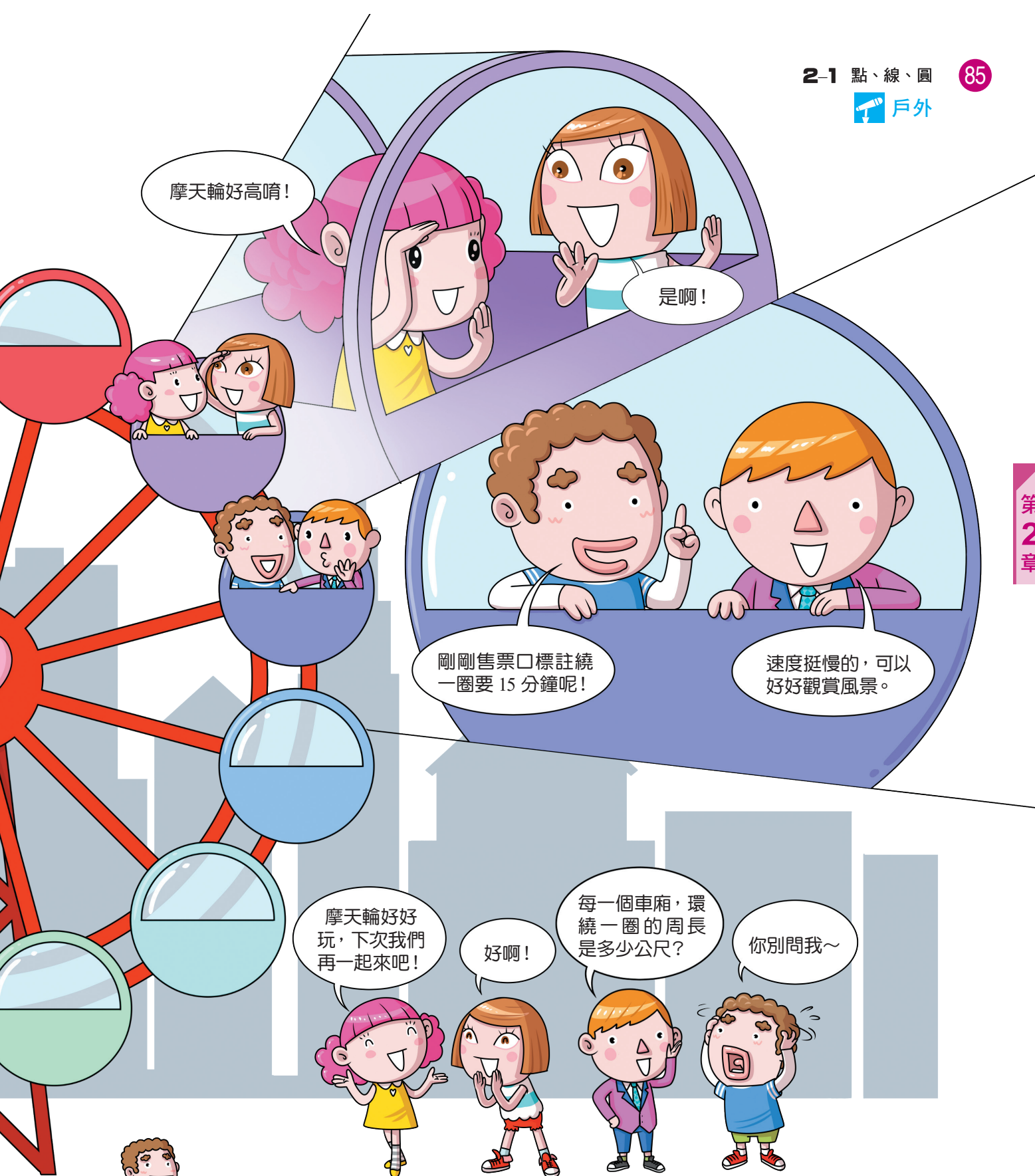
2-1 點、線、圓

1. 圓、圓弧長與扇形
2. 點與圓的位置關係
3. 直線與圓的位置關係

2-2 圓心角與圓周角

1. 圓心角與弧的度數
2. 圓周角及其所對的弧
3. 圓內接四邊形





透過上面的資訊，你知道每一個車廂環繞一圈的周長是多少公尺嗎？
翻開 P92，練習完就知道囉！

學習
前哨站

本單元為學生自我複習，
教師可視班級情況決定如何運用。

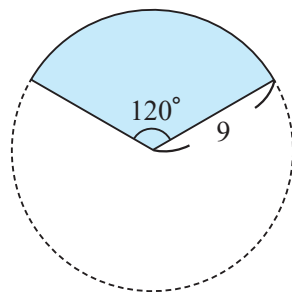
回顧 ① 圓形的弧長與面積

國小 6 年級

如右圖，扇形所對應圓的直徑 $= 2 \times 9 = 18$ ，圓心角 120° （扇形是三分之一圓），若圓周率以 3.14 表示，則

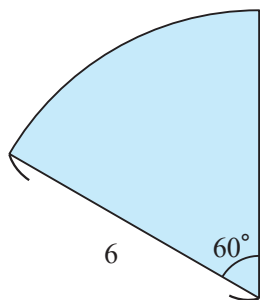
$$\begin{aligned}\text{扇形弧長} &= \frac{1}{3} \times \text{圓周長} \\ &= \frac{1}{3} \times 18 \times 3.14 \\ &= 18.84\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{扇形面積} &= \frac{1}{3} \times \text{圓面積} \\ &= \frac{1}{3} \times \text{半徑} \times \text{半徑} \times \text{圓周率} \\ &= \frac{1}{3} \times 9 \times 9 \times 3.14 = 84.78\end{aligned}$$



課前練習

右圖的扇形為六分之一圓，求此扇形的弧長及面積。
（圓周率以 3.14 表示）



回顧 ② 畢氏定理

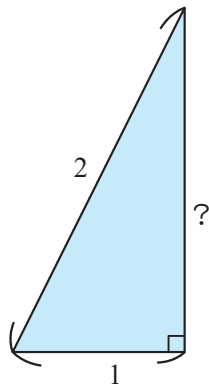
8 上第 2 章

已知直角三角形的一股長為 1，斜邊長為 2，由畢氏定理可知：
直角三角形兩股長的平方和等於斜邊長的平方。如右圖，
假設另一股長為 x ，則 $1^2 + x^2 = 2^2$

$$x^2 = 2^2 - 1^2 = 3$$

$$x = \pm\sqrt{3}$$

$\because x > 0$ ， $\therefore$ 另一股長為 $\sqrt{3}$ 。



課前練習

已知直角三角形的兩股長皆為 1，求斜邊長是多少？

2-1 點、線、圓

1 圓、圓弧長與扇形

位於臺鐵彰化站附近的扇形車庫是全臺僅存運作中的火車頭調度站，主要功能是提供火車頭保養與維修之用。而圓弧的設計從空中鳥瞰就像一把扇子，中間的調度轉盤是圓形，可作 360° 旋轉，不僅節省空間，且方便火車頭的調度。

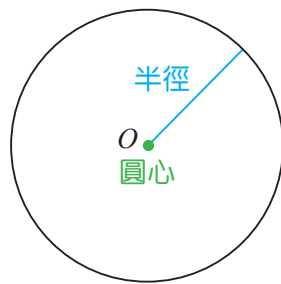


日常生活中的圓，既可指作為周界的曲線（即圓周部分），也可指這條曲線以及它的內部（即圓盤部分）；而數學上的圓，指的就是圓周部分。接下來，我們來複習並介紹跟圓有關的一些數學名詞。



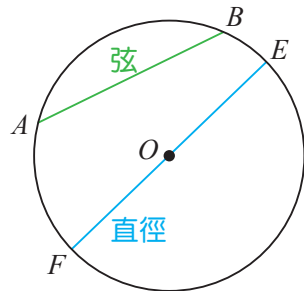
圓

在平面上和一個定點等距離的所有點所形成的圖形稱為圓，此定點稱為圓心，而圓心到圓上任一點的距離稱為半徑。如右圖，若以點 O 為圓心，則稱此圓為圓 O 。



弦

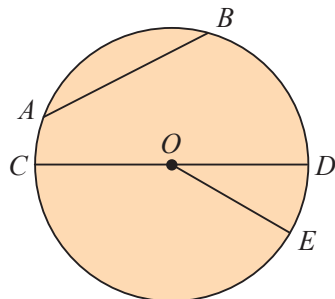
連接圓上任意兩點所形成的線段稱為弦，如果一弦通過圓心，此弦就是直徑，而直徑是最長的弦。如右圖， $\overline{AB}$ 與 $\overline{EF}$ 都是弦，其中 $\overline{EF}$ 為直徑，所以 $\overline{EF}$ 也是最長的弦。





隨堂練習

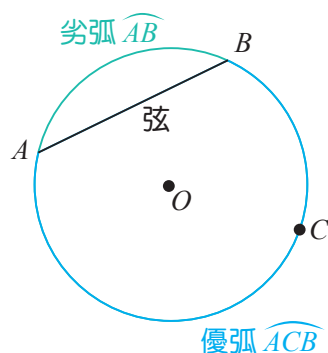
如圖， $\overline{AB}$ 、 $\overline{CD}$ 、 $\overline{OE}$ 哪些為圓 O 的弦？



弧

一弦將圓周分成兩部分，兩部分都稱為**弧**。若此弦恰為直徑，則可將圓分成相等的兩部分，稱為**半圓**。弧若小於半圓稱為**劣弧**；弧若大於半圓稱為**優弧**。

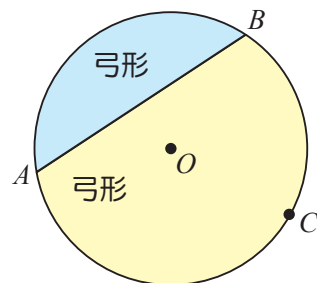
如右圖， $\overline{AB}$ 將圓周分為兩個弧，這兩個弧有相同的端點，都可記為 $\widehat{AB}$ 。但為了加以區別，通常將其中的劣弧以 $\widehat{AB}$ 表示，而優弧則在其弧上多取一點 C ，以 $\widehat{ACB}$ 表示。



弓形

圓上一弦與其所對的弧所圍成的圖形稱為**弓形**。

如右圖，藍色區域的圖形是由弦 $\overline{AB}$ 與劣弧 $\widehat{AB}$ 所圍成，所以此圖形是弓形；黃色區域的圖形是由弦 $\overline{AB}$ 與優弧 $\widehat{ACB}$ 所圍成，所以此圖形也是弓形。



補給站 「圓」來如此

戰國時代《墨子·經上》：「圓，一中同長也。」這是中國歷史上最早對於圓的定義。意思是說：圓有一個圓心，圓心到圓周上各點的距離（即半徑）都相等。圓規在墨子之前早已被人們廣泛地使用，但給予圓精確的定義，則是墨子的貢獻。墨子對圓的定義與後來歐幾里得對圓的定義完全一致。

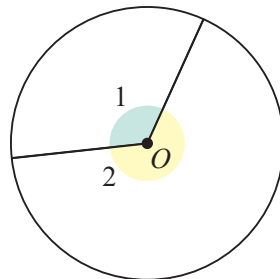


墨子 西元前 468～西元前 376

▶ 圓心角

以圓心為頂點，兩條半徑為邊，組成的角稱為**圓心角**。

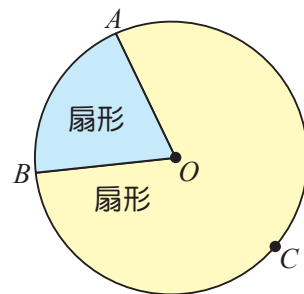
如右圖， $\angle 1$ 、 $\angle 2$ 都是圓心角。



▶ 扇形

圓的兩條半徑及所夾之弧所圍成區域的圖形稱為**扇形**。

如右圖，藍色區域的圖形是由兩個半徑 $\overline{OA}$ 、 $\overline{OB}$ 與劣弧 $\widehat{AB}$ 所圍成，此圖形即是扇形；黃色區域的圖形是由兩個半徑 $\overline{OA}$ 、 $\overline{OB}$ 與優弧 $\widehat{ACB}$ 所圍成，此圖形也是扇形。

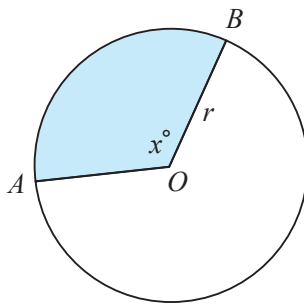


國小學過「圓周率＝圓周長÷直徑」，其值大約為 3.14，圓周率習慣以希臘字母「 π 」（讀作 派）表示。若用「 r 」表示半徑，則：

$$\text{圓面積} = \text{半徑} \times \text{半徑} \times \text{圓周率} = r \times r \times \pi = \pi r^2;$$

$$\text{圓周長} = \text{直徑} \times \text{圓周率} = 2 \times r \times \pi = 2\pi r。$$

那麼扇形面積與弧長該如何計算呢？一個周角是 360° ，將一個周角分成 360 等分，即可得到 1° 的圓心角。



- ① 圓心角為 1° 的扇形，其面積為圓面積的 $\frac{1}{360}$ ，即 $\pi r^2 \times \frac{1}{360}$ 。

圓心角為 x° 的扇形，其面積為圓面積的 $\frac{x}{360}$ ，即 $\pi r^2 \times \frac{x}{360}$ 。

- ② 圓心角為 1° 的扇形，其弧長為圓周長的 $\frac{1}{360}$ ，即 $2\pi r \times \frac{1}{360}$ 。

圓心角為 x° 的扇形，其弧長為圓周長的 $\frac{x}{360}$ ，即 $2\pi r \times \frac{x}{360}$ 。

例1 扇形圓心角和面積

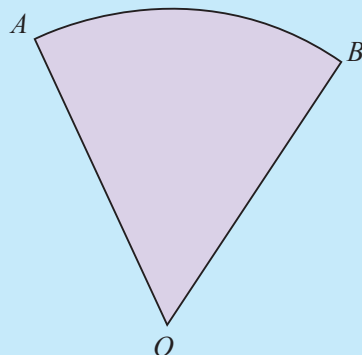
自評 P107 第 1 題

如圖，扇形 AOB 中，已知 $\overline{OA} = 6$ 公分，

且 $\widehat{AB}$ 的長為 2π 公分，求：

(1) $\angle AOB$ 。

(2) 扇形 AOB 面積。



解

(1) 設 $\angle AOB = x^\circ$ ，則

$$\text{扇形弧長} = 2 \times \pi \times 6 \times \frac{x}{360} = 2\pi, \text{ 得 } x = 60$$

$$\therefore \angle AOB = 60^\circ.$$

(2) 扇形 AOB 面積

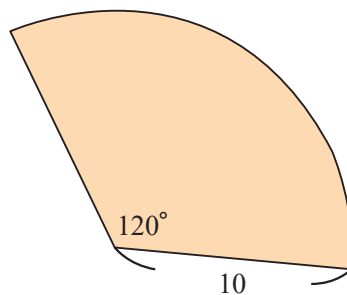
$$= \pi \times 6^2 \times \frac{60}{360}$$

$$= 6\pi \text{ (平方公分)}$$



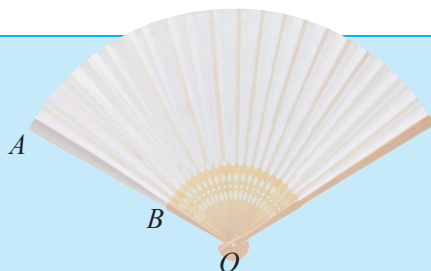
隨堂練習

如圖，有一扇形半徑為 10 公分，圓心角為 120° ，求此扇形的周長及面積。



例2 扇形的應用

有一把功夫扇，其骨柄長 $\overline{OA}=27$ 公分，扇面寬度 $\overline{AB}=18$ 公分，如圖。當功夫扇完全張開時，其圓心角為 120° ，求此時扇面的面積。



解

$$\because \overline{OB} = 27 - 18 = 9,$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{功夫扇的扇面面積} &= \text{以 } \overline{OA} \text{ 為半徑的扇形面積} - \text{以 } \overline{OB} \text{ 為半徑的扇形面積} \\ &= 27 \times 27 \times \pi \times \frac{120}{360} - 9 \times 9 \times \pi \times \frac{120}{360} \\ &= 243\pi - 27\pi \\ &= 216\pi (\text{平方公分}) \end{aligned}$$



利用計算機求 216π 的近似值：

數值	按法	螢幕顯示
216π	216 $\times$ SHIFT EXP =	678.584032



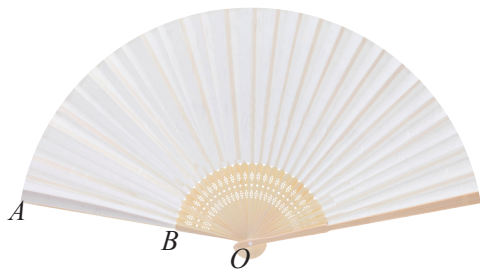
本教材使用之計算機，若需 π 功能，須先按 SHIFT 再按 EXP

所以扇面面積大約為 678.6 平方公分。



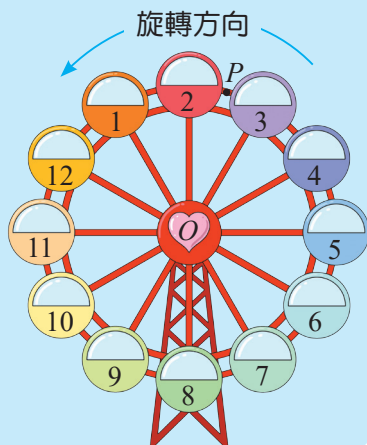
隨堂練習

有一把功夫扇，其骨柄長 $\overline{OA}=27$ 公分，扇面寬度 $\overline{AB}=18$ 公分，如圖。當功夫扇完全張開時，其圓心角為 160° ，求此時扇面的面積。（可使用計算機計算，並四捨五入取至小數點後第一位）



例3 圓弧長的應用

如圖，歡樂遊樂園裡的摩天輪，以 O 為圓心，半徑 $\overline{OP}=20$ 公尺。若以等間隔的方式設置 12 個車廂，車廂依順時針方向分別編號為 1 號到 12 號，且運行時以逆時針方向等速旋轉。目前 2 號車廂在最高點，則下一次 6 號車廂到達最高點時， P 點所掃過的弧長為多少公尺？（可使用計算機計算，並四捨五入取至小數點後第二位。）



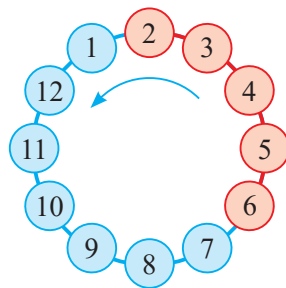
解

$\because 6-2=4, \therefore$ 需再旋轉 $\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$ (圈)

又摩天輪半徑為 20 公尺，

$\therefore$ 圓周長為 $2 \times \pi \times 20 = 40\pi$ (公尺)

故弧長 $= 40\pi \times \frac{1}{3} = \frac{40}{3}\pi \approx 41.89$ (公尺)。



輸入 40 $\div$ 3 $\times$ SHIFT EXP $=$ ，螢幕顯示



。

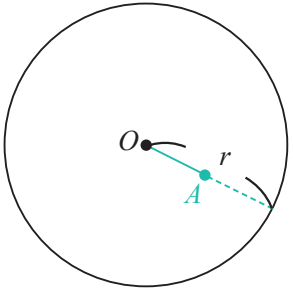
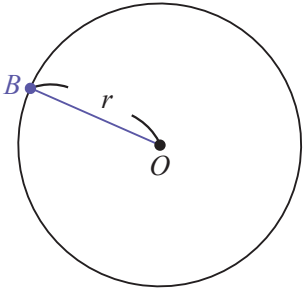
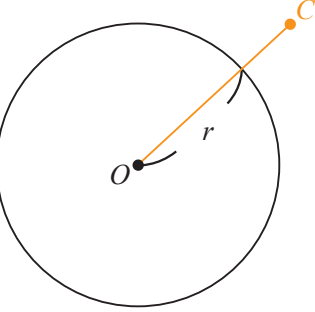


隨堂練習

承例3，若環繞一圈為 15 分鐘，則 P 點每分鐘所掃過的弧長是多少公尺？（可使用計算機計算，並四捨五入取至小數點後第二位）

2 點與圓的位置關係

一圓將所在的平面分成圓的內部、圓、圓的外部，由下表可知， A 點在圓內、 B 點在圓上、 C 點在圓外。要知道點與圓的位置關係，可以由此點到圓心的距離與半徑的大小關係來判斷。

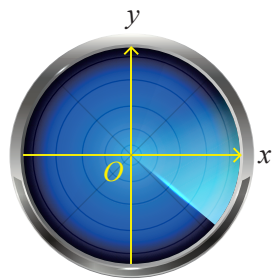
點與圓的位置關係	在圓內	在圓上	在圓外
圖示			
點到圓心的距離	小於半徑 ($\overline{OA} < r$)	等於半徑 ($\overline{OB} = r$)	大於半徑 ($\overline{OC} > r$)

隨堂練習

1. 已知圓 O 的半徑為 5， D 、 E 、 F 三點與此圓心 O 的距離分別為 4、5、8，判別 D 、 E 、 F 三點與圓 O 的位置關係：(填入圓內、圓上或圓外)

(1) D 點在 _____。 (2) E 點在 _____。 (3) F 點在 _____。

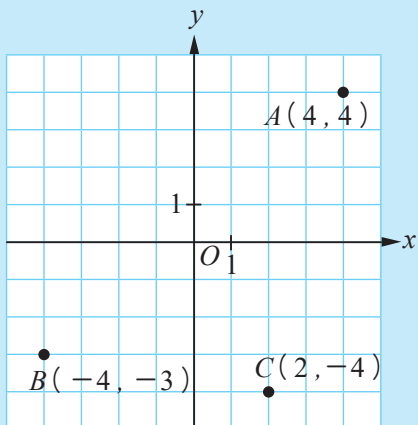
2. 如圖，一艘海巡船的雷達螢幕上可偵測到的最大距離為 8 個單位，即距離原點 O (海巡船的位置) 為 8 個單位以內 (含) 的漁船都可以顯示在螢幕上。若 A 、 B 兩艘漁船的坐標分別為 $(0, -9)$ 與 $(-7, 0)$ ，則哪艘漁船會顯示在螢幕上？



例4 點與圓的位置關係

自評 P107 第 2 題

如圖，坐標平面上 $A(4, 4)$ 、 $B(-4, -3)$ 、 $C(2, -4)$ 三點。若圓 O 的圓心是原點 O ，半徑為 5，判別 A 、 B 、 C 三點與圓 O 的位置關係。



解 $\because O(0, 0)$ 為圓心，由兩點距離公式可知：

$$(1) \overline{OA} = \sqrt{(4-0)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{32} > 5 \text{ (半徑)},$$

$\therefore A$ 點在圓外。

$$(2) \overline{OB} = \sqrt{(-4-0)^2 + (-3-0)^2} = 5 \text{ (半徑)},$$

$\therefore B$ 點在圓上。

$$(3) \overline{OC} = \sqrt{(2-0)^2 + (-4-0)^2} = \sqrt{20} < 5 \text{ (半徑)},$$

$\therefore C$ 點在圓內。

已知 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ ，則
 $\overline{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ 。



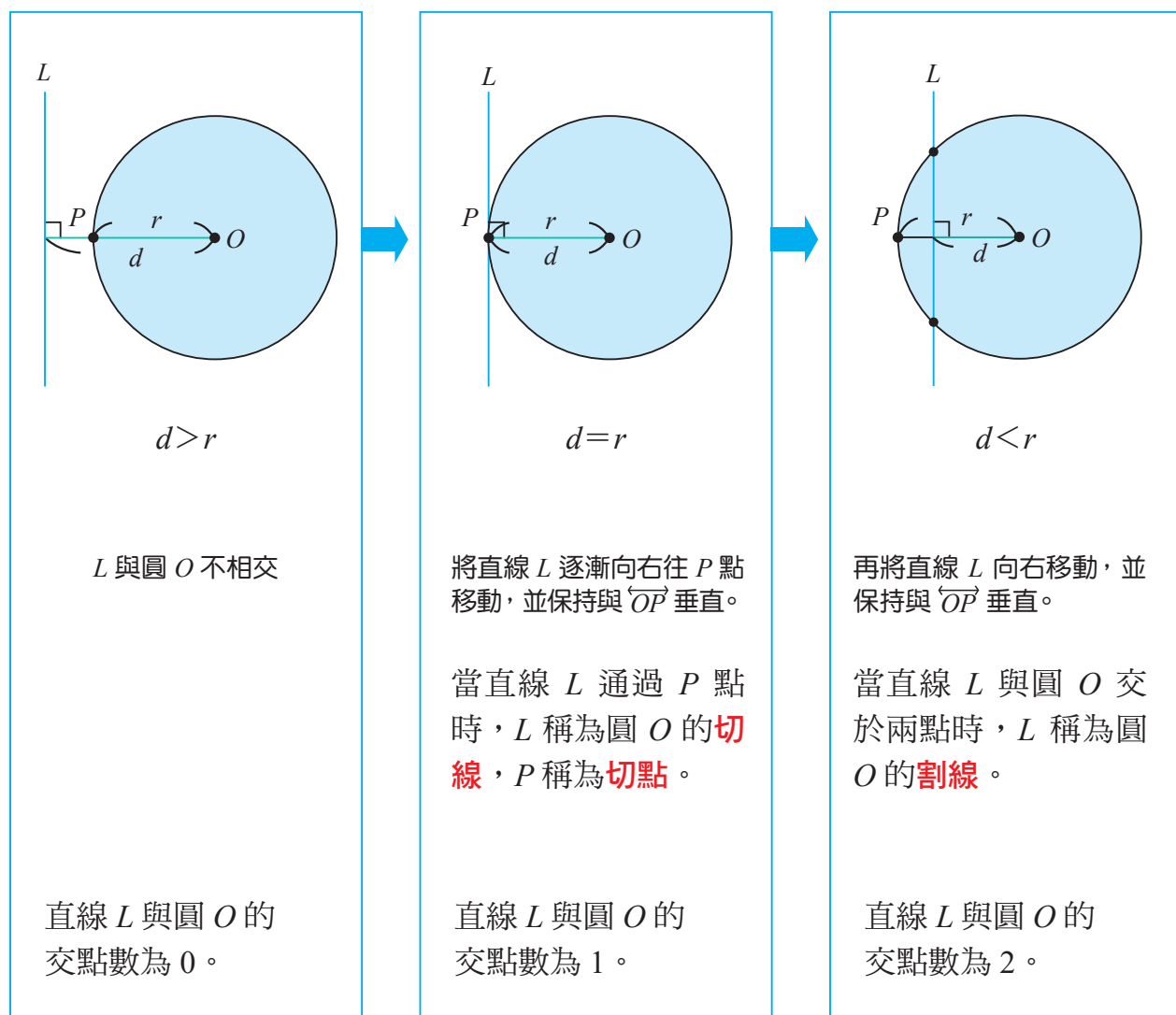
隨堂練習

在坐標平面上，若圓 O 的圓心在原點， $A(-5, 12)$ 在圓 O 上，求圓 O 的半徑。

3 直線與圓的位置關係

在平面上，一個圓與一條直線的位置關係有三種情形，我們透過直線 L 的移動來觀察直線與圓的位置關係。

如圖， $\overrightarrow{OP}$ 通過圓心 O ，交圓 O 於 P 點，且直線 L 垂直 $\overrightarrow{OP}$ 。其中 d 為點到直線 L 的距離， r 為圓 O 半徑。



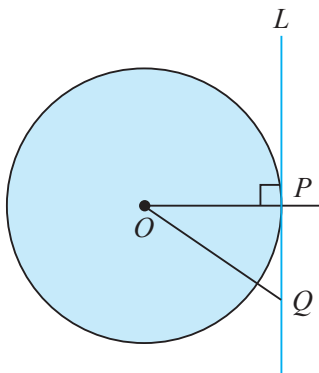
由上圖可觀察到，當直線 L 為圓 O 的切線，切點為 P ，則 $\overline{OP} \perp L$ 。

反過來看，若 P 為圓 O 上的點， L 為通過 P 點的直線且 $\overline{OP} \perp L$ ，那麼 L 是否為圓 O 的切線呢？

說明

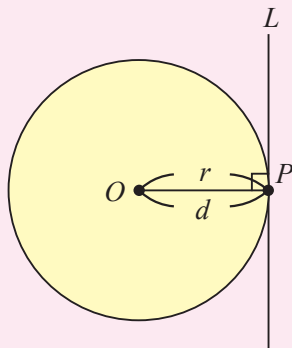
如右圖，已知直線 $L \perp \overline{OP}$ ，若在 L 上任取異於 P 的一點 Q ，則 O 、 P 、 Q 三點可形成一個直角三角形，其中 $\overline{OQ}$ 為斜邊，所以 $\overline{OQ} > \text{半徑 } \overline{OP}$ ，故 Q 點在圓外。

也就是說， L 與圓 O 不可能有除了 P 點之外的第二個交點，故 L 為圓 O 的切線。



圓與切線的關係

1. 一個圓的切線必垂直於圓心與切點的連線。
2. 圓心到切線的距離等於圓的半徑。

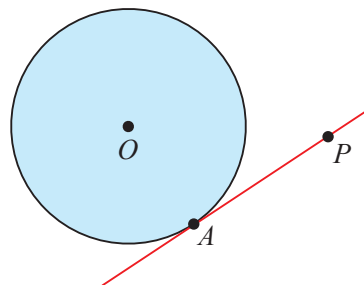


隨堂練習

自評 P108 第 3 題

圓 O 的半徑為 10，若圓心到三條直線 L_1 、 L_2 、 L_3 的距離分別為 5、10、13，則 L_1 、 L_2 、 L_3 與圓 O 分別有幾個交點？

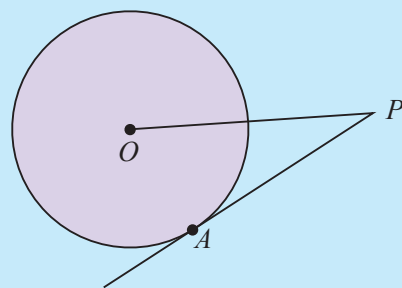
如圖，從圓外一點 P 作此圓的一條切線， A 為切點，則 $\overline{PA}$ 稱為 P 點到圓 O 的**切線段長**。



例5 求切線段長

自評 P108 第 4 題

如圖， $\overleftrightarrow{PA}$ 與圓 O 切於 A 點，已知圓 O 的半徑為 5， $\overline{OP}=10$ ，求切線段長 $\overline{AP}$ 。



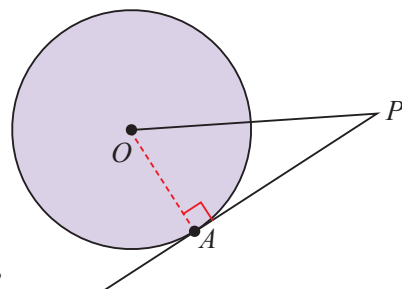
解 如圖，連接 $\overline{OA}$ 。

$\because \overleftrightarrow{PA}$ 與圓相切於 A 點，

$\therefore \overline{OA} \perp \overleftrightarrow{PA}$ ，故 $\triangle OPA$ 為直角三角形。

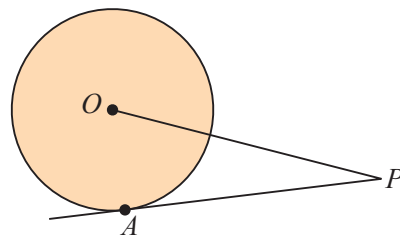
又 $\overline{OA}$ 為圓 O 的半徑， $\therefore \overline{OA}=5$ ，

根據畢氏定理： $\overline{AP} = \sqrt{\overline{OP}^2 - \overline{OA}^2} = \sqrt{10^2 - 5^2} = 5\sqrt{3}$ 。

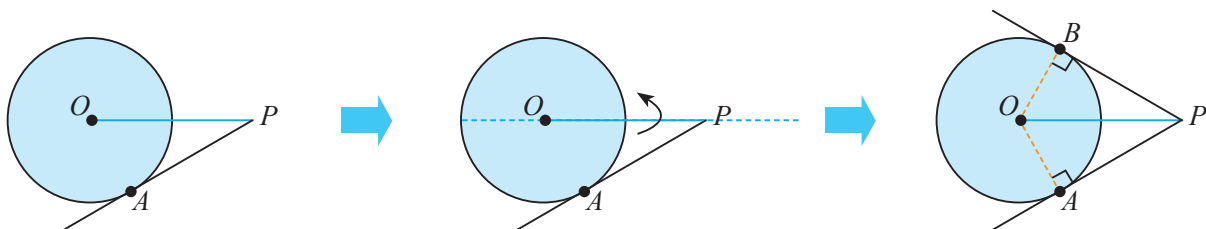


隨堂練習

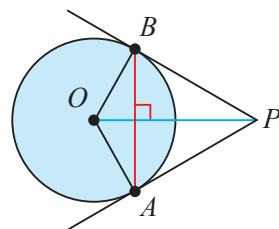
如圖， $\overleftrightarrow{AP}$ 與圓 O 切於 A 點，已知 $\overline{OP}=13$ ， $\overline{AP}=12$ ，求圓 O 的半徑。



我們曾經學過圓是線對稱圖形，任何一條通過圓心的直線都是圓的對稱軸，所以下圖中的 $\overleftrightarrow{OP}$ 為圓 O 的對稱軸。已知 $\overline{PA}$ 為圓 O 的切線， A 為切點，沿著 $\overleftrightarrow{OP}$ 對摺，可找到 A 點的對稱點 B ，因此 B 在圓上， $\overline{PB}$ 為圓 O 的切線， B 為切點，且 $\overline{PA} = \overline{PB}$ ， $\angle APO = \angle BPO$ ， $\triangle OBP$ 是 $\triangle OAP$ 的對稱圖形。



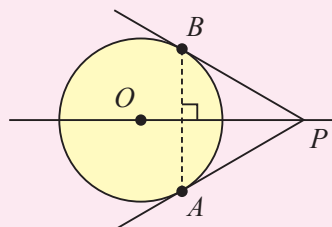
連接 $\overline{AB}$ 、 $\overline{OA}$ 、 $\overline{OB}$ ，則四邊形 $OAPB$ 為箏形，所以 $\overleftrightarrow{OP}$ 與 $\overline{AB}$ 會互相垂直，且 $\overleftrightarrow{OP}$ 會平分 $\overline{AB}$ ，如右圖。



過圓外一點的兩切線性質

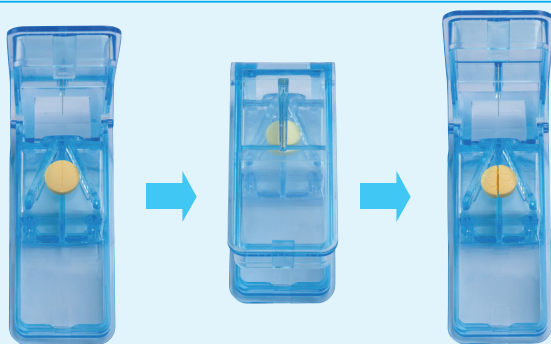
如圖， $\overline{PA}$ 、 $\overline{PB}$ 為圓 O 的兩條切線， A 、 B 為切點，則：

- (1) 過圓外一點 P 的兩切線段長相等，即 $\overline{PA} = \overline{PB}$ 。
- (2) $\angle APO = \angle BPO$ ，即 $\overleftrightarrow{OP}$ 平分 $\angle APB$ 。
- (3) $\overleftrightarrow{OP}$ 垂直平分 $\overline{AB}$ 。



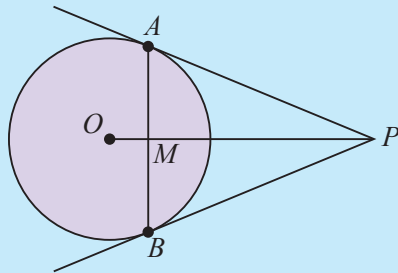
補給站 切藥器

服用藥物時，是否曾經遇過藥物需要切半，卻擔心切半時大小不均的困擾呢？藥局裡販售的切藥器，就是利用圖中刀片切下時，落在角平分線上，將圓形藥物分成大小均等的兩半。



例6 過圓外一點的切線應用

如圖， $\overrightarrow{PA}$ 、 $\overrightarrow{PB}$ 切圓 O 於 A 、 B 兩點， $\overline{OP}$ 與 $\overline{AB}$ 交於 M 點，若圓 O 半徑為 5， $\overline{OP}=13$ ，求 $\overline{AB}$ 。



解 如圖，連接 $\overline{OA}$ ，則 $\overline{OA}=5$ 。

$\because \overrightarrow{PA}$ 切圓 O 於 A 點，

$\therefore \angle OAP=90^\circ$ ，

則 $\triangle OAP$ 是直角三角形，

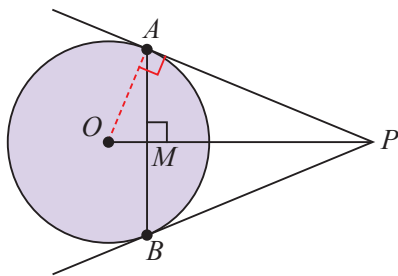
$$\overline{AP} = \sqrt{\overline{OP}^2 - \overline{OA}^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12。$$

又 $\overline{OP}$ 垂直平分 $\overline{AB}$ ， $\leftarrow$ 過圓外一點的兩切線性質

$\therefore \overline{AM}$ 是直角三角形 OAP 斜邊上的高，

$$\text{故 } \overline{AM} = \frac{\overline{OA} \times \overline{AP}}{\overline{OP}} = \frac{5 \times 12}{13} = \frac{60}{13}，$$

$$\text{因此 } \overline{AB} = 2 \overline{AM} = 2 \times \frac{60}{13} = \frac{120}{13}。$$

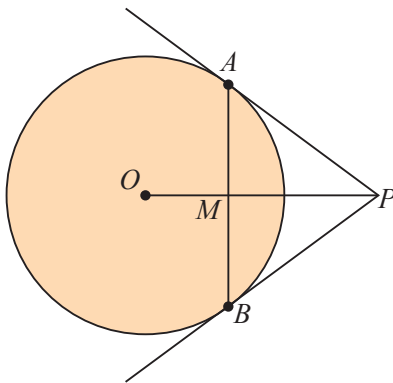


直角三角形斜邊上的高 = $\frac{\text{兩股乘積}}{\text{斜邊}}$



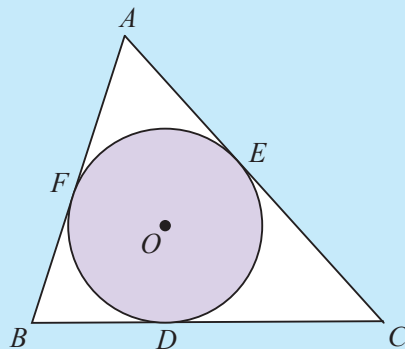
隨堂練習

如圖， $\overrightarrow{PA}$ 、 $\overrightarrow{PB}$ 切圓 O 於 A 、 B 兩點， $\overline{OP}$ 與 $\overline{AB}$ 相交於 M 點，若圓 O 半徑為 6， $\overline{AP}=8$ ，求 $\overline{AB}$ 。



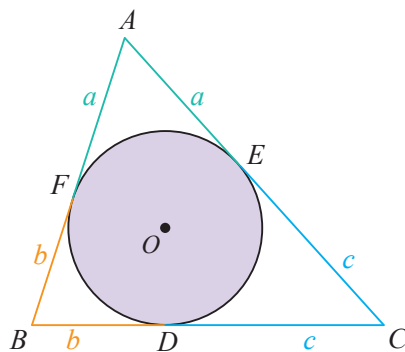
例7 切線段的應用

如圖， $\triangle ABC$ 三邊分別與圓 O 相切於 D 、 E 、 F 三點，已知 $\overline{AB}=7$ ， $\overline{BC}=8$ ， $\overline{AC}=9$ ，求 $\overline{AF}$ 。



解 $\because$ 圓外一點到此圓的兩切線段長相等，
 $\therefore$ 可令 $\overline{AF}=\overline{AE}=a$ ， $\overline{BF}=\overline{BD}=b$ ， $\overline{CE}=\overline{CD}=c$ 。
 $\because \overline{AB}+\overline{BC}+\overline{AC}=7+8+9=24$
 $(a+b)+(b+c)+(a+c)=24$
 $2a+2b+2c=24$
 $a+b+c=12 \leftarrow b+c=\overline{BC}=8$
 $a+8=12$
 $a=4$

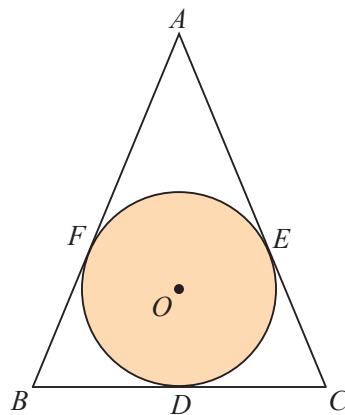
即 $\overline{AF}=4$ 。



隨堂練習

自評 P109 第 5 題

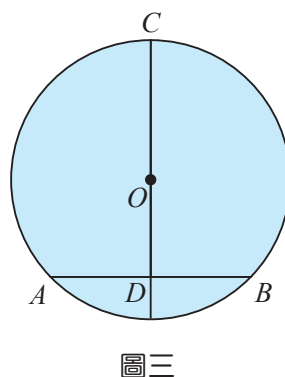
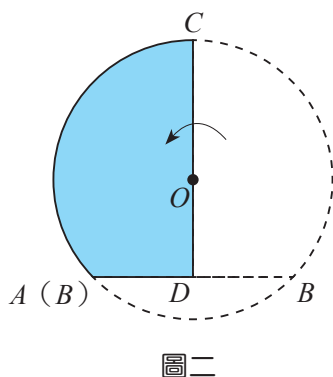
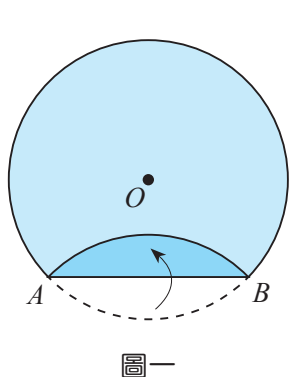
如圖， $\triangle ABC$ 三邊分別與圓 O 相切於 D 、 E 、 F 三點，已知 $\overline{AB}=\overline{AC}=13$ ， $\overline{BC}=10$ ，求 $\overline{AF}$ 。



弦與弦心距

接下來，我們將利用圓的線對稱性質來探討圓上一弦與圓心的相關性質。

拿出附件 8，摺出圓 O 的任意一弦 $\overline{AB}$ ，如圖一；接著將附件對摺，使得 B 點與 A 點疊合， $\overline{CD}$ 為摺痕，如圖二；再將附件攤平，如圖三。



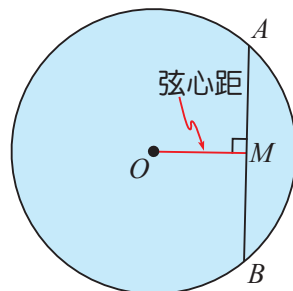
從上述摺疊的過程可以發現：

- (1) $\overline{CD}$ 為 $\overline{AB}$ 的中垂線，且 $\overline{CD}$ 會通過圓心。
- (2) 通過圓心與弦垂直的直線會平分此弦，即 $\overline{AD} = \overline{BD}$ 。

弦的性質

1. 弦的中垂線會通過圓心。
2. 通過圓心與弦垂直的直線會平分此弦。

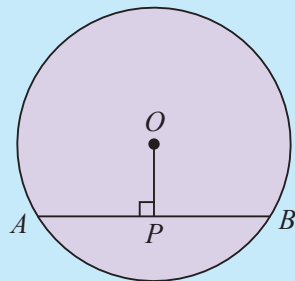
圓心到弦的距離稱為**弦心距**。如右圖， $\overline{AB}$ 為圓 O 的弦， $\overline{OM} \perp \overline{AB}$ 於 M 點，則 $\overline{OM}$ 稱為 $\overline{AB}$ 的弦心距，由上述可知 $\overline{OM}$ 垂直平分 $\overline{AB}$ 。



例8 弦心距的應用

自評 P109 第 6 題

如圖， $\overline{AB}$ 為圓 O 的一弦，若 $\overline{AB}$ 的弦心距 $\overline{OP}=3$ ， $\overline{AB}=6\sqrt{3}$ ，求圓 O 的半徑。



解

$\because \overline{OP}$ 為 $\overline{AB}$ 的弦心距，

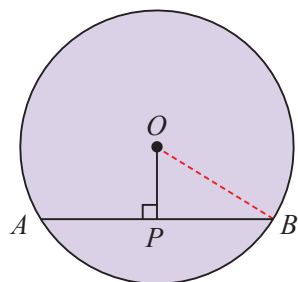
$\therefore \overline{OP}$ 垂直平分弦 $\overline{AB}$ ，

$$\overline{BP} = \frac{1}{2} \times \overline{AB} = \frac{1}{2} \times 6\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$$

連接 $\overline{OB}$ ，依據畢氏定理：

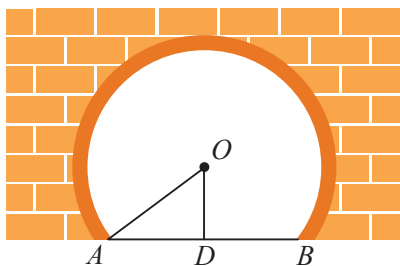
$$\overline{OB} = \sqrt{\overline{BP}^2 + \overline{OP}^2} = \sqrt{(3\sqrt{3})^2 + 3^2} = 6$$

故圓 O 的半徑為 6。



隨堂練習

如圖，為建造一條隧道，需要用潛盾機鑿開隧道孔。已知路寬 $\overline{AB}$ 為隧道截面圓 O 的一弦，若 $\overline{AB}$ 的弦心距為 3 公尺，路寬 $\overline{AB}=8$ 公尺，求圓 O 的半徑。

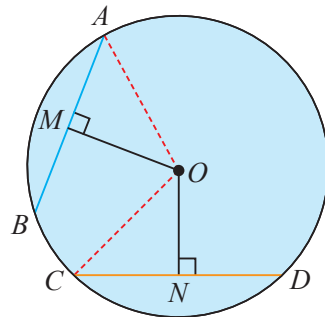


接下來，我們來探討在同圓中，弦長與弦心距之間的關係。

探索活動 等弦心距對等弦；大弦心距對小弦

1. 如圖一， $\overline{AB}$ 、 $\overline{CD}$ 為圓 O 上的兩弦， $\overline{OM}$ 、 $\overline{ON}$ 分別為 $\overline{AB}$ 、 $\overline{CD}$ 的弦心距。連接 $\overline{OA}$ 、 $\overline{OC}$ ，則 $\overline{OA} = \overline{OC}$ = 半徑。

(1) 若 $\overline{OM} = \overline{ON}$ ，可以利用畢氏定理得到 $\overline{AB} = \overline{CD}$ 嗎？

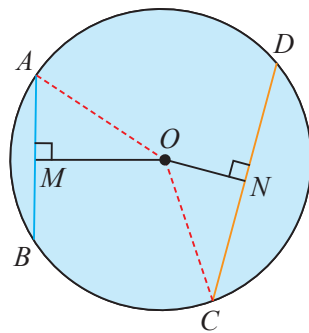


圖一

(2) 若 $\overline{AB} = \overline{CD}$ ，可以利用畢氏定理得到 $\overline{OM} = \overline{ON}$ 嗎？

2. 如圖二， $\overline{AB}$ 、 $\overline{CD}$ 為圓 O 上的兩弦， $\overline{OM}$ 、 $\overline{ON}$ 分別為 $\overline{AB}$ 、 $\overline{CD}$ 的弦心距。連接 $\overline{OA}$ 、 $\overline{OC}$ ，則 $\overline{OA} = \overline{OC}$ = 半徑。

(1) 若 $\overline{OM} > \overline{ON}$ ，則 $\overline{AB}$ 與 $\overline{CD}$ 的大小關係為何？



圖二

(2) 若 $\overline{AB} < \overline{CD}$ ，則 $\overline{OM}$ 與 $\overline{ON}$ 的大小關係為何？

**弦心距的性質**

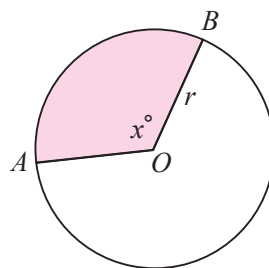
1. 在同圓或等圓中，弦心距相等，則所對應的弦等長；
反之，弦等長，則所對應的弦心距相等。
2. 在同圓或等圓中，弦心距愈長，則所對應的弦愈短；
反之，弦愈短，則所對應的弦心距愈長。

**隨堂練習**

1. 已知圓 O 的半徑為 10， $\overline{AB}$ 、 $\overline{CD}$ 為圓 O 上的兩弦， $\overline{OM}$ 、 $\overline{ON}$ 分別為 $\overline{AB}$ 、 $\overline{CD}$ 的弦心距，若 $\overline{AB}=12$ ， $\overline{CD}=16$ ，比較 $\overline{OM}$ 、 $\overline{ON}$ 的大小關係。
2. 圓 O 與圓 O' 為半徑相等的兩圓，則圓 O 與圓 O' 稱為等圓。已知 $\overline{AB}$ 、 $\overline{CD}$ 分別為圓 O 、圓 O' 兩等圓上的弦， $\overline{OM}$ 為 $\overline{AB}$ 的弦心距， $\overline{O'N}$ 為 $\overline{CD}$ 的弦心距，回答下列問題，並填入 $>$ 、 $=$ 、 $<$ ：
 - (1) 若 $\overline{OM}=\overline{O'N}$ ，則 $\overline{AB}$ _____ $\overline{CD}$ 。
 - (2) 若 $\overline{OM}<\overline{O'N}$ ，則 $\overline{AB}$ _____ $\overline{CD}$ 。
 - (3) 若 $\overline{AB}=\overline{CD}$ ，則 $\overline{OM}$ _____ $\overline{O'N}$ 。
 - (4) 若 $\overline{AB}>\overline{CD}$ ，則 $\overline{OM}$ _____ $\overline{O'N}$ 。

1 扇形的面積與弧長

圓心角為 x° 的扇形，其面積為圓面積的 $\frac{x}{360}$ ，即 $\pi r^2 \times \frac{x}{360}$ ；
其弧長為圓周長的 $\frac{x}{360}$ ，即 $2\pi r \times \frac{x}{360}$ 。



2 點與圓的位置關係

點與圓的位置關係	在圓內	在圓上	在圓外
圖示			
點到圓心的距離	小於半徑 ($\overline{OA} < r$)	等於半徑 ($\overline{OB} = r$)	大於半徑 ($\overline{OC} > r$)

3 直線與圓的位置關係

圖示			
圓心到直線的距離	$d > r$ L 與圓 O 不相交	$d = r$ 當 L 通過 P 點時， L 稱為圓 O 的切線， P 稱為切點。	$d < r$ 直線 L 與圓 O 交於兩點， L 稱為圓 O 的割線。
直線與圓的位置關係	不相交	只交於一點	交於兩點

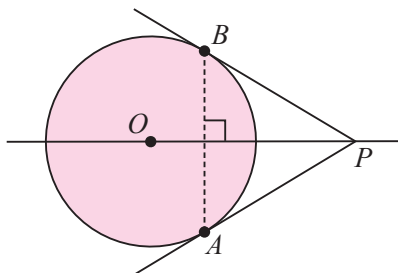
4 過圓外一點的兩切線性質

如圖， $\overrightarrow{PA}$ 、 $\overrightarrow{PB}$ 為圓 O 的兩條切線， A 、 B 為切點，則：

(1) 過圓外一點 P 的兩切線段長相等，即 $\overline{PA} = \overline{PB}$ 。

(2) $\angle APO = \angle BPO$ ，即 $\overrightarrow{OP}$ 平分 $\angle APB$ 。

(3) $\overrightarrow{OP}$ 垂直平分 $\overline{AB}$ 。



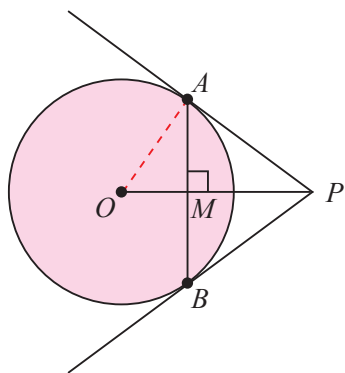
例 如圖， $\overrightarrow{PA}$ 、 $\overrightarrow{PB}$ 切圓 O 於 A 、 B 兩點，

$\overrightarrow{OP}$ 與 $\overline{AB}$ 交於 M 點，若圓 O 半徑為 9，

$\overline{OP} = 15$ ，則 $\overline{AP} = \sqrt{15^2 - 9^2} = 12$ ，

$$\overline{AM} = \frac{\overline{OA} \times \overline{AP}}{\overline{OP}} = \frac{9 \times 12}{15} = \frac{36}{5}，$$

$$\text{因此 } \overline{AB} = 2 \overline{AM} = \frac{2 \times 36}{5} = \frac{72}{5}。$$



5 弦與弦心距的性質

(1) 通過圓心與弦垂直的直線會平分此弦；弦的中垂線會通過圓心。

(2) 在同圓或等圓中，弦心距相等，則所對應的弦等長；

反之，弦等長，則所對應的弦心距相等。

(3) 在同圓或等圓中，弦心距愈長，則所對應的弦愈短；

反之，弦愈短，則所對應的弦心距愈長。

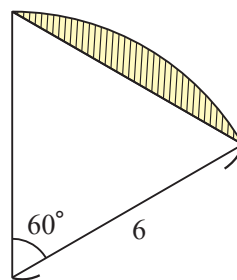
例 已知圓 O 的半徑為 10， $\overline{AB}$ 、 $\overline{CD}$ 為圓 O 上的兩弦，

$\overline{OM}$ 、 $\overline{ON}$ 分別為 $\overline{AB}$ 、 $\overline{CD}$ 的弦心距，若 $\overline{AB} = 12$ ，

$\overline{CD} = 16$ ，則 $\overline{OM} > \overline{ON}$ 。

- ①如圖，已知扇形的半徑為 6 公分，圓心角為 60° ，則斜線區域面積為多少平方公分？

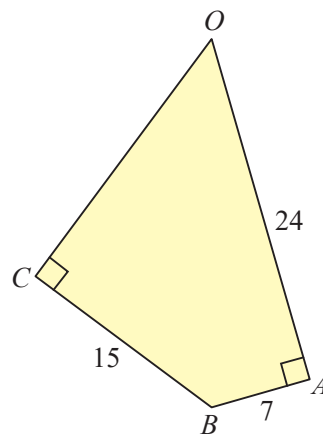
課 P90 例 1



- ②如圖，四邊形 $OABC$ 中， $\angle A$ 和 $\angle C$ 均為直角， $\overline{OA}=24$ ， $\overline{AB}=7$ ， $\overline{BC}=15$ ，回答下列問題：

課 P94 例 4

- (1) 求 $\overline{OC}$ 。
- (2) 若以 O 點為圓心， $\overline{OA}$ 為半徑畫圓，則 A 、 B 、 C 三點會分別落在圓內、圓上或圓外？



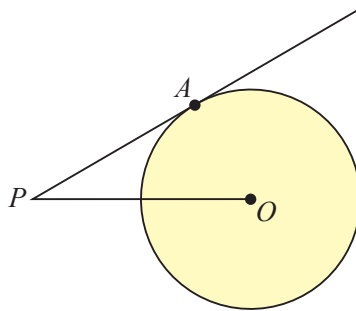
③ 已知圓 O 的直徑為 10，圓心 O 到三條直線 L_1 、 L_2 、 L_3 的距離分別為 3、5、7，
回答下列問題：

課 P96 隨堂

- (1) 這三條直線中，哪一條是切線？哪一條是割線？
- (2) 若直線 M 恰好與圓 O 交於一點，求圓心 O 到直線 M 的距離。

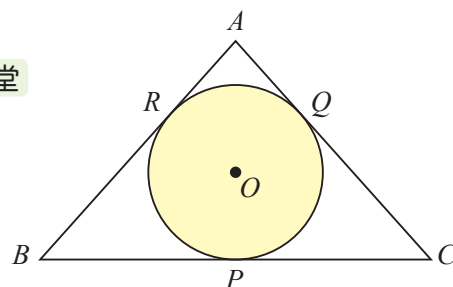
④ 如圖， $\overleftrightarrow{AP}$ 與圓 O 切於 A 點，已知圓 O 的半徑為 6，
 $\overline{PO} = 12$ ，求 $\overline{PA}$ 及 $\triangle OPA$ 的面積。

課 P97 例 5



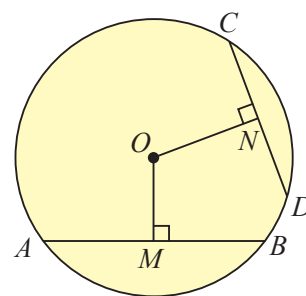
- ⑤ 如圖，等腰三角形 ABC 與圓 O 相切於 P 、 Q 、 R 三點，已知 $\overline{AB} = \overline{AC} = 3$ ， $\overline{BC} = 4$ ，求 $\overline{AR}$ 。

課 P100 隨堂



- ⑥ 如圖， $\overline{AB}$ 、 $\overline{CD}$ 為圓 O 上的兩弦， $\overline{OM}$ 、 $\overline{ON}$ 分別為 $\overline{AB}$ 、 $\overline{CD}$ 的弦心距，若 $\overline{AB} = 16$ ， $\overline{OM} = 6$ ， $\overline{ON} = 8$ ，求 $\overline{CD}$ 。

課 P102 例 8

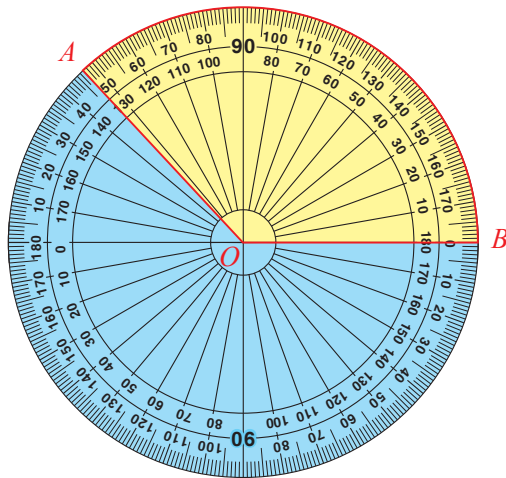


2-2 圓心角與圓周角

1 圓心角與弧的度數

在上一節中，已學過圓心角的定義以及扇形的弧長。當計算弧長時，會用到所對的圓心角，因此我們用圓心角的度數來表示弧的度數。

如圖，整個圓周被分成 360 等分的弧，其中每一等分的弧所對的圓心角剛好是 1° ，我們就稱每一等分弧的度數為 1° 。 $\widehat{AB}$ 是圓心角 $\angle AOB$ 所對的弧，所以 $\widehat{AB}$ 的度數 $= \angle AOB = 133^\circ$ 。



弧的度數

弧的度數就是該弧所對圓心角的度數。

$\widehat{AB}$ 除了可以表示弧本身，也可以有下列兩種意義：

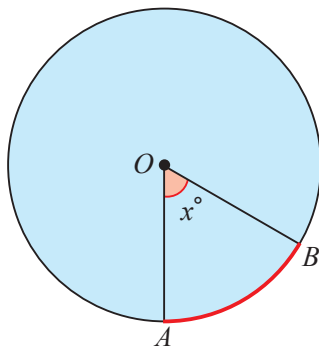
(1) $\widehat{AB}$ 的度數；(2) $\widehat{AB}$ 的長度。

我們知道，當 $\widehat{AB}$ 所對的圓心角為 x° 時，

則 $\widehat{AB}$ 的長度 $= \text{圓周長} \times \frac{x}{360}$ 。

由於同圓或等圓的圓周長相等，因此可推得：

(1) 度數相等的兩弧等長。(2) 若兩弧等長，則它們所對弧的度數也相等。



等圓心角對等弧

在同圓或等圓中，度數相等的兩弧等長；如果兩弧等長，則它們所對的圓心角也相等。

探索活動 等圓心角對等弦

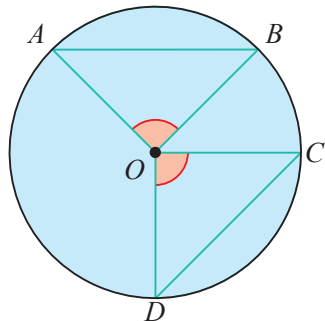
可搭配附件 4 操作

1. 如圖， $\overline{AB}$ 、 $\overline{CD}$ 為圓 O 的兩弦，利用下列步驟，判別同圓或等圓中，若圓心角相等，它們所對應的弦長關係，並回答下列問題：

(1) 已知 $\angle AOB = \angle COD$ ，利用附件 4-1，以 O 點為旋轉中心，將 $\triangle AOB$ 旋轉，是否能使 $\triangle AOB$ 與 $\triangle COD$ 完全疊合？

(2) 寫出 $\triangle AOB \cong \triangle COD$ 是依據哪一個全等性質？

(3) $\overline{AB}$ 、 $\overline{CD}$ 是否等長？

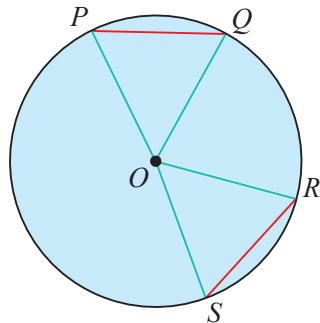


2. 如圖， $\overline{PQ}$ 、 $\overline{RS}$ 為圓 O 的兩弦，利用下列步驟，判別同圓或等圓中，若弦長相等，它們所對應的圓心角關係，並回答下列問題：

(1) 已知 $\overline{PQ} = \overline{RS}$ ，利用附件 4-2，以 O 點為旋轉中心，將 $\triangle POQ$ 旋轉，是否能使 $\triangle POQ$ 與 $\triangle ROS$ 完全疊合？

(2) 寫出 $\triangle POQ \cong \triangle ROS$ 是依據哪一個全等性質？

(3) $\angle POQ$ 、 $\angle ROS$ 是否相等？



等圓心角對等弦

在同圓或等圓中，如果兩圓心角相等，則它們所對的弦等長；
反之，如果兩弦等長，則它們所對的圓心角相等。

由「等圓心角對等弧」、「等圓心角對等弦」可以得到下面結論：

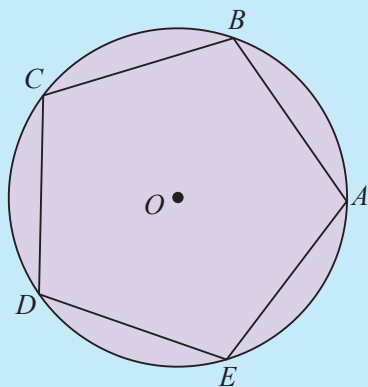
等弦對等弧

在同圓或等圓中，如果兩弧的度數相等，則它們所對的弦等長；
反之，如果兩弦等長，則它們所對的弧度數相等。

例1 弧的度數

自評 P125 第 1 題

如圖，正五邊形 $ABCDE$ 的頂點均在圓 O 上，
求 $\widehat{AB}$ 的度數。



解

$\because ABCDE$ 為正五邊形

$$\therefore \overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DE} = \overline{AE}$$

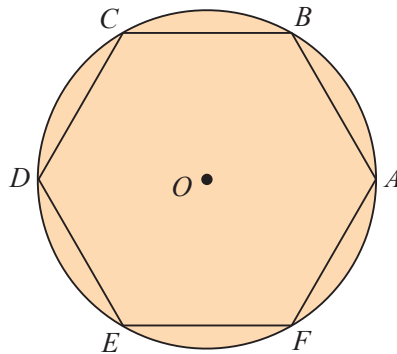
可得 $\widehat{AB} = \widehat{BC} = \widehat{CD} = \widehat{DE} = \widehat{AE}$ ，

$$\text{故 } \widehat{AB} = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ。$$



隨堂練習

如圖，已知正六邊形 $ABCDEF$ 的頂點均在圓 O 上，
求 $\widehat{AC}$ 的度數。



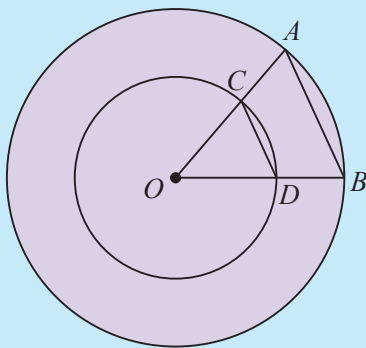
若兩圓的半徑不同時，度數相等的圓心角所對的弧長並不相等，那麼半徑與弧、弦有什麼關係呢？

例2 半徑與弦、弧的關係

自評 P125 第 2 題

如圖，兩同心圓中，大圓的半徑為 5，小圓的半徑為 3， $\angle AOB = 50^\circ$ ，求：

- (1) $\widehat{AB}$ 的度數： $\widehat{CD}$ 的度數。
- (2) $\widehat{AB}$ 的長度： $\widehat{CD}$ 的長度。
- (3) $\overline{AB} : \overline{CD}$ 。



解

$$(1) \because \widehat{AB} \text{ 的度數} = \angle AOB = 50^\circ,$$

$$\widehat{CD} \text{ 的度數} = \angle COD = 50^\circ,$$

$$\therefore \widehat{AB} \text{ 的度數} : \widehat{CD} \text{ 的度數} = \angle AOB : \angle COD = 50^\circ : 50^\circ = 1 : 1.$$

$$(2) \widehat{AB} \text{ 的長度} : \widehat{CD} \text{ 的長度} = (2 \times 5 \times \pi \times \frac{50}{360}) : (2 \times 3 \times \pi \times \frac{50}{360}) = 5 : 3.$$

(3) 在 $\triangle AOB$ 和 $\triangle COD$ 中，

$$\because \angle AOB = \angle COD, \overline{OA} : \overline{OC} = \overline{OB} : \overline{OD} = 5 : 3,$$

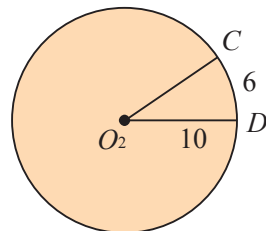
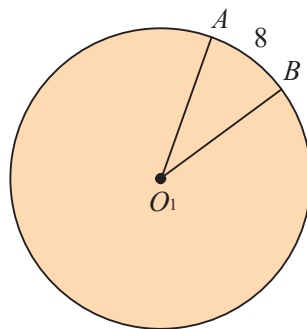
$$\therefore \triangle AOB \sim \triangle COD \text{ (SAS 相似性質)},$$

$$\text{故 } \overline{AB} : \overline{CD} = 5 : 3 \text{ (對應邊成比例)}.$$



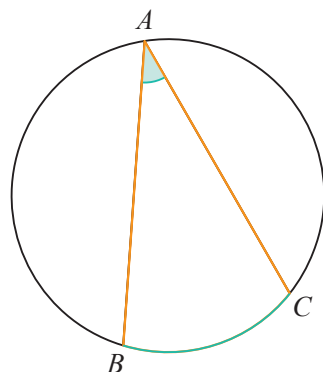
隨堂練習

如圖，已知 $\widehat{AB}$ 的長度為 8， $\widehat{CD}$ 的長度為 6，且 $\angle AO_1B = \angle CO_2D$ ，若圓 O_2 的半徑為 10，求圓 O_1 的半徑。



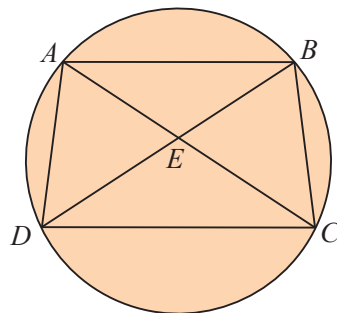
2 圓周角及其所對的弧

圓上一點和通過此點的兩弦所形成的角稱為**圓周角**。
如圖， A 為圓上一點， $\angle BAC$ 為 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 兩弦所形成的角，則 $\angle BAC$ 為 $\widehat{BC}$ 所對的圓周角，而 $\widehat{BC}$ 為 $\angle BAC$ 所對的弧。



隨堂練習

如右圖， $\widehat{BC}$ 所對的圓周角有哪些？



前面學過，圓心角的度數等於它所對弧的度數，那麼圓周角的度數和它所對弧的度數有什麼關係呢？

下面依照一個圓的圓心和圓周角的三種位置關係討論：

① 圓心 O 在圓周角 $\angle A$ 的一邊上時：

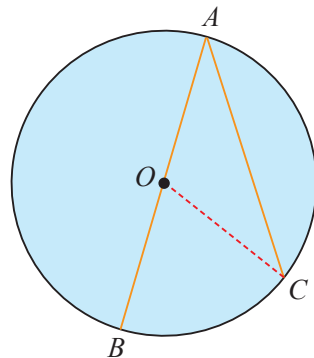
如右圖，連接 $\overline{OC}$ 。

$$\because \overline{OA} = \overline{OC}, \therefore \angle C = \angle A.$$

因此 $\angle BOC = \angle A + \angle C$ (外角定理)

$$= 2\angle A$$

$$\text{故 } \angle A = \frac{1}{2} \angle BOC = \frac{1}{2} \widehat{BC}.$$



② 圓心 O 在圓周角 $\angle BAC$ 的內部時：

如右圖，作直徑 $\overline{AD}$ 。

根據①的結果，可推得：

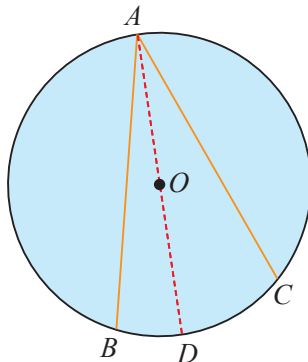
$$\angle BAD = \frac{1}{2} \widehat{BD}, \quad \angle CAD = \frac{1}{2} \widehat{CD},$$

因此 $\angle BAC = \angle BAD + \angle CAD$

$$= \frac{1}{2} \widehat{BD} + \frac{1}{2} \widehat{CD}$$

$$= \frac{1}{2} (\widehat{BD} + \widehat{CD})$$

$$= \frac{1}{2} \widehat{BC}$$



③ 圓心 O 在圓周角 $\angle BAC$ 的外部時：

如右圖，作直徑 $\overline{AD}$ 。

根據①的結果，可推得：

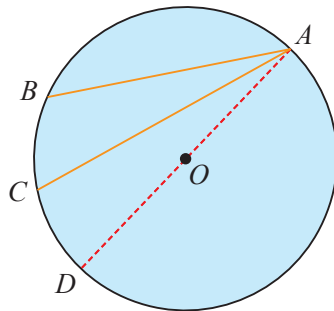
$$\angle BAD = \frac{1}{2} \widehat{BD}, \quad \angle CAD = \frac{1}{2} \widehat{CD},$$

因此 $\angle BAC = \angle BAD - \angle CAD$

$$= \frac{1}{2} \widehat{BD} - \frac{1}{2} \widehat{CD}$$

$$= \frac{1}{2} (\widehat{BD} - \widehat{CD})$$

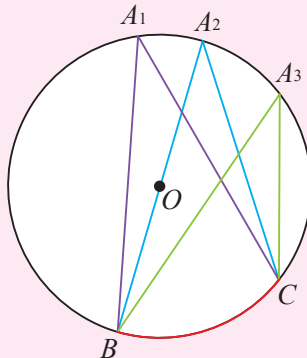
$$= \frac{1}{2} \widehat{BC}$$



圓周角的度數

1. 一弧所對的圓周角度數，等於此弧度數的一半，也是該弧所對圓心角度數的一半。
2. 同一個圓中，一弧所對的所有圓周角的度數都相等。

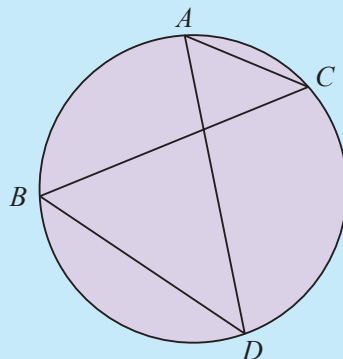
如圖， $\angle A_1 = \angle A_2 = \angle A_3 = \frac{1}{2} \widehat{BC}$ 。



例3 由弧的度數求圓周角

自評 P126 第 3 題

如圖，已知 $\widehat{AB}$ 的長是圓周長的 $\frac{1}{4}$ ，
求 $\angle ACB$ 與 $\angle ADB$ 。



解

$\because \widehat{AB}$ 的長是圓周長的 $\frac{1}{4}$ ，

$$\therefore \widehat{AB} = \frac{1}{4} \times 360^\circ = 90^\circ,$$

又 $\angle ACB$ 和 $\angle ADB$ 均為 $\widehat{AB}$ 所對的圓周角，

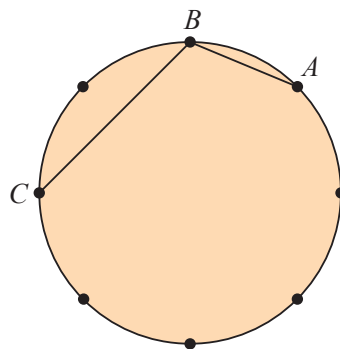
$$\therefore \angle ACB = \angle ADB = \frac{1}{2} \widehat{AB} = \frac{1}{2} \times 90^\circ = 45^\circ.$$



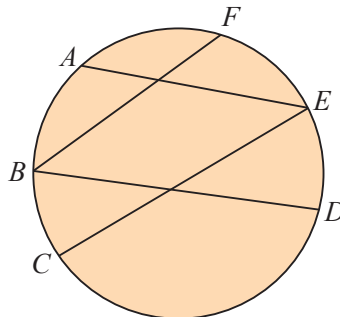
隨堂練習

自評 P126 第 4 題

1. 如圖， A 、 B 、 C 為圓上 8 個等分點中的 3 個點，
求 $\angle ABC$ 。

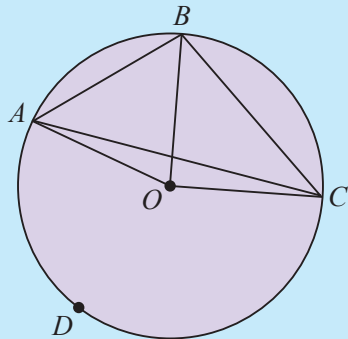


2. 如圖， A 、 B 、 C 、 D 、 E 、 F 為圓上六個點，已知
 $\widehat{AF} = 60^\circ$ ， $\widehat{CD} = 130^\circ$ ，求 $\angle B + \angle E = ?$



例4 由圓周角求弧的度數

如圖， $\triangle ABC$ 的頂點均在圓 O 上，
已知 $\angle BAC = 45^\circ$ ， $\angle ABC = 100^\circ$ ，
求 $\widehat{BC}$ 與 $\widehat{ABC}$ 的度數。

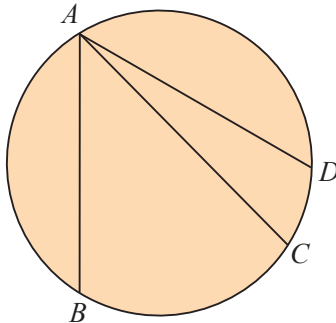


- 解 (1) $\because \angle BAC$ 為 $\widehat{BC}$ 所對的圓周角，
 $\therefore \angle BAC = \frac{1}{2} \widehat{BC}$ ，
 $\widehat{BC} = 2\angle BAC = 2 \times 45^\circ = 90^\circ$ 。
- (2) $\because \angle ABC$ 為 $\widehat{ADC}$ 所對的圓周角，
 $\therefore \angle ABC = \frac{1}{2} \widehat{ADC}$ ，
 $\widehat{ADC} = 2\angle ABC = 2 \times 100^\circ = 200^\circ$ ，
 即 $\widehat{ABC} = 360^\circ - \widehat{ADC}$
 $= 360^\circ - 200^\circ$
 $= 160^\circ$ 。



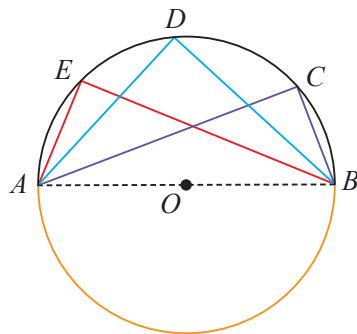
隨堂練習

如圖， A 、 B 、 C 、 D 為圓上四個點，已知 $\angle BAD = 60^\circ$ ，
 $\widehat{BC} = 90^\circ$ ，求 $\widehat{CD}$ 的度數。

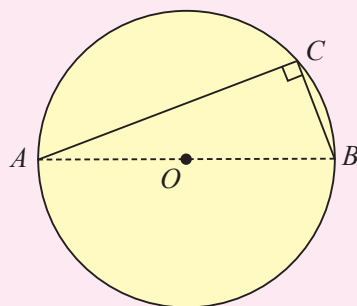


自評 P127 第 5 題

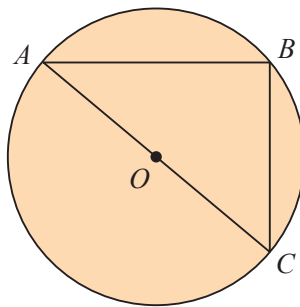
前面學過，一弧所對的圓周角度數，等於此弧度數的一半，如圖，當 $\overline{AB}$ 為直徑時， $\widehat{AB} = 180^\circ$ ，故圓周角 $\angle ACB = \frac{1}{2} \widehat{AB} = \frac{1}{2} \times 180^\circ = 90^\circ$ 。
 又 $\angle ACB$ 、 $\angle ADB$ 與 $\angle AEB$ 皆為 $\widehat{AB}$ 所對的圓周角，
 $\therefore \angle ACB = \angle ADB = \angle AEB = 90^\circ$ 。


 半圓的圓周角

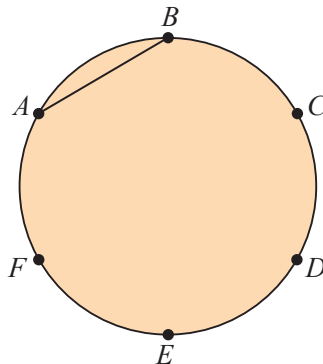
半圓所對的圓周角是直角。


 隨堂練習

1. 如圖， $\overline{AC}$ 為圓 O 的直徑， B 為圓周上一點，若 $\angle BAC = 40^\circ$ ，求 $\angle ACB$ 。

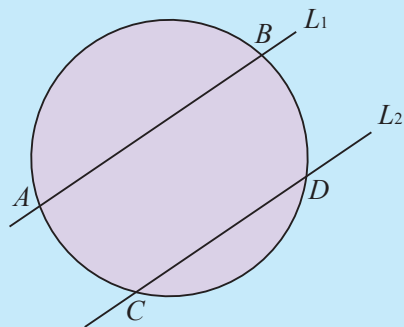


2. 如圖， A 、 B 、 C 、 D 、 E 、 F 為圓上 6 個等分點，作出所有以 $\overline{AB}$ 為一邊，且頂點皆在圓上的直角三角形。



例5 平行線截等弧

如圖，兩條平行線 L_1 和 L_2 在圓上截出 $\widehat{AC}$ 和 $\widehat{BD}$ ，說明 $\widehat{AC} = \widehat{BD}$ 。



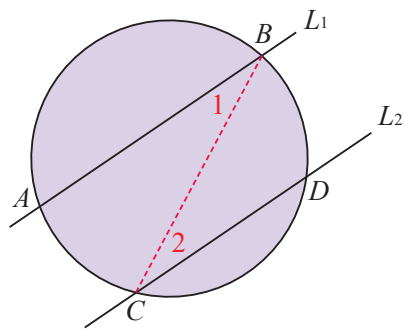
說明

如圖，連接 $\overline{BC}$ 。

$\because L_1 \parallel L_2, \therefore \angle 1 = \angle 2$ (內錯角相等)。

$$\angle 1 = \frac{1}{2} \widehat{AC}, \angle 2 = \frac{1}{2} \widehat{BD},$$

故 $\widehat{AC} = \widehat{BD}$ 。

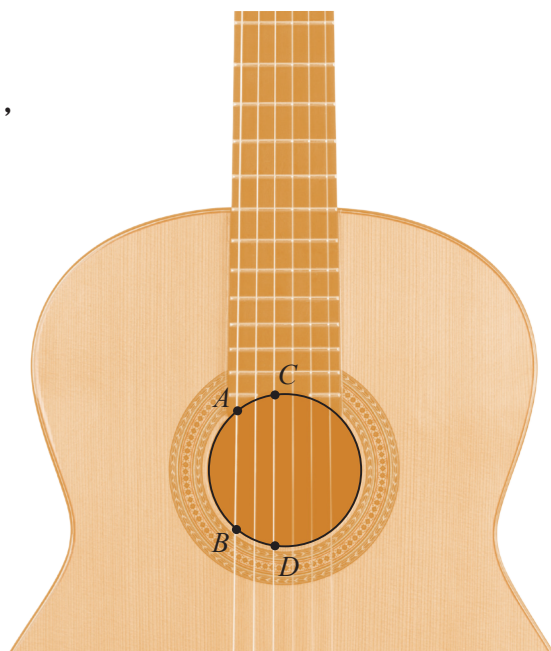


平行線截等弧

若兩條直線平行，則此兩條平行線在圓上所截出的兩弧度數相等。

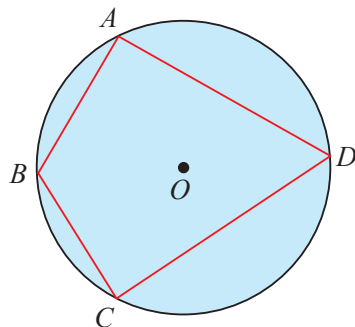
隨堂練習

如圖，古典吉他的弦與圓形音孔截出 $\widehat{AC}$ 和 $\widehat{BD}$ ，且兩弧的度數相等，說明 $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$ 。



3 圓內接四邊形

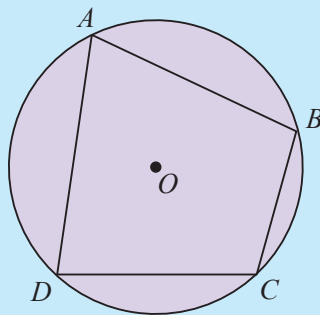
如圖，在圓上取 A 、 B 、 C 、 D 四個點，連接 $\overline{AB}$ 、 $\overline{BC}$ 、 $\overline{CD}$ 、 $\overline{DA}$ ，則四邊形 $ABCD$ 稱為圓 O 的**內接四邊形**，而圓 O 稱為四邊形 $ABCD$ 的**外接圓**。



接著討論圓內接四邊形的一些性質。

例6 圓內接四邊形對角互補

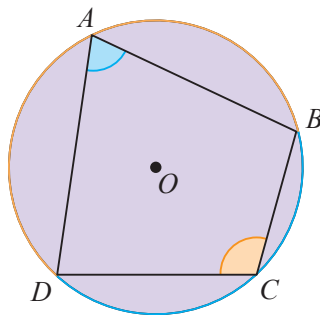
如圖，四邊形 $ABCD$ 為圓 O 的內接四邊形，說明 $\angle A + \angle C = 180^\circ$ ， $\angle B + \angle D = 180^\circ$ 。



說明

$$\begin{aligned}
 &\because \angle A \text{ 所對的弧為 } \widehat{BCD}, \angle C \text{ 所對的弧為 } \widehat{BAD}, \\
 &\therefore \angle A + \angle C = \frac{1}{2} \widehat{BCD} + \frac{1}{2} \widehat{BAD} \\
 &\quad = \frac{1}{2} (\widehat{BCD} + \widehat{BAD}) \\
 &\quad = \frac{1}{2} \times 360^\circ \\
 &\quad = 180^\circ
 \end{aligned}$$

同理， $\angle B + \angle D = 180^\circ$ 。



圓內接四邊形

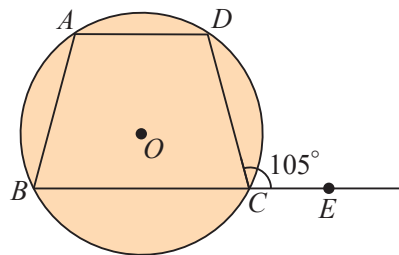
圓內接四邊形的對角互補。



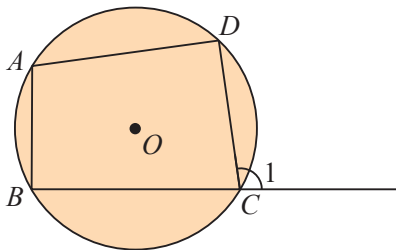
隨堂練習

自評 P127 第 6 題

1. 如圖，四邊形 $ABCD$ 為圓 O 的內接四邊形， E 點在 $\overline{BC}$ 的延長線上，已知 $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ， $\angle DCE = 105^\circ$ ，求 $\angle A$ 與 $\angle B$ 。



2. 如圖，四邊形 $ABCD$ 為圓 O 的內接四邊形， $\angle 1$ 為 $\angle BCD$ 的外角，完成下列空格來說明 $\angle A = \angle 1$ 。



說明

$\because$ 四邊形 $ABCD$ 為圓 O 的內接四邊形，

$\therefore \angle A + \underline{\hspace{2cm}} = 180^\circ$ ，

又 $\angle 1$ 為 $\angle BCD$ 的外角，

$\therefore \angle 1 + \angle BCD = \underline{\hspace{2cm}}$ 度，

故 $\angle A = \angle 1$ 。

由 隨堂練習 可知：圓內接四邊形的任一個外角，等於其相鄰內角的對角。



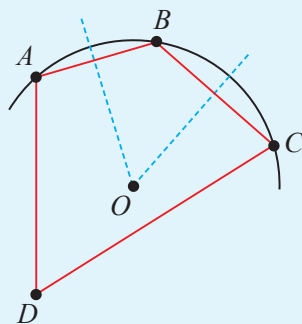
補給站

四邊形不一定有外接圓

由前面的學習可知，圓內接四邊形的對角互補，我們也可以證得對角互補的四邊形必定會有外接圓。

如右圖，已知四邊形 $ABCD$ 的對角互補，作 $\overline{AB}$ 與 $\overline{BC}$ 的中垂線交於 O 點，可得 $\overline{OA} = \overline{OB}$ 、 $\overline{OB} = \overline{OC}$ （中垂線性質），所以 $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC}$ 。

因此，以 O 點為圓心， $\overline{OA}$ 為半徑畫圓，則圓 O 必通過 A 、 B 、 C 三點。此時圓 O 也會通過頂點 D 嗎？

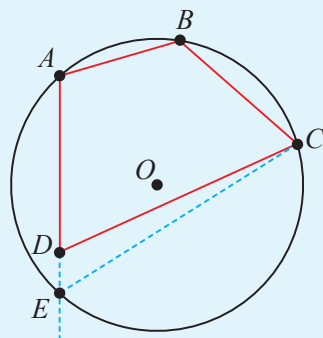


❶ 若 D 點在圓內，則 $\angle D + \angle B > 180^\circ$ ：

如圖，延長 $\overline{AD}$ 交圓於 E 點，連接 $\overline{CE}$ 。

$$\because \angle ADC > \angle E,$$

$$\therefore \angle ADC + \angle B > \angle E + \angle B = 180^\circ.$$

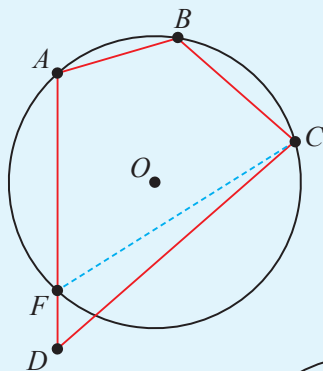


❷ 若 D 點在圓外，則 $\angle D + \angle B < 180^\circ$ ：

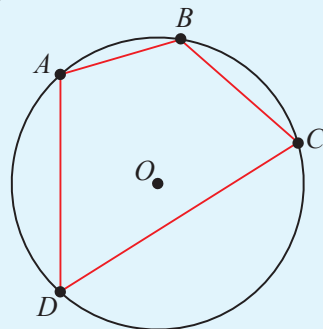
如圖，設 $\overline{AD}$ 交圓 O 於 F 點，連接 $\overline{CF}$ 。

$$\because \angle AFC > \angle D,$$

$$\therefore \angle AFC + \angle B = 180^\circ > \angle D + \angle B.$$

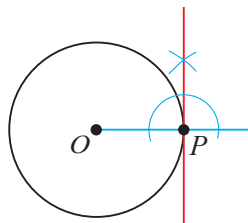


由❶、❷可知，當 D 點在圓內或圓外時，其結果與四邊形 $ABCD$ 對角互補的條件不合。因此， D 點不在圓內，也不在圓外，故 D 點必在圓 O 上，如右圖。



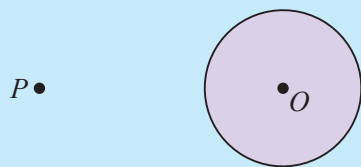
由上面的分析可知：若四邊形 $ABCD$ 的對角互補，則此四邊形有外接圓。

如圖，如果 P 點在圓 O 上，要畫出通過 P 點的切線，只要先作 $\overline{OP}$ ，再作通過 P 點且與 $\overline{OP}$ 垂直的直線即可。但如果 P 點在圓 O 外，要如何畫出切線呢？



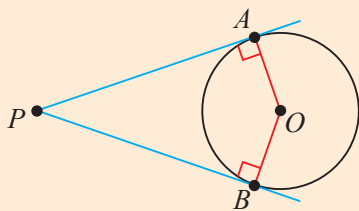
例7 過圓外一點作圓的切線

如圖， P 為圓 O 外的一點，利用尺規作圖，畫出通過 P 點且與圓 O 相切的直線。



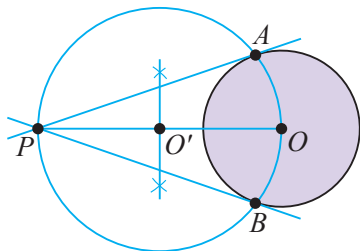
思路分析

如圖，若 $\overline{PA}$ 、 $\overline{PB}$ 為圓 O 的兩切線段，則 $\overline{OA} \perp \overline{PA}$ 、 $\overline{OB} \perp \overline{PB}$ 。由「對角互補的四邊形有外接圓」可知， $\overline{PO}$ 為四邊形 $PAOB$ 外接圓的直徑。



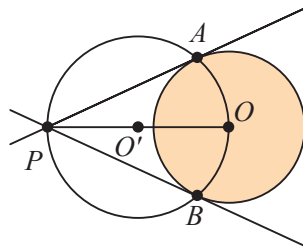
作法

- (1) 連接 $\overline{OP}$ 。
- (2) 以 $\overline{OP}$ 為直徑，作圓 O' ，交圓 O 於 A 、 B 兩點。
- (3) 連接 $\overline{PA}$ 與 $\overline{PB}$ ，則 $\overline{PA}$ 與 $\overline{PB}$ 即為所求。



隨堂練習

如圖， O 為圓心，圓 O 半徑為 5， P 為圓 O 外一點，且 $\overline{OP} = 12$ 。以 $\overline{OP}$ 為直徑畫一圓，交圓 O 於 A 、 B 兩點，求 $\overline{PA}$ 。

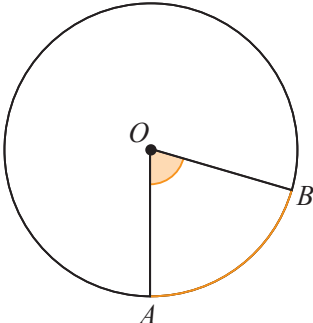
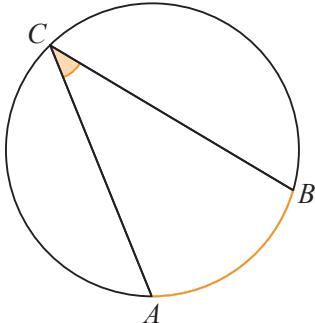


重點回顧

① 弧的度數與長度

- (1) 弧的度數就是該弧所對圓心角的度數。
- (2) 在同圓或等圓中，度數相等的兩弧等長；如果兩弧等長，則它們所對的圓心角相等。
- (3) 在同圓或等圓中，度數愈大的弧，其弧的長度愈長。

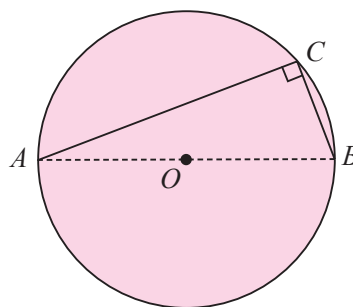
② 圓心角、圓周角與弧的關係

名稱	圓心角	圓周角
圖示		
性質	$\angle AOB = \widehat{AB}$	$\angle ACB = \frac{1}{2} \widehat{AB}$

③ 半圓的圓周角

半圓所對的圓周角是直角。

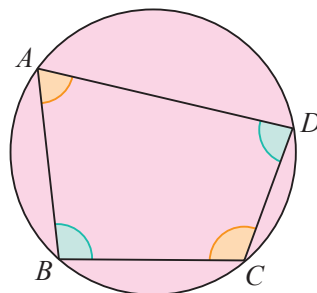
例 如圖， $\because \overline{AB}$ 為直徑， $\therefore \angle ACB = 90^\circ$ 。



④ 圓內接四邊形

圓內接四邊形的對角互補。

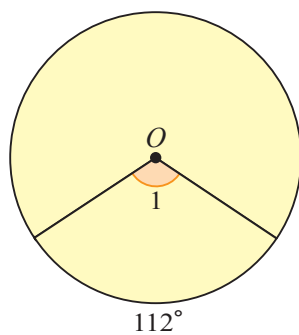
例 如圖，四邊形 $ABCD$ 為圓內接四邊形，
則 $\angle A + \angle C = 180^\circ$ ， $\angle B + \angle D = 180^\circ$ 。



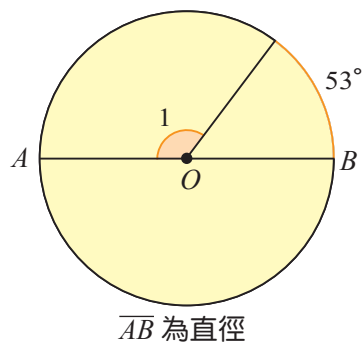
① 求下列各小題中的圓心角 $\angle 1$ 。

課 P112 例 1

(1)

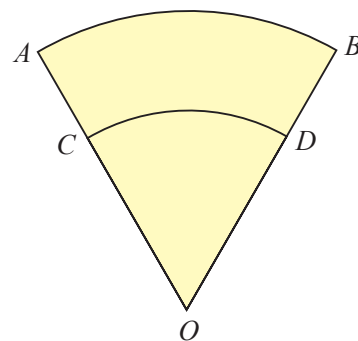


(2)



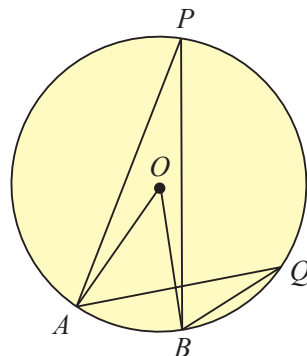
② 如圖，已知 $\widehat{AB}$ 和 $\widehat{CD}$ 是以 O 點為圓心，不同半徑所畫出的相異弧，且 $\widehat{AB} = 6$ ， $\widehat{CD} = 4$ ， $\overline{OA} = 5$ ，求 $\overline{OC}$ 。

課 P113 例 2



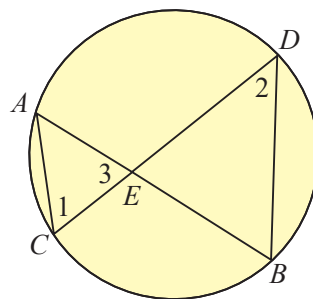
- ③如圖，若 $\widehat{AB}$ 的長度為圓 O 周長的 $\frac{1}{8}$ ，求 $\angle AOB$ 、 $\angle APB$ 和 $\angle AQB$ 。

課 P116 例 3



- ④如圖，圓內兩弦 $\overline{AB}$ 、 $\overline{CD}$ 交於 E 點， $\angle BAC=50^\circ$ ， $\angle ABD=60^\circ$ ，求 $\angle 1$ 、 $\angle 2$ 及 $\angle 3$ 。

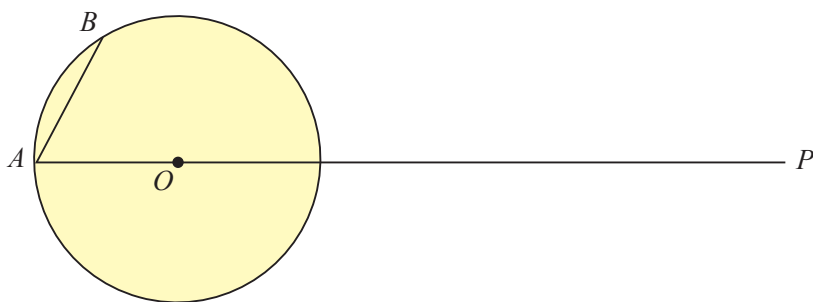
課 P116 隨堂



⑤ 如圖， $\overline{AB}$ 是圓 O 的一弦， P 為圓 O 外一點， $\overline{AP}$ 通過圓心 O ，完成下列問題：

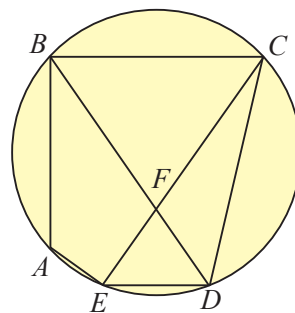
- (1) 在 $\overline{AP}$ 上找出一點 C ，使得 $\angle ABC$ 為直角。
- (2) 在 $\overline{AP}$ 上找出一點 D ，使得 $\angle ABD$ 為銳角。
- (3) 在 $\overline{AP}$ 上找出一點 E ，使得 $\angle ABE$ 為鈍角。

課 P118 課文



⑥ 如圖， A 、 B 、 C 、 D 、 E 為圓上的五個點，且 $\overline{BC} \parallel \overline{ED}$ ， $\overline{BD}$ 、 $\overline{CE}$ 交於 F 點，若 $\angle DFE = 70^\circ$ ，求 $\angle BAE$ 。

課 P121 隨堂



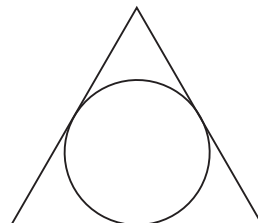
自我挑戰

本頁為概念統整課程，由學生自行挑戰，
教師可視班級情況而自行決定如何運用。

右圖為某家公司生產的圓形掃地機器人，回答下列問題：

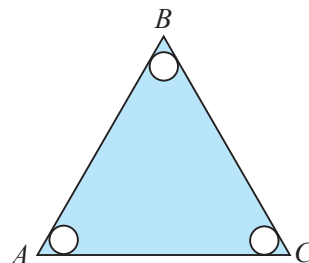


- (1) 將一個圓形掃地機器人放入邊長為 80 公分的正三角形盒子裡，且恰與正三角形的三個邊相切，則此圓形掃地機器人的半徑為多少公分？



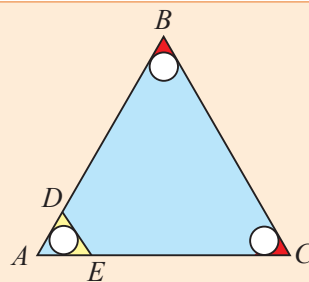
解

- (2) 右圖 $\triangle ABC$ 為正三角形遊戲室的平面圖。若 $\overline{AB} = 640$ 公分，掃地機器人的半徑為 20 公分，則無法經過的區域面積為多少平方公分？



思路分析

如圖， $\triangle ABC$ 中，分別在 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 上取 D 、 E 兩點，使得 $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ ，因為 $\angle A = \angle A$ ， $\angle C = \angle E = 60^\circ$ ，所以 $\triangle ABC \sim \triangle ADE$ (AA 相似)，且 $\triangle ADE$ 中的黃色區域面積與 $\triangle ABC$ 中的紅色區域面積大小相同。



解

數學萬花筒

日環食



自然

還記得 2020 年 6 月 21 日的日環食嗎？這是當年度的天文大事。「日食」是月球轉動到太陽和地球中間，如果三者正好處在一條直線時，月球就會擋住太陽射向地球的光，月球身後的黑影正好落到地球上，這時就發生日食現象，若日食發生時，太陽的外環光線仍可看到，則稱為日環食。錯過這次，臺灣本島要等到 2215 年才有機會再看到日環食。若將太陽與月球視為平面上的兩圓，日環食過程可用兩圓的關係來說明。

過程

觀察到的現象

初虧

月球與太陽兩圓剛開始接觸到（此時交於一點，稱為兩圓外切。），日環食準備開始。

食既（環食開始）

月球整個進入太陽所成圓的內部（此時交於一點，稱為兩圓內切。），進入環食。

食甚（食的中央）

月球與太陽兩圓圓心重合，這時出現最完整的日環食。

生光（環食結束）

月球與太陽兩圓再度相交於一點（內切），環食結束。

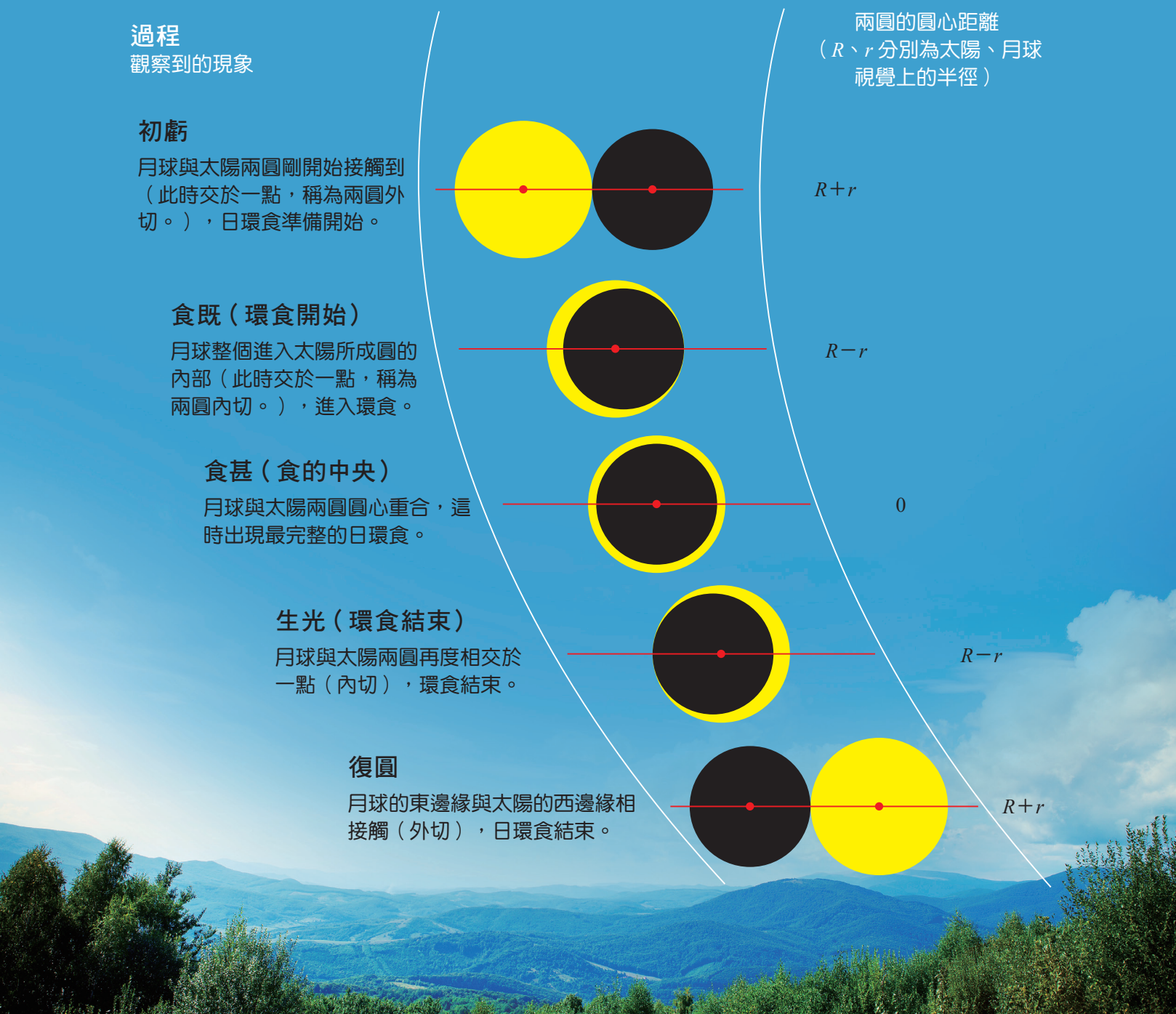
復圓

月球的東邊緣與太陽的西邊緣相接觸（外切），日環食結束。

兩圓的圓心距離
（ R 、 r 分別為太陽、月球
視覺上的半徑）

 $R+r$ $R-r$

0

 $R-r$ $R+r$ 

3

推理證明與三角形的心

3-1 推理證明

1. 幾何證明
2. 輔助線
3. 代數證明

3-2 三角形的心

1. 外心
2. 內心
3. 重心



終於到了
日月潭！

這附近有幾個景
點可以走走～

而且現在正好是日
月潭花火節的期間。

晚上要在哪裡
看煙火呢？

我們來看一下
地圖資訊吧！

地圖中間的是
施放區域唷！

這裡有自行車道
可以環湖！



水社碼頭



伊達邵碼頭

向山遊客中心

煙火施放點

這附近有很多市集
可以逛呢！

這裡除了有許多
展場外，四周美
景也非常棒！



可能是它和這三個地
方的距離都相同吧！

這三個地方
人潮最多！

為何會選在那
個點施放呢？

主辦單位要讓上述三個地方的民眾看到煙火的距離都一樣，那麼這個施放點要如何找到呢？
翻開課本 P150~151，就可以知道囉！

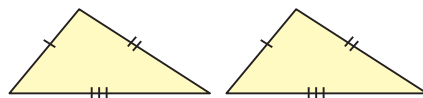
學習
前哨站

本單元為學生自我複習，
教師可視班級情況決定如何運用。

回顧 ① 三角形的全等性質

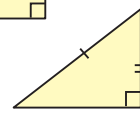
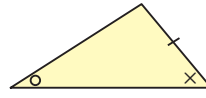
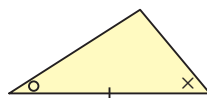
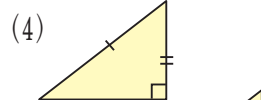
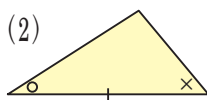
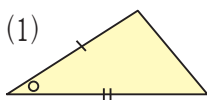
8 下第 3 章

右圖中的兩個三角形全等是根據 SSS 全等性質。



課前練習

對照圖中每一組全等的三角形，寫出適合的全等性質。



_____ 全等性質

_____ 全等性質

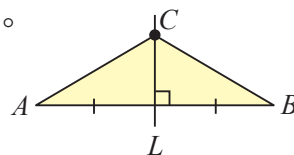
_____ 全等性質

_____ 全等性質

回顧 ② 中垂線性質

8 下第 3 章

如圖，若 L 是 $\overline{AB}$ 的中垂線， C 點在 L 上，則 $\overline{CA} = \overline{CB}$ 。



課前練習

已知 P 點在 $\overline{AB}$ 的垂直平分線上， $\overline{AB} = 6$ ， $\overline{PA} = 8$ ，則 $\overline{PB} =$ _____。

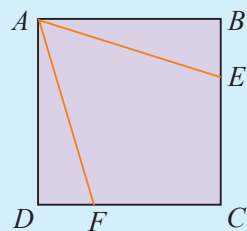
3-1 推理證明

我們曾經學過一些數學性質，並嘗試說明每個步驟間的合理性，這個說明的過程就是「**證明**」，例如：等差數列的第 n 項、總和公式、三角形的全等、……。

1 幾何證明

在幾何證明的寫作過程中，也會利用題目所給的條件與曾經在八年級學過的幾何性質進行推理，並寫成 **已知**、**求證**、**證明** 的形式。步驟如下：

例如：如圖，四邊形 $ABCD$ 為正方形， E 、 F 兩點分別在 $\overline{BC}$ 、 $\overline{DC}$ 上， $\overline{BE} = \overline{DF}$ ，說明 $\overline{AE} = \overline{AF}$ 。



將「題目所給的條件」寫成

已知

已知 四邊形 $ABCD$ 為正方形，
 E 、 F 兩點分別在 $\overline{BC}$ 、 $\overline{DC}$ 上，
 $\overline{BE} = \overline{DF}$ 。

將「要說明的結論」寫成

求證

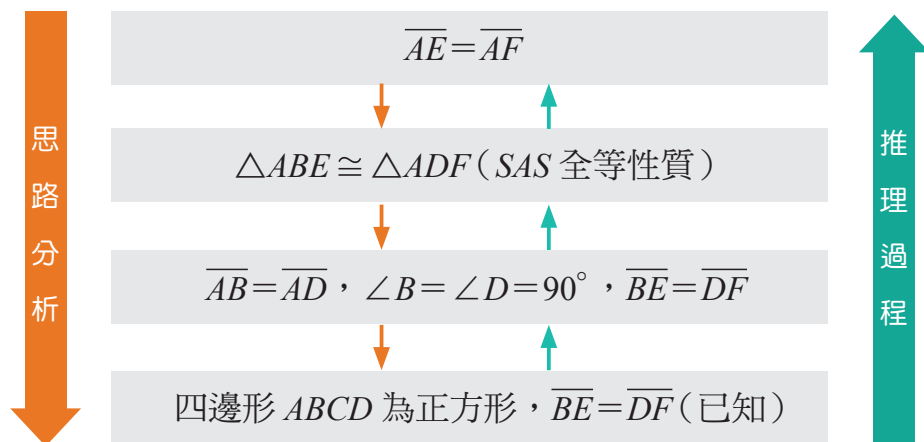
求證 $\overline{AE} = \overline{AF}$ 。

將「推導或說明的過程」寫成

證明

證明 在 $\triangle ABE$ 與 $\triangle ADF$ 中，
 $\because \overline{AB} = \overline{AD}$ ， $\angle B = \angle D = 90^\circ$ ，
(四邊形 $ABCD$ 為正方形)
又 $\overline{BE} = \overline{DF}$ (已知)，
 $\therefore \triangle ABE \cong \triangle ADF$ (SAS 全等性質)
故 $\overline{AE} = \overline{AF}$ (對應邊相等)。

推理證明的思考與分析，可先從「結論」推論到「題目所給的條件」，但在寫作推理的過程中，則是依據分析的結果，由「題目所給的條件」逐步推理至「結論」。以前頁的例子說明如下：

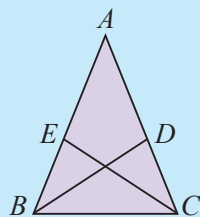


例1 等腰三角形兩底角上的角平分線等長

自評 P148 第 1 題

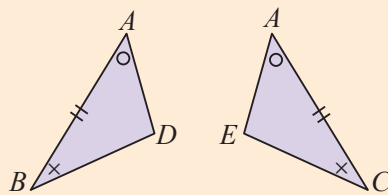
已知 如圖， $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB} = \overline{AC}$ ， $\overline{BD}$ 平分 $\angle ABC$ ， $\overline{CE}$ 平分 $\angle ACB$ 。

求證 $\overline{BD} = \overline{CE}$ 。



思路分析

要證明 $\overline{BD} = \overline{CE}$ ，
先找到分別以 $\overline{BD}$ 、 $\overline{CE}$ 為一邊的兩個三角形，
再證明這兩個三角形全等。



證明 在 $\triangle ABD$ 與 $\triangle ACE$ 中，

$\because \overline{AB} = \overline{AC}$ (已知)，

$\angle ABD = \frac{1}{2} \angle ABC = \frac{1}{2} \angle ACB = \angle ACE$ ，

$\angle A = \angle A$ (公用角)，

$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ACE$ (ASA 全等性質)，

故 $\overline{BD} = \overline{CE}$ (對應邊相等)。



隨堂練習

自評 P148 第 2 題

1. **已知** 如圖， $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB} = \overline{AC}$ ， $\overline{AE} = \overline{AD}$ 。

求證 $\overline{BE} = \overline{CD}$ 。

證明 在 $\triangle ABE$ 與 $\triangle ACD$ 中，

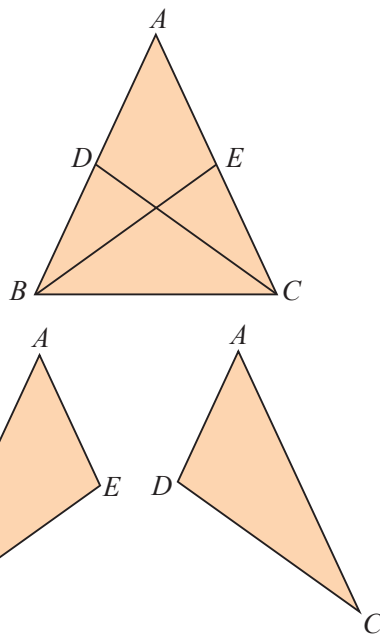
$$\therefore \overline{AB} = \overline{AC} \text{ (已知),}$$

$$\overline{AE} = \overline{AD} \text{ ()},$$

_____ (公用角)，

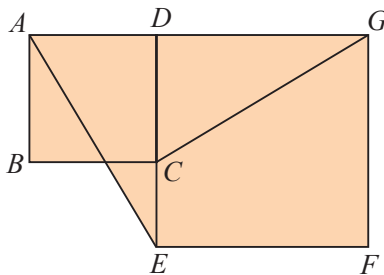
$$\therefore \triangle ABE \cong \triangle ACD \text{ () 全等性質),}$$

$$\text{故 } \overline{BE} = \overline{CD} \text{ ()}。$$



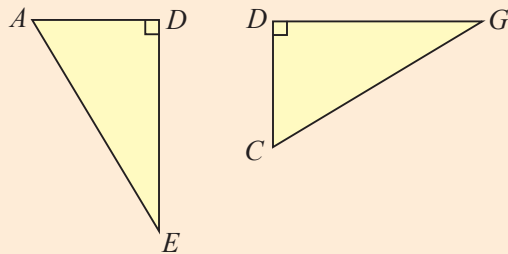
2. **已知** 如圖，四邊形 $ABCD$ 、 $DEFG$ 均為正方形。

求證 $\overline{AE} = \overline{CG}$ 。



思路分析

要證明 $\overline{AE} = \overline{CG}$ ，先找到分別以 $\overline{AE}$ 、 $\overline{CG}$ 為一邊的兩個三角形，再證明這兩個三角形全等。



證明 在 $\triangle ADE$ 與 $\triangle CDG$ 中，

$$\therefore \overline{DE} = \overline{DG} \text{ (理由:)},$$

_____ (理由: 四邊形 $ABCD$ 為正方形)，

$$\text{_____} = 90^\circ \text{ (四邊形 } ABCD、DEFG \text{ 均為正方形),}$$

$$\therefore \triangle ADE \cong \triangle CDG \text{ () 全等性質),}$$

$$\text{故 } \overline{AE} = \overline{CG} \text{ ()}。$$

幾何證明題的呈現方式，常將 **已知** 的形式改用其他敘述取代，而推理的過程或結論也常分成幾個步驟來說明。

例2 全等證明

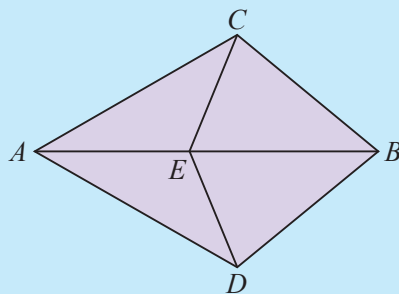
自評 P149 第 3 題

如圖， $\triangle ABC$ 與 $\triangle ABD$ 中， $\overline{AC} = \overline{AD}$ ， $\overline{BC} = \overline{BD}$ ，

若 E 為 $\overline{AB}$ 上任一點，求證：

(1) $\angle ABC = \angle ABD$ 。

(2) $\overline{EC} = \overline{ED}$ 。



思路分析

1. 要證明 $\angle ABC = \angle ABD$ ，需先找出包含 $\angle ABC$ 與 $\angle ABD$ 的兩個全等三角形。
2. 要證明 $\overline{EC} = \overline{ED}$ ，需先找出包含 $\overline{EC}$ 與 $\overline{ED}$ 為邊的兩個全等三角形。

證明 (1) 在 $\triangle ABC$ 與 $\triangle ABD$ 中，

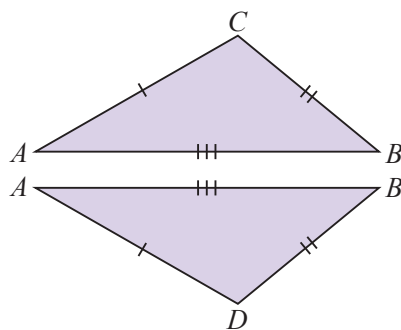
$$\because \overline{AC} = \overline{AD} \text{ (已知),}$$

$$\overline{BC} = \overline{BD} \text{ (已知),}$$

$$\overline{AB} = \overline{AB} \text{ (公用邊),}$$

$$\therefore \triangle ABC \cong \triangle ABD \text{ (SSS 全等性質),}$$

$$\text{故 } \angle ABC = \angle ABD \text{ (對應角相等).}$$



(2) 在 $\triangle EBC$ 與 $\triangle EBD$ 中，

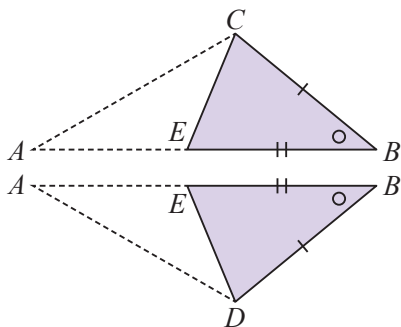
$$\because \overline{BC} = \overline{BD} \text{ (已知),}$$

$$\angle ABC = \angle ABD \text{ (對應角相等),}$$

$$\overline{EB} = \overline{EB} \text{ (公用邊),}$$

$$\therefore \triangle EBC \cong \triangle EBD \text{ (SAS 全等性質),}$$

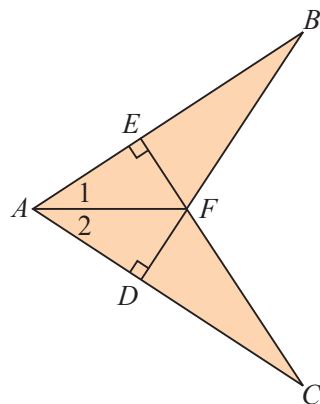
$$\text{故 } \overline{EC} = \overline{ED} \text{ (對應邊相等).}$$





隨堂練習

如圖， $\overline{AB} = \overline{AC}$ ， $\overline{CE} \perp \overline{AB}$ ， $\overline{BD} \perp \overline{AC}$ ，
 $\overline{BD}$ 與 $\overline{CE}$ 交於 F 點，求證：



(1) $\overline{AD} = \overline{AE}$ 。

思路分析

要證明 $\overline{AD} = \overline{AE}$ ，需先找出包含 $\overline{AD}$ 、 $\overline{AE}$ 為邊的兩個全等三角形。

證明

(2) $\angle 1 = \angle 2$ 。

思路分析

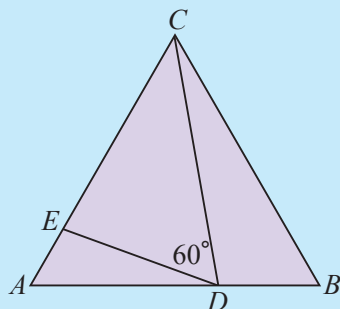
要證明 $\angle 1 = \angle 2$ ，需先找出包含 $\angle 1$ 、 $\angle 2$ 的兩個全等三角形。

證明

例3 相似形的應用

如圖， $\triangle ABC$ 為正三角形， D 、 E 兩點分別在 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 上，且 $\angle CDE = 60^\circ$ 。

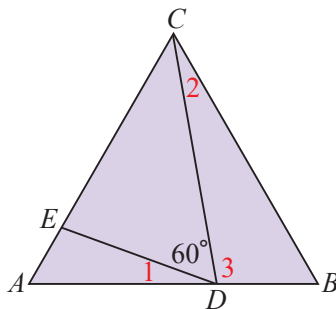
求證： $\triangle ADE \sim \triangle BCD$ 。



思路分析

由 $\triangle ABC$ 為正三角形，可得 $\triangle ADE$ 和 $\triangle BCD$ 中有一組對應角 $\angle A = \angle B = 60^\circ$ ，再由三角形內角和 180° 及平角 180° 的條件，找出 $\triangle ADE$ 和 $\triangle BCD$ 中一組對應角相等。

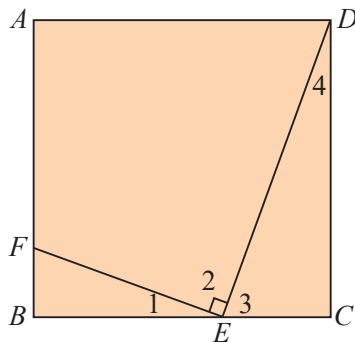
- 證明**
- (1) $\because \triangle ABC$ 為正三角形， $\therefore \angle A = \angle B = 60^\circ$ ，
 - (2) $\triangle CDB$ 中， $\angle B = 60^\circ$ ， $\therefore \angle 2 + \angle 3 = 120^\circ$ ，
又 $\angle 1 + 60^\circ + \angle 3 = 180^\circ$ ， $\therefore \angle 1 + \angle 3 = 120^\circ$ ，
故 $\angle 1 = \angle 2$ 。
 - (3) 在 $\triangle ADE$ 與 $\triangle BCD$ 中，
 $\angle A = \angle B$ 且 $\angle 1 = \angle 2$ (對應角相等)，
故 $\triangle ADE \sim \triangle BCD$ (AA 相似性質)。



隨堂練習

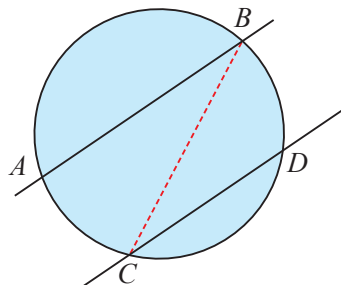
如圖，正方形 $ABCD$ 中， E 、 F 兩點分別在 $\overline{BC}$ 、 $\overline{AB}$ 上，且 $\angle 2 = 90^\circ$ 。求證： $\triangle CDE \sim \triangle BEF$ 。

證明

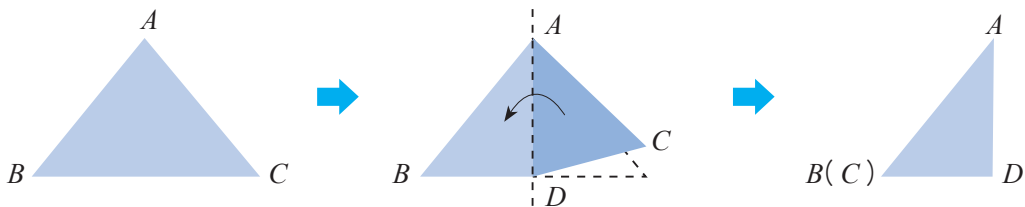


2 輔助線

幾何推理進行中，有時需在原圖形上添加一些線條或圖形，協助進行推理證明或計算。例如：第 2 章平行線截等弧時，連接 $\overline{BC}$ ，這種添加的線條或圖形就稱為**輔助線**，輔助線常用虛線表示。如右圖， $\overline{BC}$ 就是輔助線。

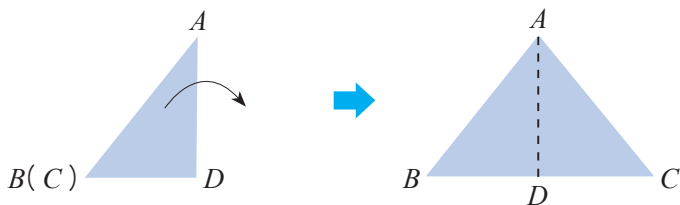


我們以等腰三角形證明兩底角相等為例，若想要證明兩底角相等，卻無法直接證明，則需要找到適當的輔助線，但要怎麼找到呢？以下用摺紙的方式來進行觀察：如圖一， $\triangle ABC$ 為等腰三角形， $\overline{AB} = \overline{AC}$ ，將 $\triangle ABC$ 對摺，使得 B 點與 C 點疊合，此時 $\triangle ABD$ 與 $\triangle ACD$ 完全疊合，所以 $\angle ADB = \angle ADC = 90^\circ$ 。



圖一

如圖二，把摺好的三角形打開，則 $\overline{AD}$ 為 $\triangle ABC$ 的對稱軸。



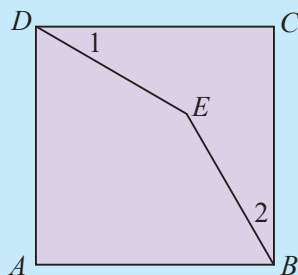
圖二

由上面的過程可知：等腰三角形的對稱軸，就是它底邊上的高，且 $\triangle ABD$ 與 $\triangle ACD$ 全等，所以等腰三角形的底角相等。因此，如果要證明等腰三角形的底角相等，可作 $\overline{BC}$ 上的高 $\overline{AD}$ ，則 $\overline{AD}$ 就是我們需要的輔助線。

例4 輔助線的應用

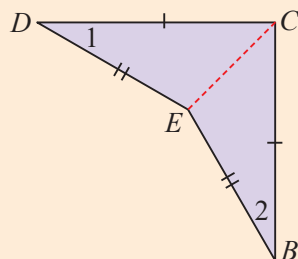
自評 P149 第 3 題

如圖， E 點在正方形 $ABCD$ 內部， $\overline{DE} = \overline{BE}$ ，
求證： $\angle 1 = \angle 2$ 。



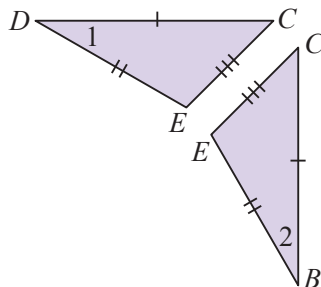
思路分析一

要證明 $\angle 1 = \angle 2$ ，可連接 $\overline{CE}$ ，
再證明 $\triangle CDE$ 與 $\triangle CBE$ 全等。



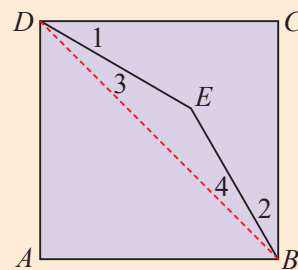
證明一 (1) 連接 $\overline{CE}$ 。

- (2) 在 $\triangle CDE$ 與 $\triangle CBE$ 中，
 $\because \overline{DC} = \overline{BC}$ ， $\overline{DE} = \overline{BE}$ ， $\overline{CE} = \overline{CE}$ ，
 $\therefore \triangle CDE \cong \triangle CBE$ (SSS 全等性質)，
 故 $\angle 1 = \angle 2$ (對應角相等)。



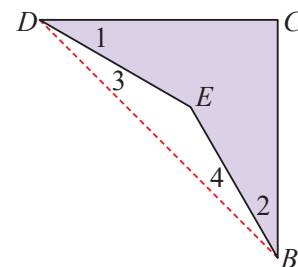
思路分析二

連接 $\overline{BD}$ ，
由 $\triangle BDE$ 為等腰三角形， $\triangle BCD$ 為等腰直角三角形，
即可推導出 $\angle 1 = \angle 2$ 。



證明二 (1) 連接 $\overline{BD}$ 。

- (2) $\because \overline{DE} = \overline{BE}$ ，
 $\therefore \angle 3 = \angle 4$ (等腰三角形兩底角相等)，
 (3) $\because \overline{CD} = \overline{CB}$ ， $\therefore \angle 1 + \angle 3 = \angle 2 + \angle 4$ ，
 $\therefore \angle 3 = \angle 4$ ，故 $\angle 1 = \angle 2$ 。



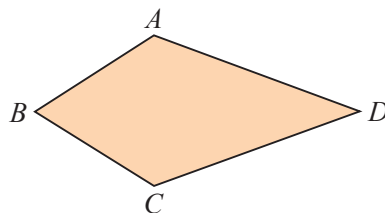


隨堂練習

利用不同的思路分析證明。

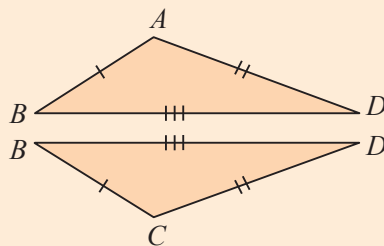
如圖，四邊形 $ABCD$ 中， $\overline{AB} = \overline{BC}$ ，

$\overline{AD} = \overline{CD}$ ，求證 $\angle A = \angle C$ 。



思路分析一

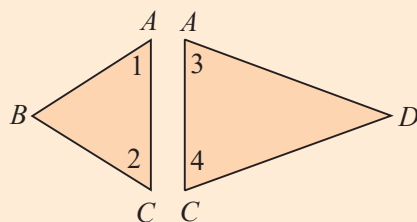
要證明 $\angle A = \angle C$ ，可連接 $\overline{BD}$ ，
再證明 $\triangle ABD$ 與 $\triangle CBD$ 全等。



證明一

思路分析二

連接 $\overline{AC}$ ，將 $\angle A$ 分成 $\angle 1 + \angle 3$ ， $\angle C$ 分成 $\angle 2 + \angle 4$ ，
若能證明 $\angle 1 = \angle 2$ ， $\angle 3 = \angle 4$ ，
即可推導出 $\angle 1 + \angle 3 = \angle 2 + \angle 4$ 。



證明二

由 **例4** 及 **隨堂練習** 可知：不同的思路會產生不同的輔助線畫法與證法。

3 代數證明



在漫畫中，博士提出問題：「偶數加奇數是奇數還是偶數呢？」，傑克很有自信的說是奇數，還舉了 2 個例子，但是光舉 2 個例子就能算是證明嗎？

奇數和偶數都有無限多個，舉更多的例子也不能證明偶數加奇數一定是奇數，但又舉不出一個「偶數加奇數是偶數」的例子，所以「偶數加奇數得到奇數」是一個猜測，為了說明此猜測是正確的，我們先來看看什麼是偶數和奇數。

「偶數」能被 2 整除，或者說「偶數」都是 2 的倍數，例如： $22=2\times 11$ 、 $24=2\times 12$ 、 $-6=2\times (-3)$ ，所以 22、24、-6 都是偶數，意即當 k 為整數時，所有表示為 $2k$ 形式的數皆為偶數，反之，偶數皆可寫成 $2k$ 的形式。

「奇數」被 2 除都餘 1，例如： $19=2\times 9+1$ 、 $5=2\times 2+1$ 、 $-7=2\times (-4)+1$ ，所以 19、5、-7 都是奇數，意即當 k 為整數時，所有表示為 $2k+1$ 形式的數皆為奇數，反之，奇數皆可寫成 $2k+1$ 的形式。



隨堂練習

1. 假設 a 、 b 為整數，寫出下列何者為奇數、何者為偶數。
 - (1) $2a+3$ 為_____數。
 - (2) $4b-6$ 為_____數。
2. 假設 k 、 n 為整數，填入適當的式子，並寫出下列何者為奇數、何者為偶數。
 - (1) $6k+1=2\times$ _____+1；所以 $6k+1$ 為_____數。
 - (2) $24n+22=2\times$ _____；所以 $24n+22$ 為_____數。
 - (3) $2n-1=2\times$ (_____) +1；所以 $2n-1$ 為_____數。

有了「偶數加奇數得到奇數」這個猜測，現在來進行證明：

假設 a 是偶數， a 可以寫成 $2m$ ，其中 m 是整數；

b 是奇數， b 可以寫成 $2n+1$ ，其中 n 是整數。

偶數加奇數可以用 $a+b$ 表示，我們只要證明 $a+b$ 是奇數就可以了。

證明

$$\begin{aligned}a+b &= 2m+2n+1 \\ &= 2(m+n)+1\end{aligned}$$

因為 $m+n$ 也是整數，所以 $2(m+n)+1$ 是奇數，

因此 $a+b$ 是奇數。

由上述證明可知：「偶數加奇數得到奇數」是正確的。

例5 奇偶數的判別

已知 $3^2=9$ ， $5^2=25$ ， $13^2=169$ ，由這三個例子猜測「奇數的平方是奇數」，這個猜測正確嗎？如果正確，請證明它；如果不正確，請舉一個反例。

已知 a 是奇數。

求證 a^2 也是奇數。

證明 $\because a$ 是奇數，設 $a=2n+1$ ， n 是整數。

$$\begin{aligned}\therefore a^2 &= (2n+1)^2 \\ &= (2n)^2 + 2 \times 2n \times 1 + 1^2 \\ &= 4n^2 + 4n + 1 \\ &= 2(2n^2 + 2n) + 1 \\ \therefore 2n^2 + 2n \text{ 為整數，故 } a^2 \text{ 是奇數。}\end{aligned}$$



隨堂練習

「任一個奇數乘以任一個偶數」你會猜測得到奇數還是偶數呢？

根據結論證明你的猜測是正確的。

已知 a 是奇數， b 是偶數。

求證 $a \times b$ 是 _____（填偶數或奇數）。

證明 $\because a$ 是奇數， b 是偶數。

$\therefore$ 設 $a=2m+1$ ， $b=2n$ ， m 、 n 皆是整數。

$$\begin{aligned}a \times b &= (2m+1) \times \underline{\hspace{2cm}} \\ &= \underline{\hspace{2cm}} + 2n \\ &= 2 \times (\underline{\hspace{2cm}} + n)\end{aligned}$$

$\therefore$ _____ $+ n$ 是整數，故 $a \times b$ 是偶數。

我們知道，若 $a > b$ ，則 $a - b > 0$ ；反之，如果要比較 a 、 b 的大小，可利用 $a - b > 0$ 或 $a - b < 0$ 來判別。

例6 判別大小

自評 P149 第 4 題

已知 $5 > 3$ ， $5^2 > 3^2$ ， $12 > 11$ ， $12^2 > 11^2$ ，由這些例子猜測「 a 、 b 為正數，若 $a > b$ ，則 $a^2 > b^2$ 。」這個猜測正確嗎？如果正確，請證明它；如果不正確，請舉一個反例。

已知 a 、 b 為正數，且 $a > b$ 。

求證 $a^2 > b^2$ 。

證明 $\because a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ ，
已知 $a > b$ ， $\therefore a - b$ 為正數，
又 $a + b$ 為正數，故 $a^2 - b^2 > 0$ ，
即 $a^2 > b^2$ 。



隨堂練習

若 a 、 b 皆為負數，且 $a > b$ ，則 $a^2 - b^2$ 為正數或負數呢？根據結論證明你的猜測是正確的。

已知 $a < 0$ ， $b < 0$ ，且 $a > b$ 。

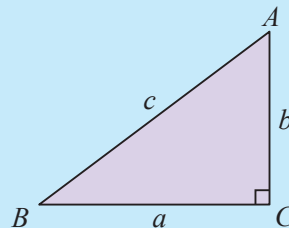
求證 $a^2 - b^2$ 是 _____（填正數或負數）。

證明

例7 因數的判別

已知 如圖，直角三角形 ABC 中， c 為斜邊長， a 、 b 為兩股長， a 、 b 、 c 均為正整數。

求證 $(c+b)$ 是 a^2 的因數。



思路分析

要證明 $(c+b)$ 是 a^2 的因數，可先想辦法將畢氏定理中的 $a^2 + b^2 = c^2$ 推得「 $a^2 = (c+b) \times (\quad)$ 」的形式。

證明 $\because \triangle ABC$ 為直角三角形，
 $\therefore a^2 + b^2 = c^2$
 $a^2 = c^2 - b^2$
 $= (c+b)(c-b)$
 $\because (c+b)$ 、 $(c-b)$ 皆為正整數，
 故 $(c+b)$ 是 a^2 的因數。



隨堂練習

自評 P149 第 5 題

已知 $a^2 + 5^2 = (10b + 5)^2$ ，其中 b 為正整數。

求證 a^2 是 100 的倍數。

思路分析

要證明 a^2 是 100 的倍數，可先想辦法將 $a^2 + 5^2 = (10b + 5)^2$ 推得 $a^2 = 100 \times (\quad)$ 的形式。

證明

① 推理與證明

- (1) 將「題目所給的條件」寫在 **已知**。
- (2) 將「要說明的結論」寫在 **求證**。
- (3) 將「推導或說明的過程」寫在 **證明**。

② 思路分析與證明

推理證明的思考與分析，可先從「結論」推論到「題目所給的條件」，但在寫作推理的過程中，則是依據分析的結果，由「題目所給的條件」逐步推理至「結論」。

③ 輔助線

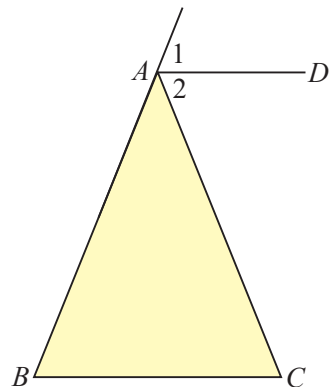
- (1) 幾何推理進行中，有時需要在原圖形上添加一些線條或圖形，協助進行推理證明或計算，這種添加的線條或圖形就稱為輔助線。
- (2) 不同的思路會產生不同的輔助線畫法與證法。

3-1 自我評量

- ① 如圖， $\angle 1 = \angle 2$ ， $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ，求證 $\triangle ABC$ 為等腰三角形。

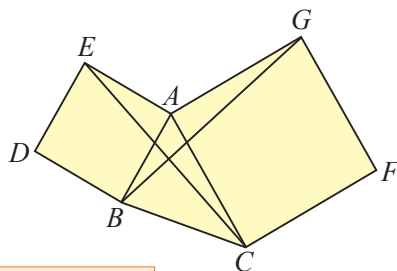
課 P134 例 1

證明



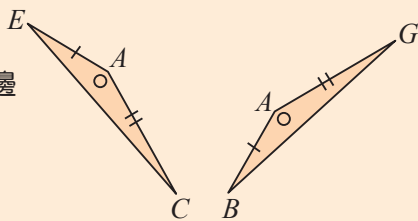
- ② 如圖，已知四邊形 $ABDE$ 、 $ACFG$ 均為正方形，求證 $\triangle AEC \cong \triangle ABG$ 。

課 P135 隨堂



思路分析

將 $\triangle AEC$ 與 $\triangle ABG$ 中，各組相等的對應邊或對應角用記號標出來。



證明

(1) 在 $\triangle AEC$ 與 $\triangle ABG$ 中，

$$\because \angle EAB = \angle GAC = \underline{\hspace{2cm}} \text{度},$$

$$\angle EAC = \angle EAB + \underline{\hspace{2cm}},$$

$$\angle BAG = \angle GAC + \underline{\hspace{2cm}},$$

$$\therefore \angle EAC = \underline{\hspace{2cm}}.$$

(2) 在 $\triangle AEC$ 與 $\triangle ABG$ 中，

$$\because \underline{\hspace{2cm}},$$

$$\underline{\hspace{2cm}},$$

$$\underline{\hspace{2cm}},$$

根據 全等性質，

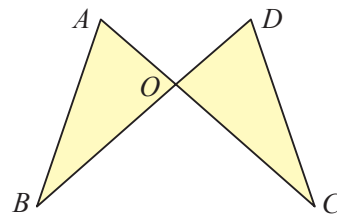
可知 $\triangle AEC \cong \triangle ABG$ 。

③ 如圖， $\overline{AB} = \overline{CD}$ ， $\overline{AC} = \overline{BD}$ 。

求證：(1) $\angle A = \angle D$ 。(2) $\overline{AO} = \overline{DO}$ 。

證明

課 P136、140 例 2、4



④ 已知 $5 \times 2 + 5 \times 3 = 25$ ， $7 \times 2 + 7 \times 3 = 35$ ， $9 \times 2 + 11 \times 3 = 51$ ，由這三個例子猜測「一個奇數的 2 倍，加上另一個奇數的 3 倍，還是奇數。」這個猜測正確嗎？

已知 a 、 b 是奇數。

課 P145 例 6

求證 $2a + 3b$ 也是奇數。

證明

⑤ 已知 a 是正整數， $A = (5a + 8)^2 + 4(5a + 8) + 4$ ，求證 A 是 25 的倍數。

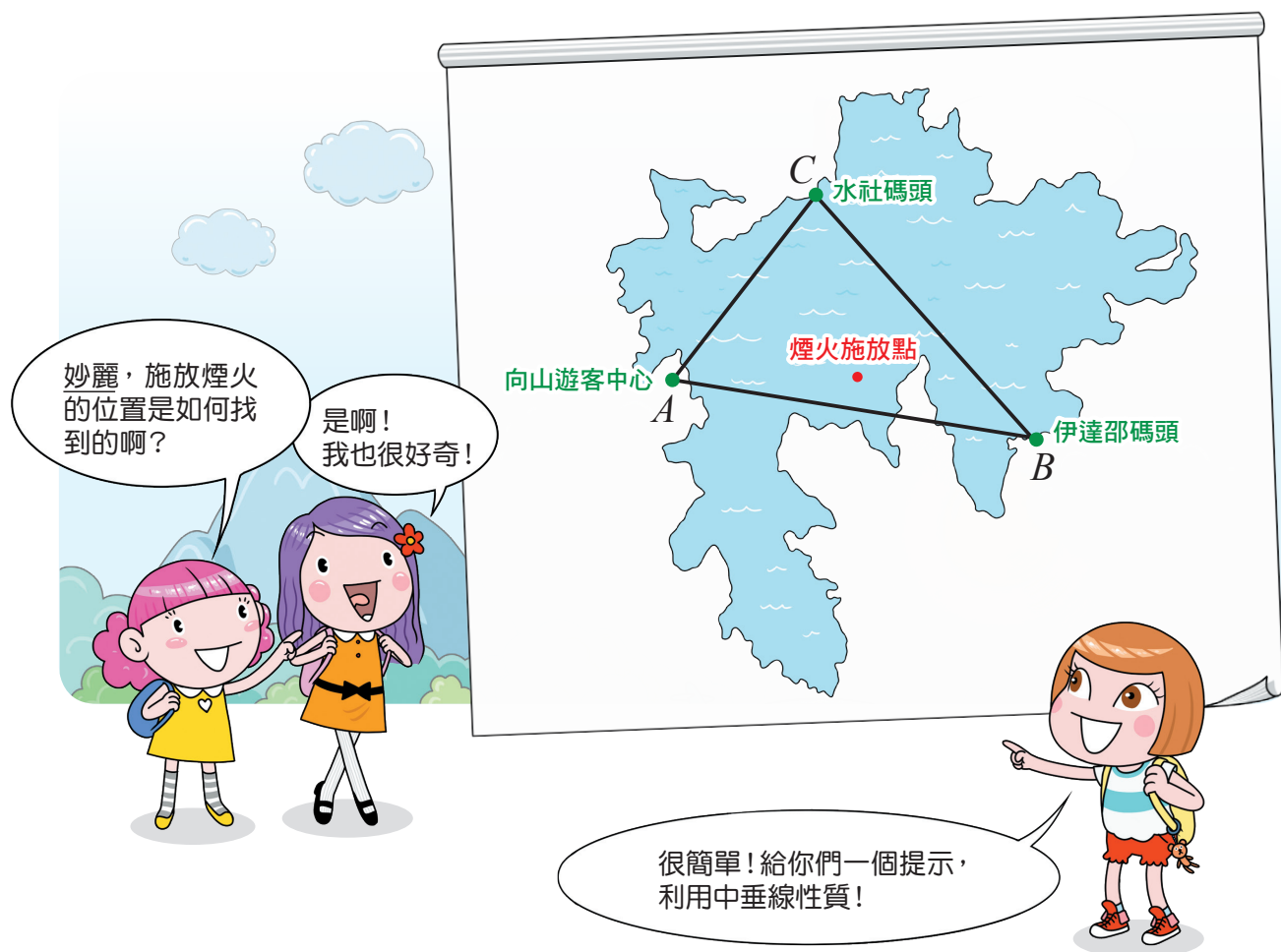
證明

課 P146 隨堂

3-2 三角形的心

1 外心

日月潭風景管理處計畫以遊艇行駛到湖中燃放煙火。若以向山遊客中心(A 點)、伊達邵碼頭(B 點)及水社碼頭(C 點)為人潮的據點，且這三個地方的民眾看到煙火的距離都一樣。

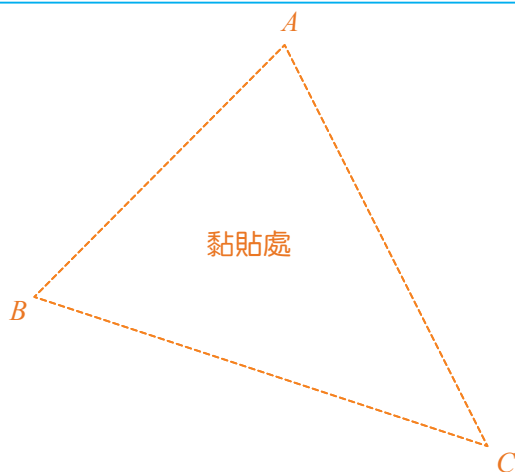


透過以下  **探索活動** 的學習，就可以知道燃放煙火的中心要如何尋找囉！

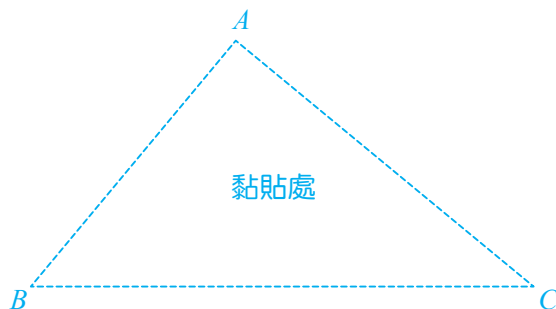
探索活動 三角形的外心

拿出附件 11 的三個三角形，以摺紙方式回答下列問題：

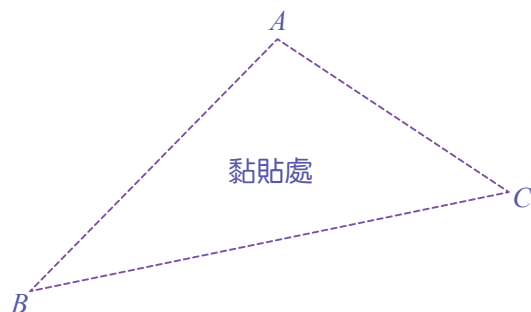
(1) 分別摺出銳角三角形 ABC 中， $\overline{AB}$ 、 $\overline{BC}$ 、 $\overline{AC}$ 的中垂線，再將此三角形貼在右圖中，並畫出摺痕的直線，觀察此三線是否交於一點？



(2) 分別摺出直角三角形 ABC 中， $\overline{AB}$ 、 $\overline{BC}$ 、 $\overline{AC}$ 的中垂線，再將此三角形貼在右圖中，並畫出摺痕的直線，觀察此三線是否交於一點？



(3) 分別摺出鈍角三角形 ABC 中， $\overline{AB}$ 、 $\overline{BC}$ 、 $\overline{AC}$ 的中垂線，再將此三角形貼在右圖中，並畫出摺痕的直線，觀察此三線是否交於一點？



(4) 在上面的三個圖中，假設三條中垂線交於 O 點，以 O 為圓心， $\overline{OA}$ 為半徑畫圓，則此圓是否會通過 B 、 C 兩點？

在  **探索活動** 中，透過操作可以知道任意三角形三邊中垂線交於一點，接著來說明為什麼它們會交於一點？

說明

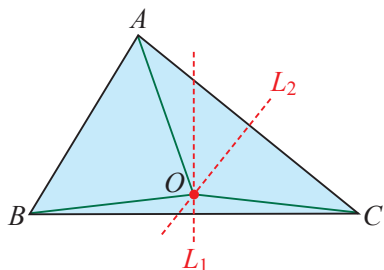
如圖， $\triangle ABC$ 中， L_1 及 L_2 分別為 $\overline{BC}$ 、 $\overline{AC}$ 的中垂線， O 為 L_1 與 L_2 的交點。

$\because O$ 點在 $\overline{BC}$ 的中垂線 L_1 上， $\therefore \overline{OB} = \overline{OC}$ 。

又 O 點在 $\overline{AC}$ 的中垂線 L_2 上， $\therefore \overline{OA} = \overline{OC}$ 。

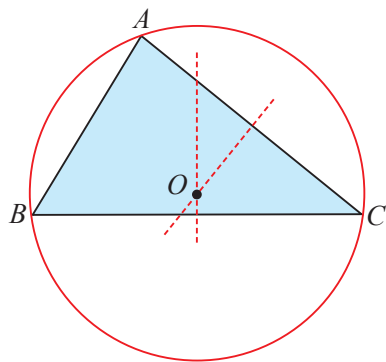
因此 $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC}$ ，即 $\overline{OA} = \overline{OB}$ ，

故 O 點在 $\overline{AB}$ 的中垂線上。

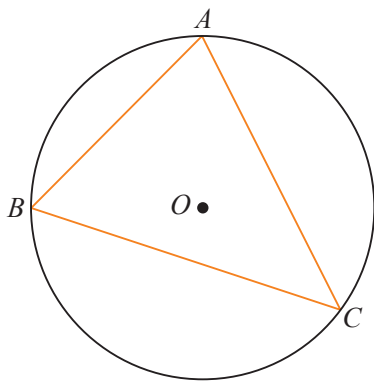


由上可知，三角形任意兩邊中垂線的交點，即為三邊中垂線的交點。

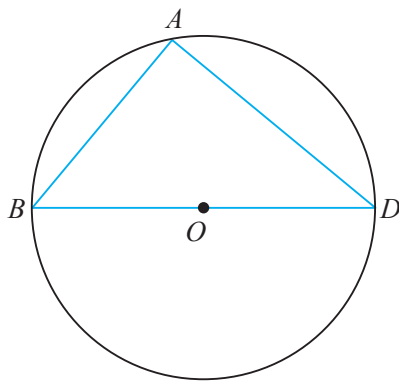
如右圖， $\triangle ABC$ 中， $\overline{AC}$ 、 $\overline{BC}$ 的兩條中垂線相交於 O 點，以 O 點為圓心， $\overline{OA}$ 為半徑畫圓，因為 $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC}$ ，故此圓必通過 $\triangle ABC$ 的三個頂點，圓 O 稱為 $\triangle ABC$ 的**外接圓**， $\triangle ABC$ 稱為圓 O 的**圓內接三角形**。 O 點為此三角形外接圓的圓心，所以將此點稱為三角形的**外心**。



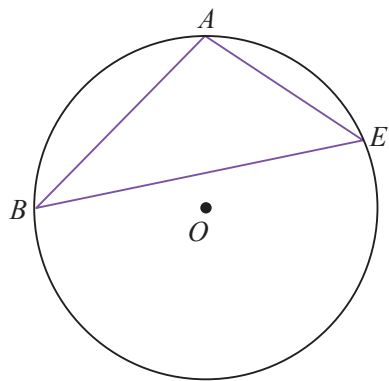
不論是銳角、直角或鈍角三角形都有外心，它可能會落在三角形的內部、邊上或外部。



$\triangle ABC$ 為銳角三角形，
外心在三角形內部。



$\triangle ABD$ 為直角三角形，
外心在三角形的斜邊中點。



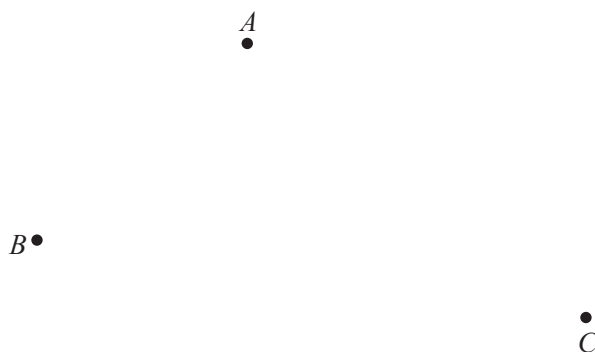
$\triangle ABE$ 為鈍角三角形，
外心在三角形外部。

三角形的外心

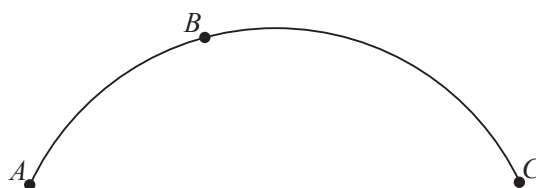
1. 三角形三邊的中垂線交於一點，此點稱為三角形的外心，外心到三頂點的距離相等。
2. 若以三角形的外心為圓心，外心到三頂點的距離為半徑畫圓，可畫出此三角形的外接圓。

隨堂練習

1. 如圖， A 、 B 、 C 為公園裡的三個涼亭，想蓋一座公廁到三個涼亭的距離相等，利用尺規作圖找出公廁的位置。



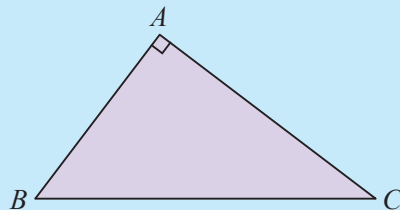
2. 右圖中的 $\widehat{ABC}$ 是圓的一部分，找出圓心並完成此圓。



例1 直角三角形的外接圓半徑

自評 P180 第 1 題

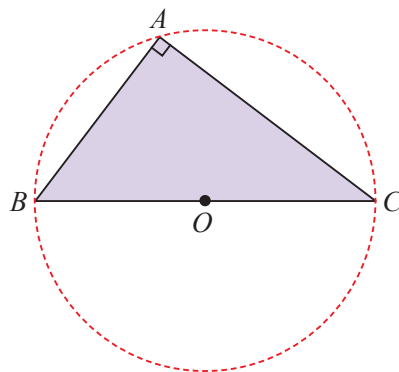
如圖，直角三角形 ABC 中， $\angle A=90^\circ$ ， $\overline{AB}=6$ ， $\overline{AC}=8$ ，求 $\triangle ABC$ 的外接圓半徑。



解 $\because \triangle ABC$ 為直角三角形，
 $\therefore$ 外心 O 點是斜邊 $\overline{BC}$ 中點。

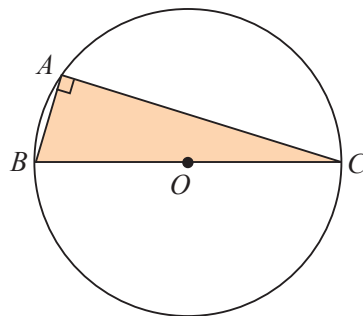
$$\text{又 } \overline{BC} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10,$$

$$\text{故外接圓半徑} = \overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = \frac{10}{2} = 5。$$

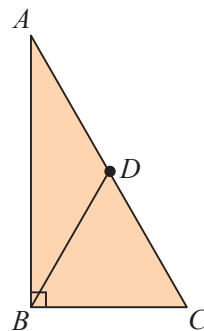


隨堂練習

1. 如圖，直角三角形 ABC 中， $\angle A=90^\circ$ ， O 點為外心， $\overline{AB}=7$ ， $\overline{AC}=24$ ，求 $\overline{OA}$ 。

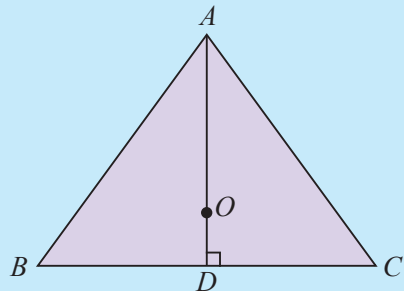


2. 如圖，直角三角形 ABC 中， $\angle B=90^\circ$ ， D 為 $\overline{AC}$ 中點， $\overline{BD}=\overline{BC}=4$ ，求直角三角形 ABC 的面積。

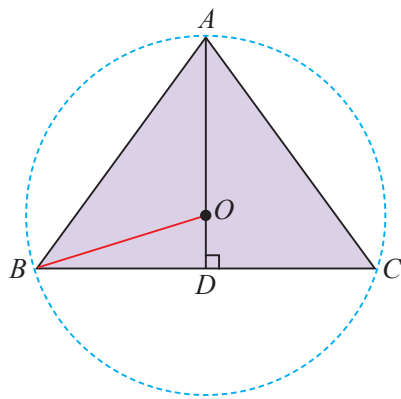


例2 等腰三角形的外接圓半徑

如圖， $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB} = \overline{AC} = 10$ ， $\overline{BC} = 12$ ， $\overline{AD}$ 為 $\overline{BC}$ 上的高， O 點為 $\triangle ABC$ 的外心，求 $\triangle ABC$ 的外接圓半徑。

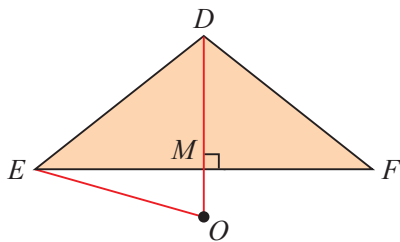


- 解 (1) $\because \triangle ABC$ 為等腰三角形， $\overline{AD}$ 為 $\overline{BC}$ 上的高，
 $\therefore \overline{BD} = \frac{1}{2} \overline{BC} = 6$ ， $\overline{AD} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$ 。
 (2) $\because O$ 點為 $\triangle ABC$ 的外心， $\therefore O$ 點在 $\overline{AD}$ 上，
 連接 $\overline{OB}$ ，可設 $\overline{OA} = \overline{OB} = x$ ，則 $\overline{OD} = 8 - x$ 。
 在直角三角形 OBD 中，
 $\overline{OB}^2 = \overline{OD}^2 + \overline{BD}^2$
 $x^2 = (8 - x)^2 + 6^2$
 $16x = 100$
 $x = \frac{25}{4}$
 故 $\triangle ABC$ 的外接圓半徑為 $\frac{25}{4}$ 。



隨堂練習

如圖， O 點為等腰三角形 DEF 的外心， $\overline{DE} = \overline{DF} = 5$ ， $\overline{EM} = 4$ ， $\overline{DM}$ 垂直平分 $\overline{EF}$ ， O 點在 $\overline{DM}$ 的延長線上，求 $\triangle DEF$ 的外接圓面積。
 (提示：可設 $\overline{OD} = \overline{OE} = x$)

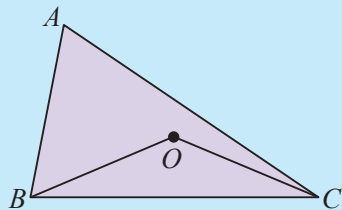


圓內接三角形的每個內角都是該圓的圓周角，接下來將利用圓周角與其所對弧的關係解題。

例3 外心與角度

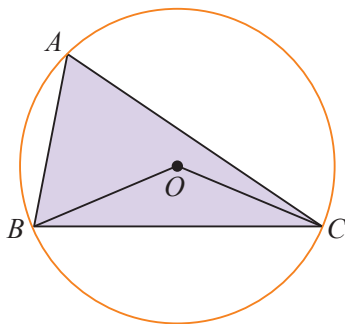
自評 P180 第 2 題

如圖， $\triangle ABC$ 中， $\angle A = 67^\circ$ ，
 O 點為 $\triangle ABC$ 的外心，求 $\angle BOC$ 。



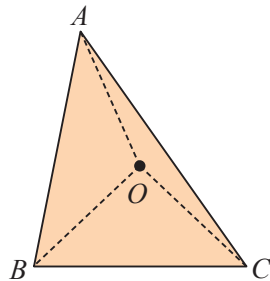
解 如圖，以 O 點為圓心， $\overline{OB}$ 為半徑，
 畫出 $\triangle ABC$ 的外接圓。

$$\begin{aligned}\because \angle A &= \frac{1}{2} \widehat{BC} = \frac{1}{2} \angle BOC, \\ \therefore \angle BOC &= 2\angle A = 2 \times 67^\circ = 134^\circ.\end{aligned}$$

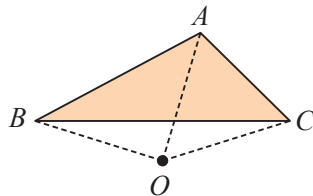


隨堂練習

1. 如圖， O 點為銳角三角形 ABC 的外心， $\angle BAC = 46^\circ$ ， $\angle ABC = 79^\circ$ ，求 $\angle AOB$ 。

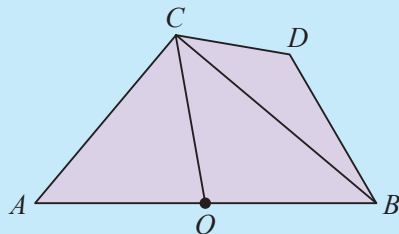


2. 如圖， O 點為鈍角三角形 ABC 的外心， $\angle ABC = 28^\circ$ ， $\angle BAC = 106^\circ$ ，求 $\angle AOB$ 及 $\angle BOC$ 。



例4 外心的應用

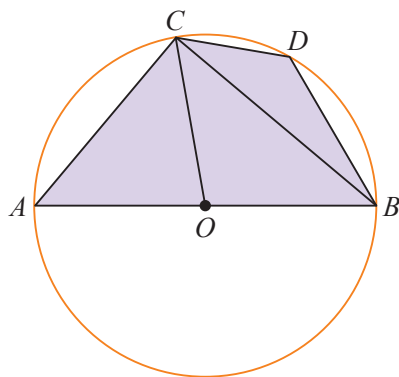
如圖， O 點在 $\overline{AB}$ 上，且 O 點為 $\triangle ABC$ 與 $\triangle BCD$ 的外心，若 $\angle D = 130^\circ$ ，求 $\angle COA$ 。



解 $\because O$ 點為 $\triangle ABC$ 的外心，
 以 $\overline{OA}$ 為半徑畫出 $\triangle ABC$ 的外接圓，
 又 O 點為 $\triangle BCD$ 的外心，
 $\therefore D$ 點也在圓 O 上。
 因此 $\angle A + \angle D = 180^\circ$ ， $\leftarrow$ 圓內接四邊形對角互補

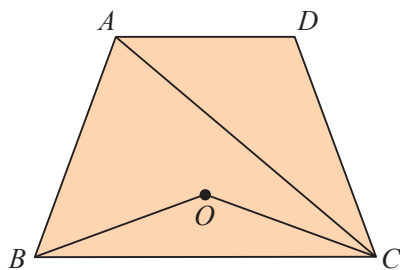
$$\begin{aligned}\angle A &= 180^\circ - \angle D \\ &= 180^\circ - 130^\circ = 50^\circ\end{aligned}$$

 又 $\triangle OCA$ 為等腰三角形（半徑 $\overline{OC} = \overline{OA}$ ），
 $\therefore \angle COA = 180^\circ - 50^\circ \times 2 = 80^\circ$ 。



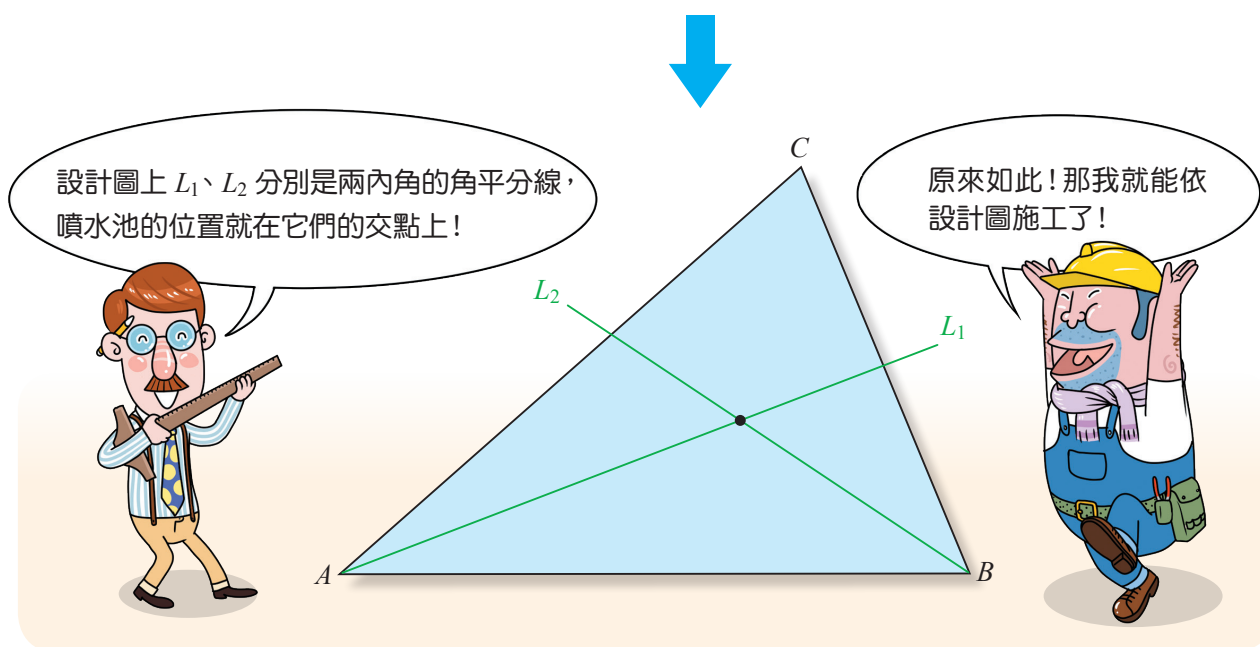
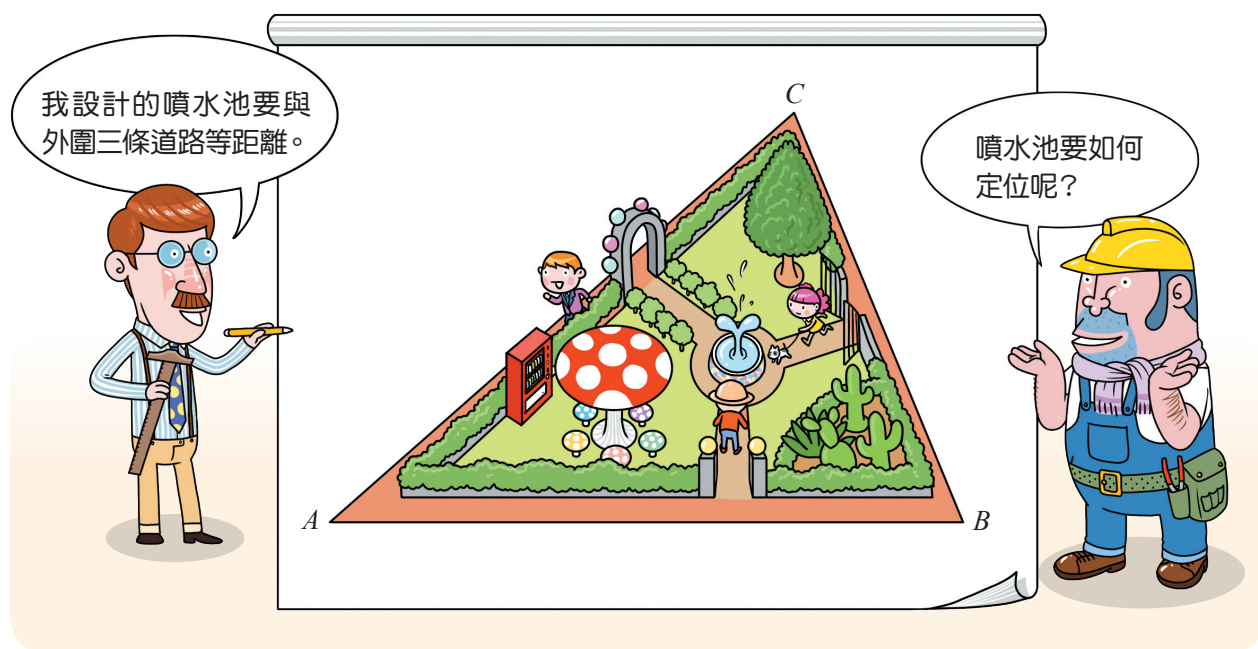
隨堂練習

梯形 $ABCD$ 中， $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ， O 點為 $\triangle ABC$ 與 $\triangle ACD$ 的外心，若 $\angle BOC = 140^\circ$ ， $\angle D = 110^\circ$ ，求 $\angle ACB$ 。



2 內心

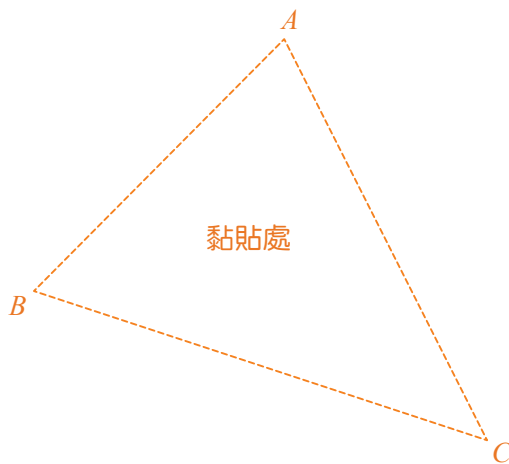
新城社區正在開發中，中間有一塊三角形公園，建築師想在三角形公園內蓋一座噴水池，於是與施工人員討論設計的位置。



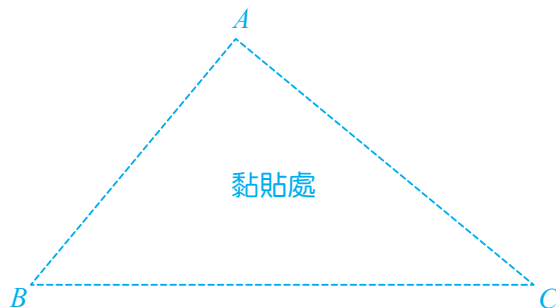
探索活動 三角形的內心

拿出附件 11 的三個三角形，以摺紙方式回答下列問題：

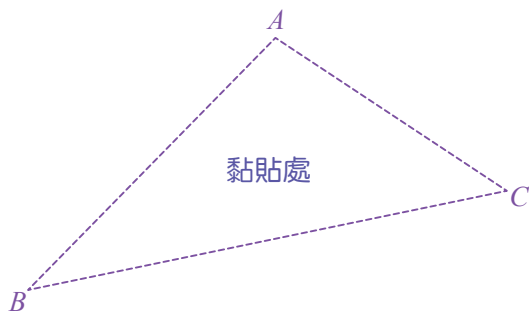
- (1) 分別摺出銳角三角形 ABC 中， $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$ 的角平分線，再將此三角形貼在右圖中，並畫出摺痕的直線，觀察此三線是否交於一點？



- (2) 分別摺出直角三角形 ABC 中， $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$ 的角平分線，再將此三角形貼在右圖中，並畫出摺痕的直線，觀察此三線是否交於一點？



- (3) 分別摺出鈍角三角形 ABC 中， $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$ 的角平分線，再將此三角形貼在右圖中，並畫出摺痕的直線，觀察此三線是否交於一點？



在  **探索活動** 中，透過操作可知道任意三角形三內角的角平分線交於同一點，接著來說明為什麼它們會交於一點？

說明

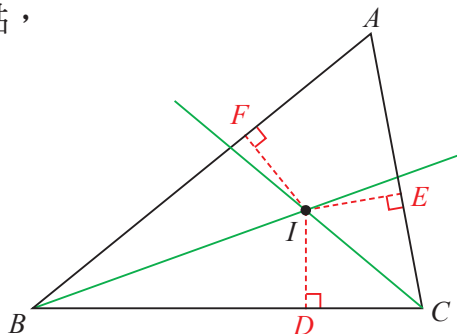
如圖， $\triangle ABC$ 中， $\angle ABC$ 及 $\angle ACB$ 的角平分線交於 I 點，
 $\overline{ID}$ 、 $\overline{IE}$ 、 $\overline{IF}$ 分別垂直於 $\overline{BC}$ 、 $\overline{AC}$ 、 $\overline{AB}$ 。

$\because I$ 點在 $\angle ABC$ 的角平分線上， $\therefore \overline{ID} = \overline{IF}$ ，

又 I 點在 $\angle ACB$ 的角平分線上， $\therefore \overline{ID} = \overline{IE}$ 。

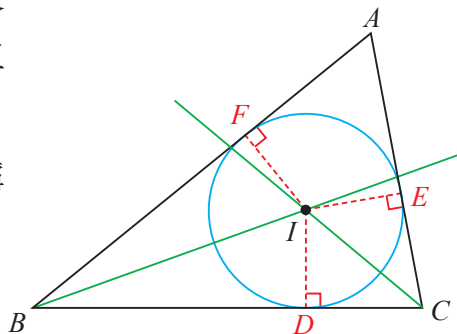
因此 $\overline{ID} = \overline{IE} = \overline{IF}$ ，即 $\overline{IE} = \overline{IF}$ ，

故 I 點在 $\angle BAC$ 的角平分線上。



由上可知，三角形任意兩內角平分線的交點，即為三內角的角平分線交點。

如圖， $\triangle ABC$ 中， $\angle ABC$ 與 $\angle ACB$ 的角平分線交於 I 點。從 I 點作三個線段 $\overline{ID}$ 、 $\overline{IE}$ 、 $\overline{IF}$ ，分別垂直於三邊 $\overline{BC}$ 、 $\overline{AC}$ 、 $\overline{AB}$ ，若以 I 點為圓心， $\overline{ID}$ 為半徑畫圓，因為 $\overline{ID} = \overline{IE} = \overline{IF}$ ，故此圓和三角形的三邊相切，圓 I 稱為 $\triangle ABC$ 的**內切圓**， $\triangle ABC$ 稱為圓 I 的**圓外切三角形**， I 點為內切圓的圓心，所以將此點稱為三角形的**內心**。



三角形的內心

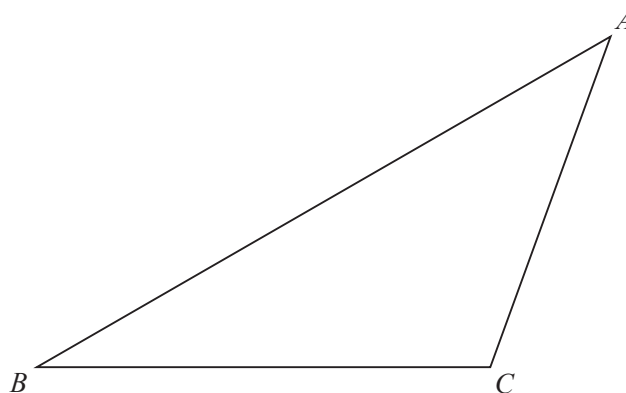
1. 三角形三個內角的角平分線交於一點，此點稱為三角形的內心，內心到三邊的距離相等。
2. 若以三角形的內心為圓心，內心到三邊的距離為半徑畫圓，可畫出此三角形的內切圓。



隨堂練習

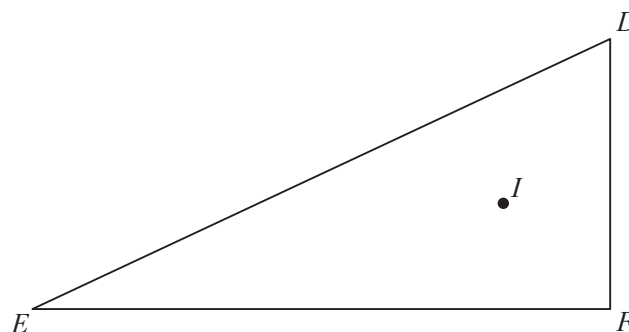
如圖，利用尺規作圖，求作：

(1) $\triangle ABC$ 的內心。



(2) 直角三角形 DEF 的內切圓。

(I 點為內心)。

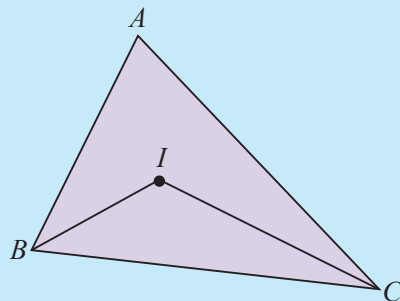


Thinking

任意三角形一定都有內切圓嗎？為什麼？

例5 內心與角度

如圖， I 點為 $\triangle ABC$ 的內心， $\angle ABC = 70^\circ$ ， $\angle ACB = 40^\circ$ ，求 $\angle BIC$ 。



解

$\because I$ 點為 $\triangle ABC$ 的內心，

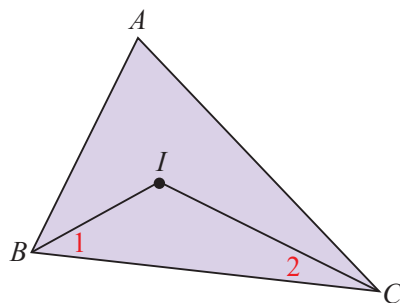
$\therefore \overline{BI}$ 為 $\angle ABC$ 的角平分線，

則 $\angle 1 = \frac{1}{2} \angle ABC = 35^\circ$ ，

同理， $\angle 2 = \frac{1}{2} \angle ACB = 20^\circ$ ，

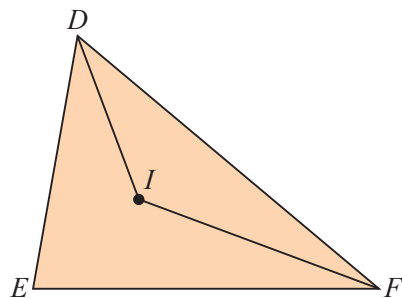
$\angle BIC = 180^\circ - (\angle 1 + \angle 2)$

$= 180^\circ - (35^\circ + 20^\circ) = 125^\circ$ 。

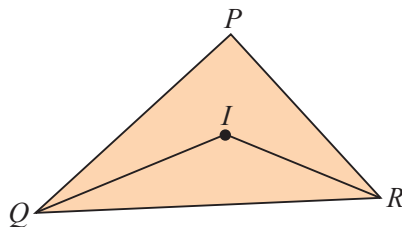


隨堂練習

1. 如圖， I 點為 $\triangle DEF$ 的內心， $\angle EFD = 40^\circ$ ， $\angle E = 80^\circ$ ，求 $\angle DIF$ 。



2. 如圖， I 點為 $\triangle PQR$ 的內心， $\angle QIR = 135^\circ$ ，求 $\angle P$ 。

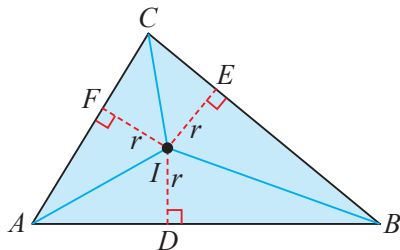


將三角形的內心與三個頂點連接，可以將原三角形分成三個小三角形，因為內心到三邊的距離相等，因此可以利用此性質討論這三個小三角形的面積比。

如圖， $\triangle ABC$ 中， I 點為 $\triangle ABC$ 的內心， $\overline{ID} \perp \overline{AB}$ ， $\overline{IE} \perp \overline{BC}$ ， $\overline{IF} \perp \overline{CA}$ ，其中 D 、 E 、 F 為垂足， $\overline{ID}$ 、 $\overline{IE}$ 、 $\overline{IF}$ 皆為 $\triangle ABC$ 的內切圓半徑，令 $\overline{ID} = \overline{IE} = \overline{IF} = r$ ，

則 $\triangle AIB$ 面積： $\triangle BIC$ 面積： $\triangle CIA$ 面積

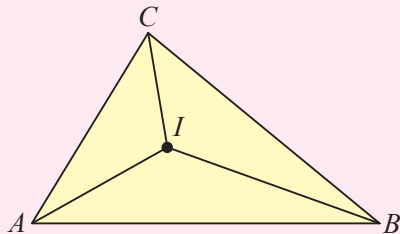
$$= \left(\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times r \right) : \left(\frac{1}{2} \times \overline{BC} \times r \right) : \left(\frac{1}{2} \times \overline{CA} \times r \right) \\ = \overline{AB} : \overline{BC} : \overline{CA}$$



三角形的內心與面積

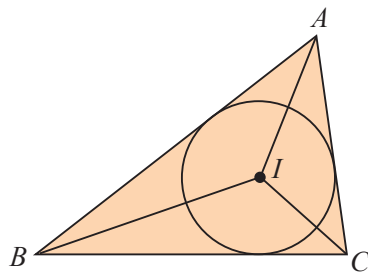
若 I 點為 $\triangle ABC$ 的內心，則

$$\triangle AIB \text{ 面積} : \triangle BIC \text{ 面積} : \triangle CIA \text{ 面積} \\ = \overline{AB} : \overline{BC} : \overline{CA}。$$



隨堂練習

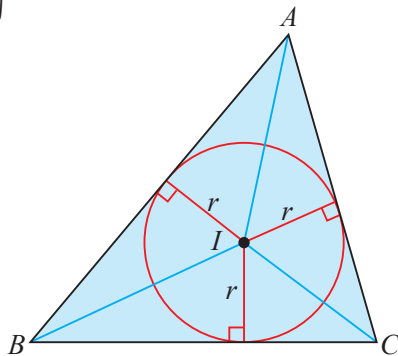
- 如圖， $\triangle ABC$ 中， I 點為內切圓的圓心， $\triangle AIB$ 的面積為 24， $\triangle AIC$ 的面積為 15， $\triangle BIC$ 的面積為 21，求 $\overline{AB} : \overline{AC} : \overline{BC}$ 。



- 若 $\triangle ABC$ 為等腰直角三角形， $\angle C = 90^\circ$ ， I 點為內心，求 $\triangle AIB$ 面積： $\triangle BIC$ 面積： $\triangle CIA$ 面積。

如圖， $\triangle ABC$ 中， I 點為內切圓的圓心， r 為內切圓的半徑， S 為 $\triangle ABC$ 的周長，連接 $\overline{IA}$ 、 $\overline{IB}$ 、 $\overline{IC}$ ，

$$\begin{aligned}\triangle ABC \text{ 面積} &= \triangle AIB \text{ 面積} + \triangle BIC \text{ 面積} + \triangle CIA \text{ 面積} \\ &= \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times r + \frac{1}{2} \times \overline{BC} \times r + \frac{1}{2} \times \overline{CA} \times r \\ &= \frac{1}{2} r (\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA}) \\ &= \frac{1}{2} rS.\end{aligned}$$



📌 三角形面積與內切圓半徑

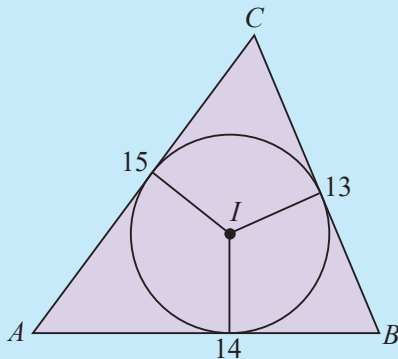
若 r 為三角形的內切圓半徑， S 為三角形的周長，則三角形的面積為 $\frac{1}{2} rS$ 。

如果已經知道三角形的面積與各邊的邊長，也可利用三角形內心到三邊距離相等的性質，算出三角形內切圓的半徑。

例6 利用面積求內切圓半徑

自評 P180 第 3 題

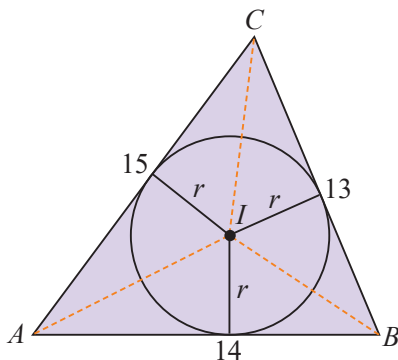
如圖， I 點為 $\triangle ABC$ 的內心， $\triangle ABC$ 的面積為 84，若 $\overline{AC}=15$ ， $\overline{BC}=13$ ， $\overline{AB}=14$ ，求 $\triangle ABC$ 的內切圓半徑。



解 設內切圓的半徑為 r ，三角形的周長為 S 。

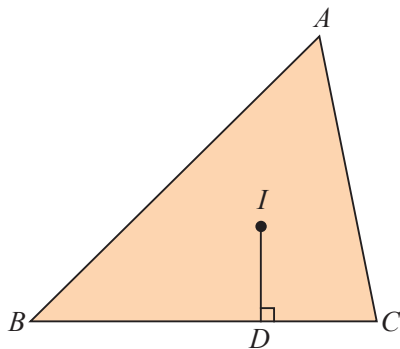
$$\begin{aligned}\triangle ABC \text{ 面積} &= \frac{1}{2} \times r \times S \\ 84 &= \frac{1}{2} \times r \times (14 + 13 + 15) \\ r &= 4\end{aligned}$$

故 $\triangle ABC$ 的內切圓半徑為 4。



隨堂練習

如圖， I 點為 $\triangle ABC$ 的內心， $\overline{ID} \perp \overline{BC}$ ， $\triangle ABC$ 的面積為 $6\sqrt{6}$ ， $\overline{AC}=5$ ， $\overline{BC}=6$ ， $\overline{AB}=7$ ，求 $\overline{ID}$ 。



接下來，將探討直角三角形的兩股、斜邊與內切圓半徑的關係。

如圖，直角三角形 ABC 中， $\angle C=90^\circ$ ，內切圓 I 切三邊於 D 、 E 、 F 三點。

(1) $\because$ 圓外一點的兩切線段長相等，

$\therefore$ 可令 $\overline{AD}=\overline{AF}=a$ ， $\overline{BD}=\overline{BE}=b$ ， $\overline{CE}=\overline{CF}=c$ 。

(2) 令圓 I 的半徑為 r ，

$\because \overline{IF} \perp \overline{AC}$ ， $\overline{IE} \perp \overline{BC}$ ， $\angle C=90^\circ$ ，

且 $\overline{IE}=\overline{IF}=r$ ，

$\therefore$ 四邊形 $IECF$ 為正方形，可得 $c=r$ 。

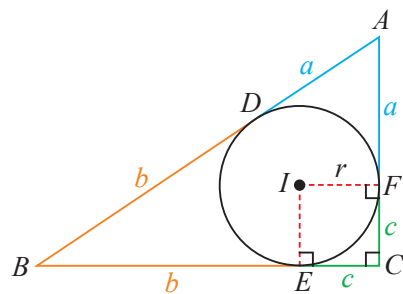
(3) $\overline{AC}+\overline{BC}=(\overline{AF}+\overline{CF})+(\overline{BE}+\overline{CE})$

$$=(a+c)+(b+c)$$

$$=(a+r)+(b+r)$$

$$=(a+b)+2r$$

$$=\overline{AB}+2r$$



$$\begin{aligned}\overline{AC}+\overline{BC} &= \overline{AB}+2r \\ \overline{AC}+\overline{BC}-\overline{AB} &= 2r \\ r &= \frac{\overline{AC}+\overline{BC}-\overline{AB}}{2}\end{aligned}$$

直角三角形的內切圓半徑

若 r 為直角三角形的內切圓半徑，則兩股和 = 斜邊長 + $2r$ ，

即 $r = \frac{\text{兩股和} - \text{斜邊長}}{2}$ 。

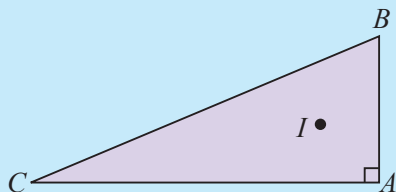
例7 直角三角形的內切圓

自評 P181 第4題

如圖， $\triangle ABC$ 中， I 為內心， $\angle A = 90^\circ$ ， $\overline{AB} = 5$ ， $\overline{AC} = 12$ ，求：

(1) $\triangle ABC$ 的內切圓半徑。

(2) $\overline{IB}$ 。



解

(1) 斜邊 $\overline{BC} = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$ ，

設內切圓半徑為 r ，

$$\overline{AB} + \overline{AC} = \overline{BC} + 2r$$

$$5 + 12 = 13 + 2r$$

$$r = 2$$

故內切圓半徑 = 2。

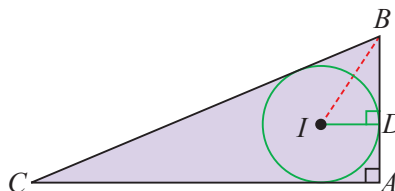
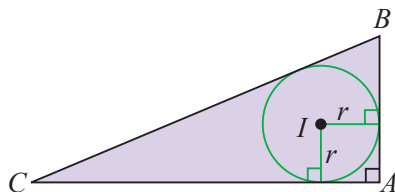
(2) $\triangle IBD$ 中， $\overline{ID} = 2$ ，

$$\overline{BD} = \overline{AB} - \overline{AD}$$

$$= 5 - 2 = 3$$

$$\overline{IB} = \sqrt{\overline{ID}^2 + \overline{DB}^2}$$

$$= \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$$



隨堂練習

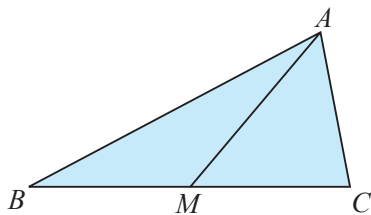
直角三角形 ABC 中， I 為內心， $\angle B = 90^\circ$ ， $\overline{AB} = 8$ ， $\overline{BC} = 6$ ，求：

(1) $\triangle ABC$ 的內切圓半徑。

(2) $\overline{IC}$ 。

3 重心

三角形的頂點與其對邊中點的連線稱為**中線**。
如圖， $\triangle ABC$ 中， M 是 $\overline{BC}$ 的中點，則 $\overline{AM}$ 為其中一條中線。每個三角形有三條中線，而三中線是否交於一點呢？完成下方的  **探索活動** 就可以知道了。

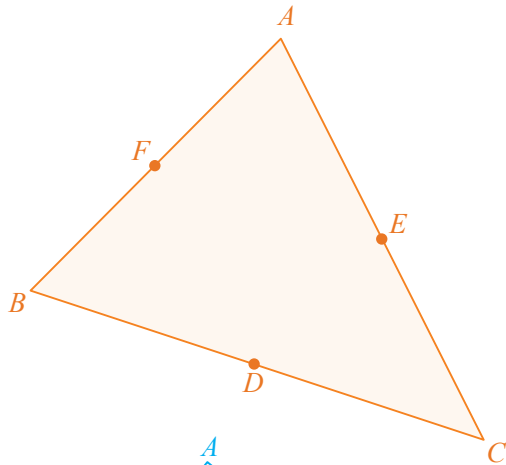


中線一定通過中點，但不一定垂直對邊，而中垂線一定垂直對邊，但不一定通過頂點。

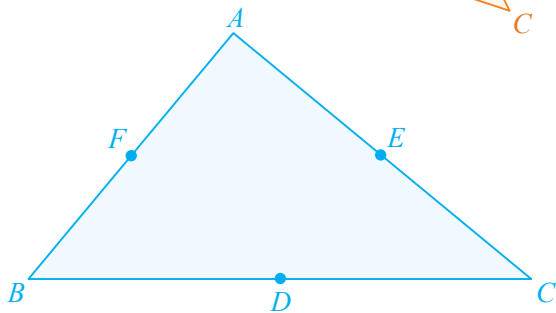
探索活動 三角形的重心

在下圖中，有銳角三角形、直角三角形、
鈍角三角形，其中 D 、 E 、 F 三點分別是
 $\triangle ABC$ 的三邊中點，回答下列問題：

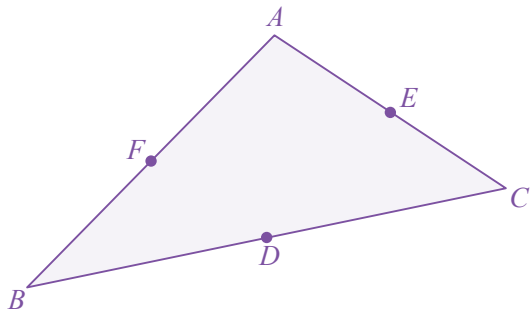
(1) 在右圖中，畫出銳角三角形 ABC 的三中線，觀察此三中線是否交於一點？



(2) 在右圖中，畫出直角三角形 ABC 的三中線，觀察此三中線是否交於一點？

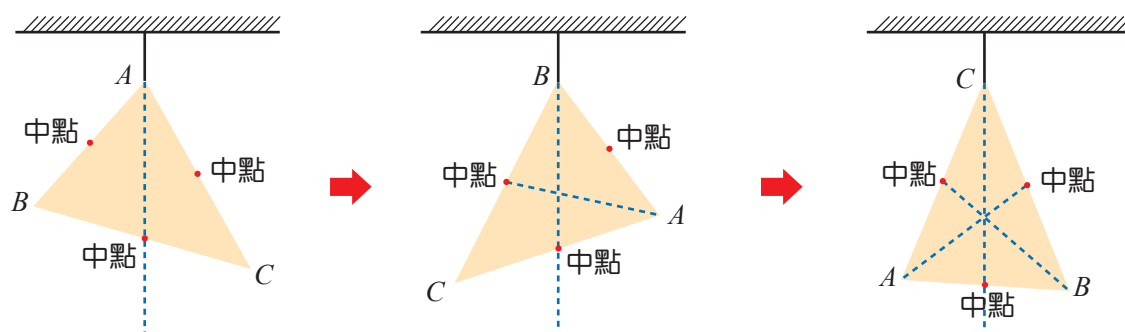


(3) 在右圖中，畫出鈍角三角形 ABC 的三中線，觀察此三中線是否交於一點？



由前頁  **探索活動** 可知：任意三角形三內角的三條中線交於同一點，此點稱為**三角形的重心**。它為何要稱為三角形的重心呢？

利用附件 12 將材質均勻的三角形板的頂點穿一個小洞懸掛起來，畫出過懸掛點的鉛垂線，依次輪流懸掛每一個頂點，並畫虛線。由此可觀察到這三條虛線都會通過懸掛頂點的對邊中點，且這三條鉛垂線也會交於一點。



如圖，如果用手指撐起三角形板的重心，可發現三角形板呈現平衡的狀態，不會掉下來。



由上述可知：材質均勻的三角板上所畫的三條中線交於同一點，由此點支撐起來的三角板可以呈現平衡。此點為物體重力的中心，所以將此點稱為三角板的重心。

接著將討論三角形重心的一些性質。

如圖一， $\triangle ABC$ 中， D 、 E 、 F 分別為 $\overline{BC}$ 、 $\overline{AC}$ 、 $\overline{AB}$ 的中點，且 $\overline{BE}$ 和 $\overline{CF}$ 兩條中線交於 G 點。

(1) 連接 $\overline{EF}$ 。

(2) $\because E$ 、 F 分別為 $\overline{AC}$ 、 $\overline{AB}$ 的中點，

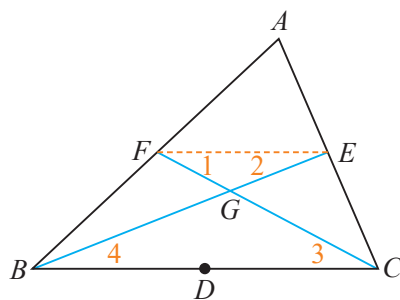
$$\therefore \overline{EF} \parallel \overline{BC} \text{ 且 } \overline{EF} = \frac{1}{2} \overline{BC}。$$

(3) 在 $\triangle GBC$ 與 $\triangle GEF$ 中，

$$\angle 1 = \angle 3, \angle 2 = \angle 4 \quad (\overline{EF} \parallel \overline{BC}),$$

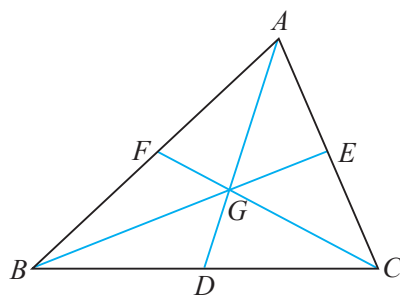
則 $\triangle GBC \sim \triangle GEF$ (AA 相似性質)，

$$\text{故 } \overline{BG} : \overline{GE} = \overline{CG} : \overline{GF} = \overline{BC} : \overline{EF} = 2 : 1。$$



圖一

在圖一中，由於三角形的三條中線交於一點，所以連接 $\overline{AD}$ ，如圖二，則 $\overline{AD}$ 也會通過 G 點，因此可得 $\overline{AG} : \overline{GD} = 2 : 1$ 。



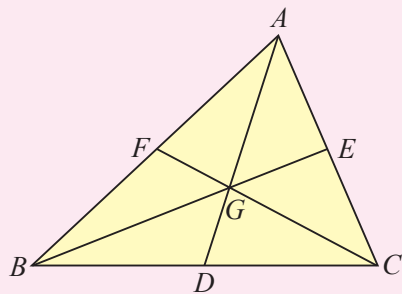
圖二

☑ 三角形重心性質

如圖， $\triangle ABC$ 中，若 $\overline{AD}$ 、 $\overline{BE}$ 、 $\overline{CF}$ 為三條中線，

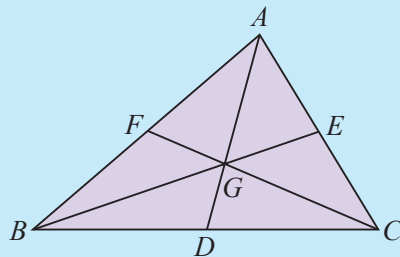
則 G 點為重心，且 $\overline{AG} : \overline{GD} = 2 : 1$ ，

$$\overline{BG} : \overline{GE} = 2 : 1, \overline{CG} : \overline{GF} = 2 : 1。$$



例8 重心到頂點的距離

如圖， $\triangle ABC$ 中，三條中線 $\overline{AD}$ 、 $\overline{BE}$ 、 $\overline{CF}$ 交於 G 點， $\overline{AD}=12$ ， $\overline{BE}=18$ ， $\overline{CF}=15$ ，求 $\overline{AG}$ 、 $\overline{BG}$ 、 $\overline{CG}$ 。

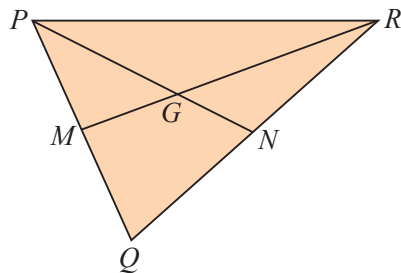


解 $\because G$ 為三條中線 $\overline{AD}$ 、 $\overline{BE}$ 、 $\overline{CF}$ 的交點，
 $\therefore G$ 點為 $\triangle ABC$ 的重心，
 故 $\overline{AG} : \overline{GD} = 2 : 1$ ， $\overline{BG} : \overline{GE} = 2 : 1$ ， $\overline{CG} : \overline{GF} = 2 : 1$ 。
 即 $\overline{AG} = \frac{2}{3} \overline{AD} = \frac{2}{3} \times 12 = 8$ ，
 $\overline{BG} = \frac{2}{3} \overline{BE} = \frac{2}{3} \times 18 = 12$ ，
 $\overline{CG} = \frac{2}{3} \overline{CF} = \frac{2}{3} \times 15 = 10$ 。

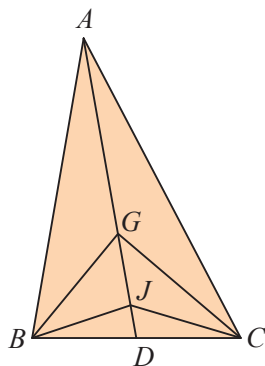


隨堂練習

1. 如圖， $\triangle PQR$ 中， M 、 N 分別為 $\overline{PQ}$ 、 $\overline{QR}$ 的中點， $\overline{PN}$ 、 $\overline{RM}$ 交於 G 點，若 $\overline{GM} + \overline{GN} = 5$ ，求 $\overline{PN} + \overline{RM}$ 。

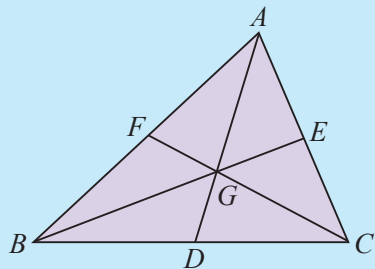


2. 如圖， G 為 $\triangle ABC$ 重心， J 為 $\triangle GBC$ 重心，若 $\overline{AG}=24$ ，求 $\overline{GJ}=?$



例9 重心與面積

如圖， $\triangle ABC$ 的三條中線 $\overline{AD}$ 、 $\overline{BE}$ 、 $\overline{CF}$ 交於 G 點，求證 $\triangle AGB$ 、 $\triangle BGC$ 、 $\triangle CGA$ 的面積相等。



證明

(1) $\triangle ABC$ 中， D 為 $\overline{BC}$ 中點， $\overline{BD} = \overline{CD}$ ，

$\therefore \triangle ABD$ 面積 = $\triangle ACD$ 面積 (等底同高)，

同理， $\triangle BGD$ 面積 = $\triangle CGD$ 面積。

(2) $\triangle AGB$ 面積 = $\triangle ABD$ 面積 - $\triangle BGD$ 面積

= $\triangle ACD$ 面積 - $\triangle CGD$ 面積 = $\triangle CGA$ 面積，

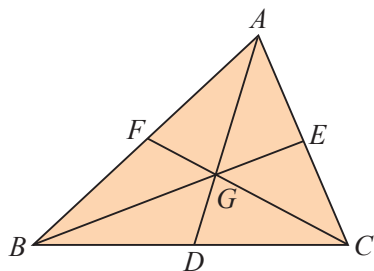
同理， $\triangle BGC$ 面積 = $\triangle CGA$ 面積，

$\therefore \triangle AGB$ 面積 = $\triangle BGC$ 面積 = $\triangle CGA$ 面積。



隨堂練習

如圖， $\triangle ABC$ 的三條中線 $\overline{AD}$ 、 $\overline{BE}$ 、 $\overline{CF}$ 交於 G 點，求證 $\triangle AFG$ 面積 = $\frac{1}{6} \triangle ABC$ 面積。

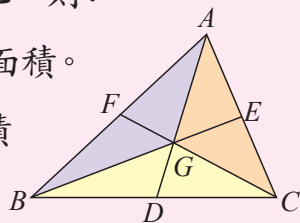


三角形重心與面積

如圖， $\triangle ABC$ 中， $\overline{AD}$ 、 $\overline{BE}$ 、 $\overline{CF}$ 為三條中線， G 點為重心，則：

(1) $\triangle AGB$ 面積 = $\triangle BGC$ 面積 = $\triangle CGA$ 面積 = $\frac{1}{3} \triangle ABC$ 面積。

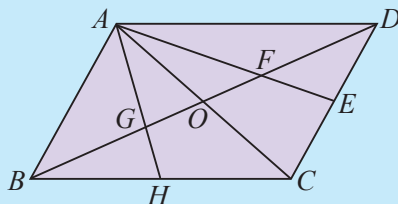
(2) $\triangle AGF$ 面積 = $\triangle BGF$ 面積 = $\triangle BGD$ 面積 = $\triangle CGD$ 面積
= $\triangle CGE$ 面積 = $\triangle AGE$ 面積 = $\frac{1}{6} \triangle ABC$ 面積。



例10 重心的應用

自評 P181 第 5 題

如圖，平行四邊形 $ABCD$ 中， O 為對角線 $\overline{AC}$ 、 $\overline{BD}$ 的交點， E 為 $\overline{CD}$ 中點， H 為 $\overline{BC}$ 中點，求證 $\overline{BG} = \overline{GF} = \overline{FD}$ 。



證明

(1) $\because$ 平行四邊形對角線互相平分，

$$\therefore \overline{AO} = \overline{OC}, \overline{BO} = \overline{OD}。$$

(2) $\triangle ABC$ 中， O 為 $\overline{AC}$ 中點， H 為 $\overline{BC}$ 中點，

$\therefore G$ 點為 $\triangle ABC$ 的重心，

$$\text{故 } \overline{BG} = \frac{2}{3} \overline{BO}, \overline{GO} = \frac{1}{3} \overline{BO}。$$

$$\text{同理，} \overline{FD} = \frac{2}{3} \overline{OD}, \overline{FO} = \frac{1}{3} \overline{OD}。$$

(3) $\because \overline{BO} = \overline{OD}$ ，

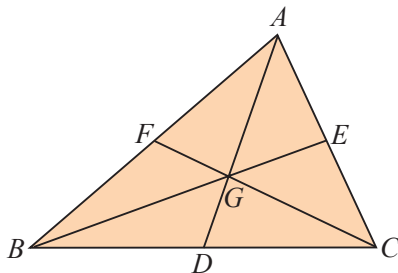
$$\begin{aligned} \therefore \overline{GF} &= \overline{GO} + \overline{FO} \\ &= \frac{1}{3} \overline{BO} + \frac{1}{3} \overline{OD} \\ &= \frac{2}{3} \overline{BO}, \end{aligned}$$

$$\text{故 } \overline{BG} = \overline{GF} = \overline{FD}。$$



隨堂練習

如圖， G 點為 $\triangle ABC$ 的重心， $\overline{AD}$ 、 $\overline{BE}$ 、 $\overline{CF}$ 為 $\triangle ABC$ 的中線，若 $\overline{AG} + \overline{BG} + \overline{CG} = 16$ 公分，則 $\overline{AD} + \overline{BE} + \overline{CF} = ?$

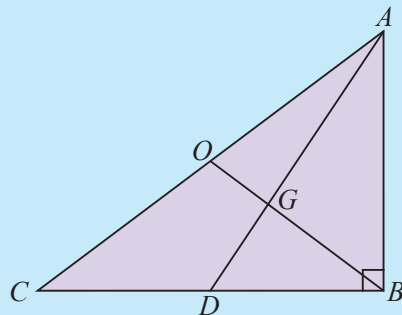


例11 直角三角形的重心

自評 P181 第 6 題

如圖， $\triangle ABC$ 中， $\angle ABC=90^\circ$ ，兩條中線 $\overline{AD}$ 、 $\overline{BO}$ 交於 G 點， $\overline{AB}=6$ ， $\overline{BC}=8$ ，求：

- (1) $\overline{GO}$ 。
- (2) $\triangle ABG$ 的面積。



解

$$(1) \overline{AC} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10,$$

$\because O$ 點為直角三角形 ABC 的斜邊中點，

$$\overline{BO} = \overline{AO} = \overline{CO} = \frac{1}{2} \overline{AC} = \frac{1}{2} \times 10 = 5。$$

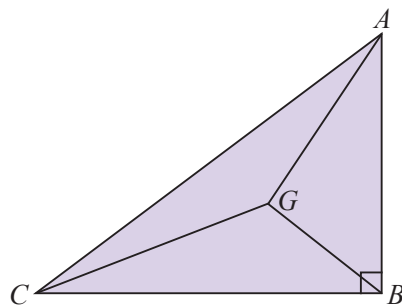
又 $\triangle ABC$ 的兩條中線交於 G 點，

$\therefore G$ 點為 $\triangle ABC$ 的重心。

$$\text{故 } \overline{GO} = \frac{1}{3} \overline{BO} = \frac{1}{3} \times 5 = \frac{5}{3}。$$

- (2) $\because G$ 點為 $\triangle ABC$ 的重心，

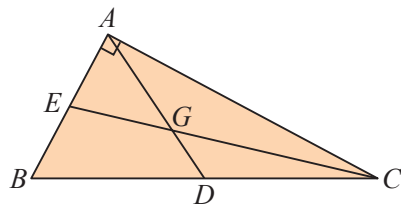
$$\begin{aligned} \therefore \triangle ABG \text{ 的面積} &= \frac{1}{3} \triangle ABC \text{ 的面積} \\ &= \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times 6 \times 8 \right) = 8。 \end{aligned}$$



隨堂練習

如圖， $\triangle ABC$ 中，兩條中線 $\overline{AD}$ 、 $\overline{CE}$ 交於 G 點， $\overline{AB}=8$ ， $\overline{AC}=15$ ， $\angle BAC=90^\circ$ ，求：

- (1) $\overline{GD}$ 。
- (2) 四邊形 $EBDG$ 的面積。

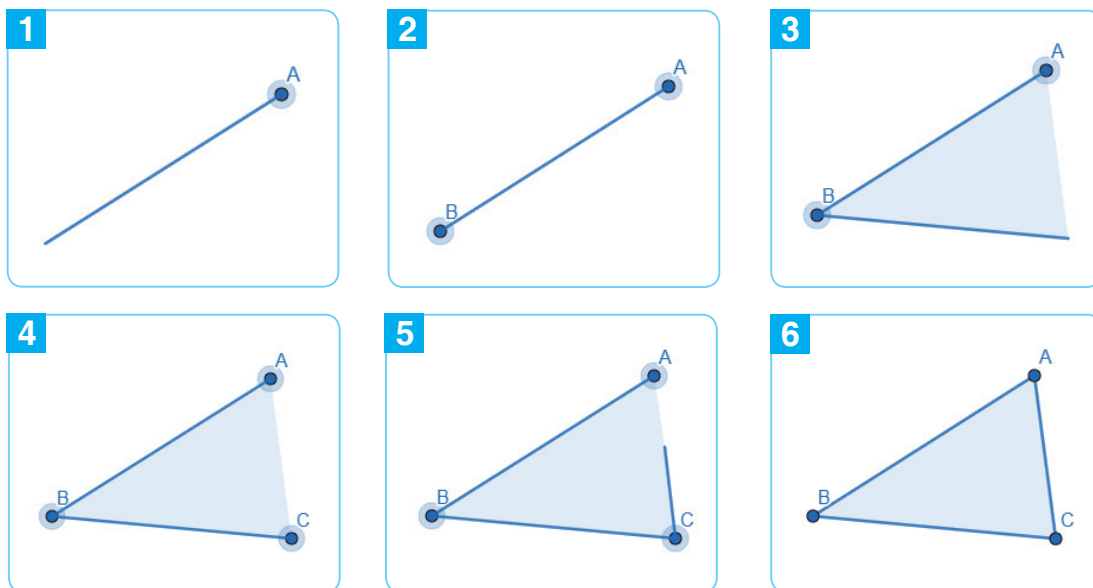


利用 Geogebra 繪製三角形的外心及外接圓

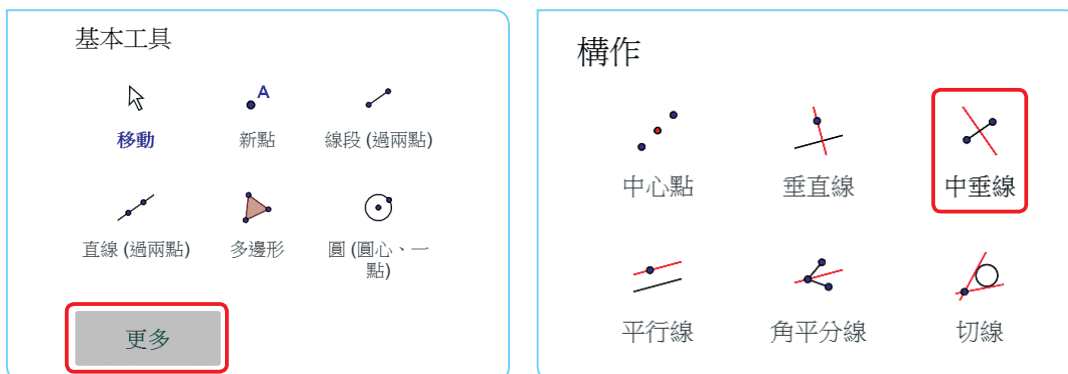
利用電腦軟體繪製三角形的心，更方便、更有效率且美觀。以下嘗試製作三角形的外心及其外接圓，我們以免費軟體 Geogebra 線上繪製。

步驟 1：瀏覽器輸入網址：<https://www.geogebra.org/>，滑鼠左鍵點擊 **幾何**。

步驟 2：選取左邊 **多邊形** 工具，在右邊繪圖區依序點取三次，產生 A 、 B 、 C 三點，最後滑鼠回到 A 點，畫出 $\triangle ABC$ 。



步驟 3：位於基本工具最下方，點選 **更多**，出現多種工具項目，在構作工具項下，點選 **中垂線**。



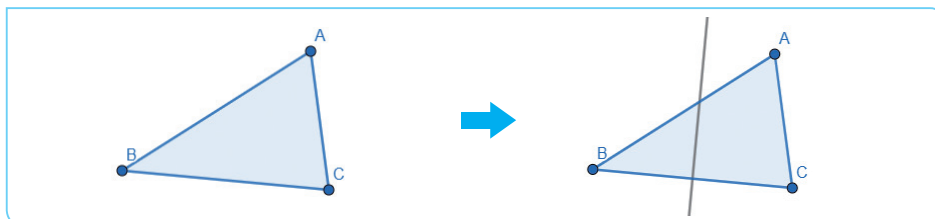


Geogebra

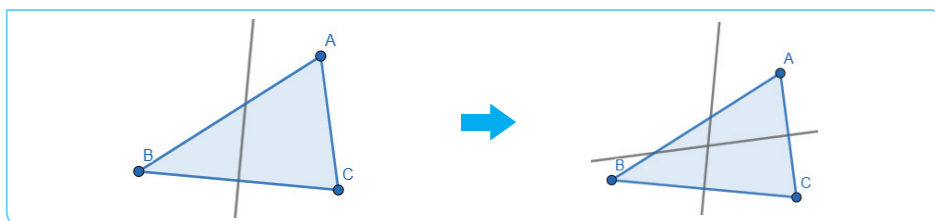


外心

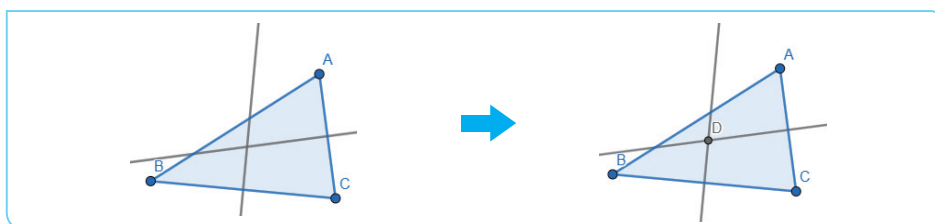
步驟 4：滑鼠左鍵點擊 $\overline{BC}$ 線段，放開左鍵即產生 $\overline{BC}$ 之中垂線。



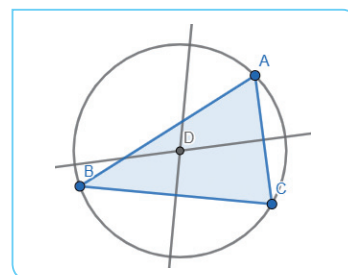
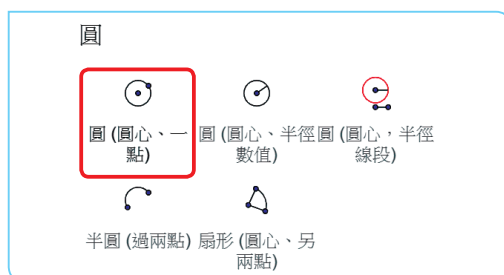
步驟 5：滑鼠左鍵點擊 $\overline{AC}$ 線段，放開左鍵即產生 $\overline{AC}$ 之中垂線。



步驟 6：選擇基本工具的 **新點**，再移動滑鼠點擊兩條中垂線相交處，當滑鼠變成手型，點擊左鍵放開，出現 D 點，即為外心。



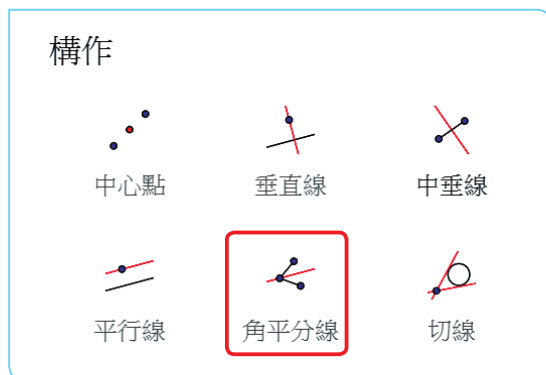
步驟 7：選擇圓工具的 **圓(圓心、一點)**，再移動滑鼠分別點擊 D 點和 A 、 B 、 C 中任一點，即可完成 $\triangle ABC$ 的外接圓。



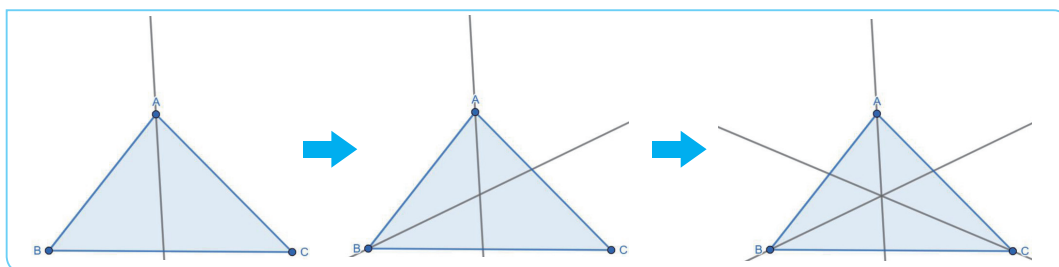
利用 Geogebra 繪製三角形的內心與重心

內心

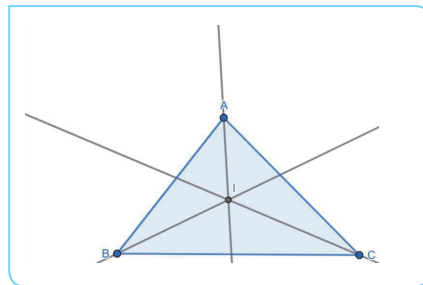
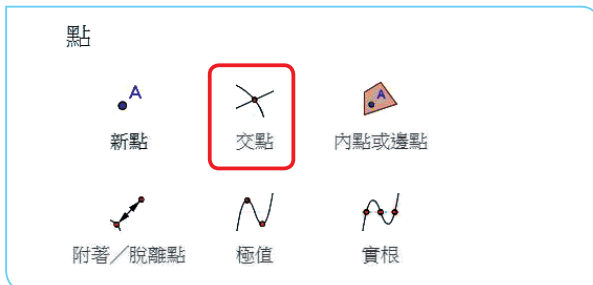
步驟 1：在構作工具項下，點選 **角平分線**。



步驟 2：由 C 點開始依序往 A 、 B 兩點按滑鼠左鍵一下，即可畫出 $\angle A$ 的角平分線，以此類推，分別畫出 $\angle B$ 、 $\angle C$ 的角平分線。



步驟 3：選擇點工具的 **交點**，在 $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$ 任意兩條角平分線上各按滑鼠左鍵一下，點擊左鍵放開，出現 I 點，即為內心。





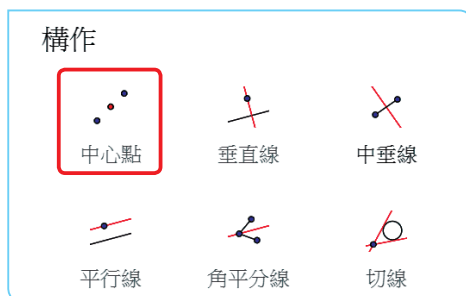
內心



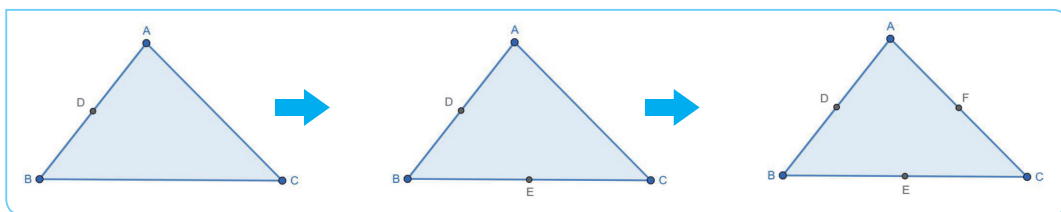
重心

重心

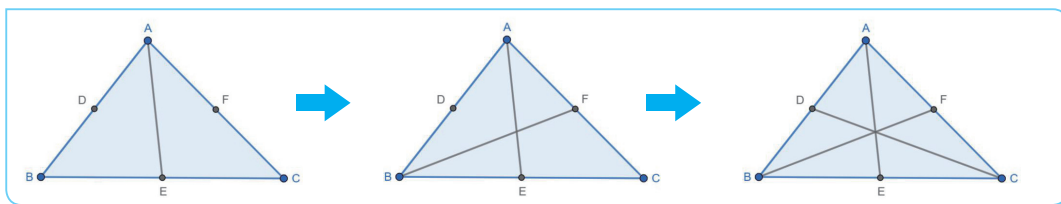
步驟 1：在構作工具項下，點選 **中心點**。



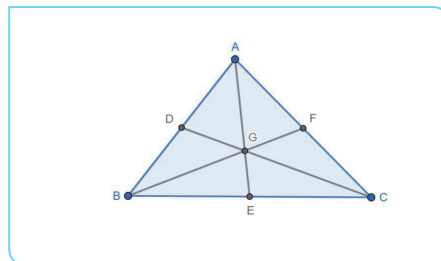
步驟 2：在 A 、 B 兩點上各按滑鼠左鍵一下，畫出 A 、 B 的中點 D ，以此類推，畫出 B 、 C 的中點 E ， A 、 C 的中點 F 。



步驟 3：選擇基本工具 **線段(過兩點)**，在點 A 、 E 上各按滑鼠左鍵一下，畫出中線 $\overline{AE}$ ，以此類推，分別畫出兩條中線 $\overline{BF}$ 、 $\overline{DC}$ 。



步驟 4：選擇點工具的 **交點**，在 $\overline{AE}$ 、 $\overline{BF}$ 、 $\overline{DC}$ 任意兩條中線上各按滑鼠左鍵一下，點擊左鍵放開，出現 G 點，即為重心。

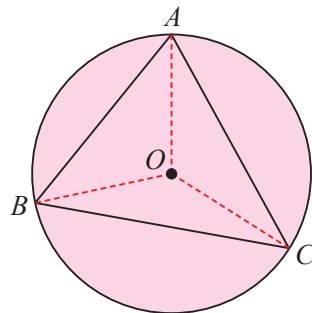


重點回顧

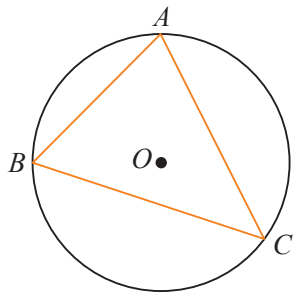
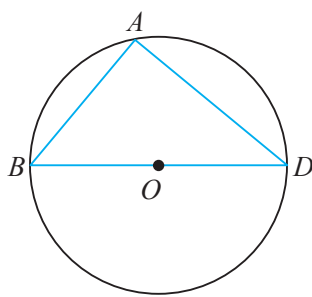
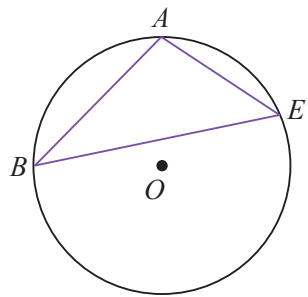
① 外心

- (1) 三角形的外心：三角形三邊的中垂線交於一點，此點稱為三角形的外心，外心到三頂點的距離相等，且外心也是此三角形外接圓的圓心。

例 如圖， $\triangle ABC$ 中， O 點為外心，則 $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC}$ 。



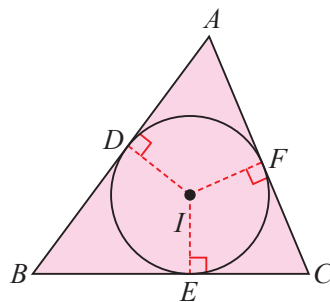
- (2) 三角形外心的位置：

銳角三角形	直角三角形	鈍角三角形
		
外心在三角形內部	外心在三角形的斜邊中點	外心在三角形外部

② 內心

- (1) 三角形的內心： $\triangle ABC$ 三內角的角平分線交於一點 I ，此點 I 稱為三角形的內心，內心到三邊的距離相等，且內心也是此三角形內切圓的圓心。

例 如圖， $\triangle ABC$ 中， I 點為內心，則 $\overline{ID} = \overline{IE} = \overline{IF}$ 。



- (2) 三角形內心與面積：

若 I 點為 $\triangle ABC$ 的內心，則

$$\triangle AIB \text{ 面積} : \triangle BIC \text{ 面積} : \triangle CIA \text{ 面積} = \overline{AB} : \overline{BC} : \overline{CA}。$$

例 已知 $\triangle ABC$ 中， I 為內心，若 $\overline{AB} : \overline{BC} : \overline{CA} = 8 : 7 : 5$ ，則 $\triangle AIB$ 面積： $\triangle BIC$ 面積： $\triangle CIA$ 面積 $= 8 : 7 : 5$ 。

(3) 三角形的內切圓半徑：

① 若 r 為三角形的內切圓半徑， S 為三角形的周長，則三角形的面積為 $\frac{1}{2} rS$ 。

例 若 $\triangle ABC$ 的周長為 20，內切圓半徑為 5，
則 $\triangle ABC$ 的面積 $= \frac{1}{2} \times 5 \times 20 = 50$ 。

② 若 r 為直角三角形的內切圓半徑，則兩股和 $=$ 斜邊長 $+ 2r$ ，
即 $r = \frac{\text{兩股和} - \text{斜邊長}}{2}$ 。

例 若直角三角形的三邊長為 8、15、17，
則內切圓半徑 $= \frac{8+15-17}{2} = 3$ 。

3 重心

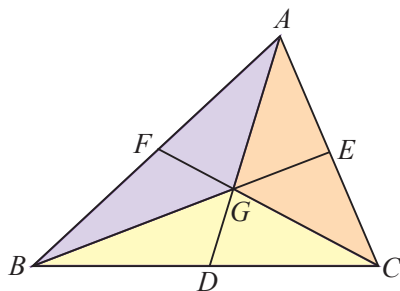
(1) 三角形的三條中線交於一點，此點為三角形的重心。

(2) 如圖， $\triangle ABC$ 中， $\overline{AD}$ 、 $\overline{BE}$ 、 $\overline{CF}$ 為三條中線， G 點為重心，則：

① $\overline{AG} : \overline{GD} = \overline{BG} : \overline{GE} = \overline{CG} : \overline{GF} = 2 : 1$ 。

② $\triangle AGB$ 面積 $= \triangle BGC$ 面積 $= \triangle CGA$ 面積
 $= \frac{1}{3} \triangle ABC$ 面積。

③ $\triangle AGF$ 面積 $= \triangle BGF$ 面積 $= \triangle BGD$ 面積
 $= \triangle CGD$ 面積 $= \triangle CGE$ 面積 $= \triangle AGE$ 面積
 $= \frac{1}{6} \triangle ABC$ 面積。



例 已知 $\triangle ABC$ 中， G 點為重心，若 $\triangle ABC$ 的面積為 42，
則 $\triangle AGB$ 面積 $= \triangle BGC$ 面積 $= \triangle CGA$ 面積 $= \frac{1}{3} \times 42 = 14$ 。
 $\triangle AGF$ 面積 $= \triangle BGF$ 面積 $= \triangle BGD$ 面積
 $= \triangle CGD$ 面積 $= \triangle CGE$ 面積 $= \triangle AGE$ 面積
 $= \frac{1}{6} \times 42 = 7$ 。

3-2 自我評量

① 若直角三角形的兩股長為 2、6，求其外心到三個頂點的距離和。

課 P154 例 1

② $\triangle ABC$ 中，已知 $\angle A = 60^\circ$ ， $\angle B = 40^\circ$ ，若 O 點為 $\triangle ABC$ 的外心，求 $\angle BOC$ 。

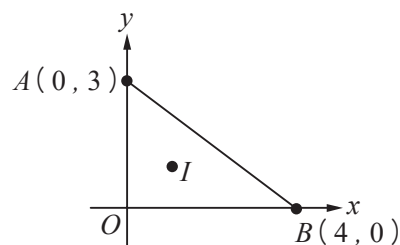
課 P156 例 3

③ $\triangle ABC$ 的面積為 24，其內切圓半徑為 2，求 $\triangle ABC$ 的周長。

課 P164 例 6

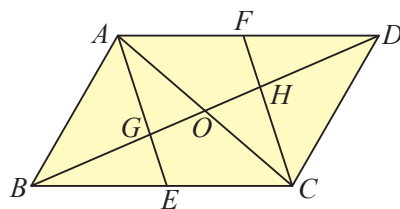
- ④如圖，在坐標平面上， $A(0, 3)$ 、 $B(4, 0)$ ， I 點為 $\triangle AOB$ 的內心，求 I 點坐標。

課 P166 例 7



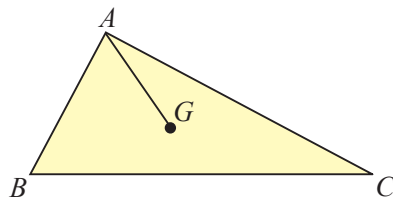
- ⑤如圖，平行四邊形 $ABCD$ 面積為 48， E 、 F 為 $\overline{BC}$ 、 $\overline{AD}$ 中點，對角線 $\overline{BD}$ 交 $\overline{AE}$ 、 $\overline{CF}$ 於 G 、 H ，求四邊形 $AGHF$ 面積。

課 P172 例 10



- ⑥如圖， $\triangle ABC$ 中， G 為重心， $\overline{AB}=8$ ， $\overline{AC}=15$ ， $\angle B + \angle C = 90^\circ$ ，求 $\overline{AG}$ 。

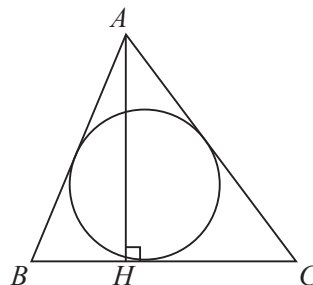
課 P173 例 11



自我挑戰

本頁為概念統整課程，由學生自行挑戰，
教師可視班級情況而自行決定如何運用。

如圖， $\triangle ABC$ 中，已知 $\overline{AB}=13$ ， $\overline{BC}=14$ ，
 $\overline{AC}=15$ ，且 $\overline{AH} \perp \overline{BC}$ ，若 $\overline{BH}=x$ ，回答下列問題：



- (1) 在 $\triangle ABH$ 中，用 x 表示 $\overline{AH}^2 =$ _____ ；
在 $\triangle ACH$ 中，用 x 表示 $\overline{AH}^2 =$ _____ 。

- (2) 求 $\overline{AH}$ 長。

解

- (3) 求 $\triangle ABC$ 的內切圓半徑。

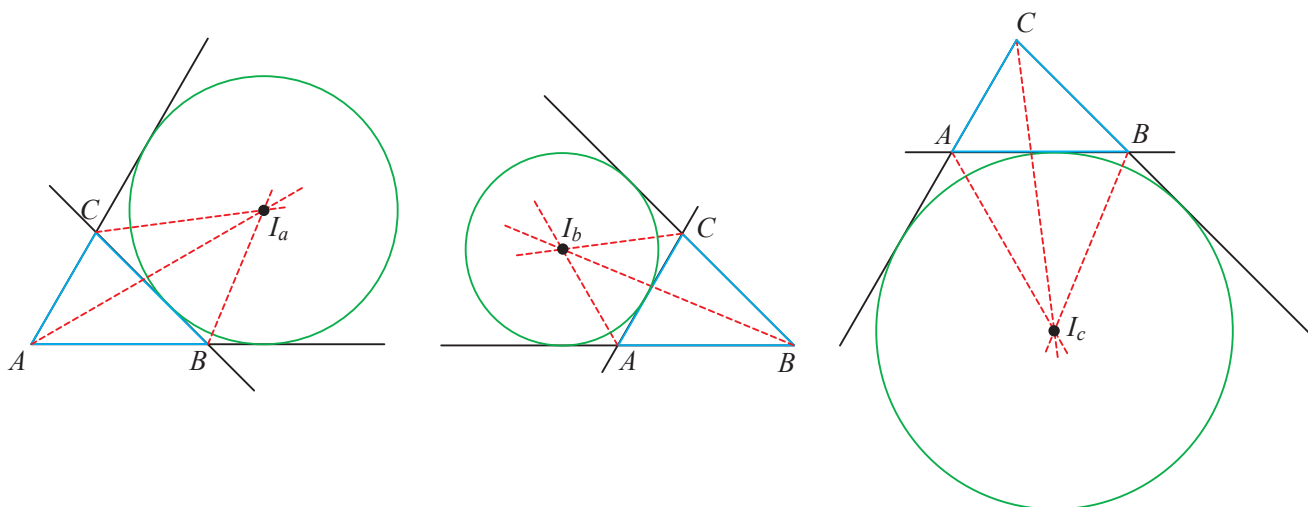
解

數學萬花筒

旁心

三角形中，任意兩角的外角平分線和第三個角的內角平分線交於一點，這種點對於一個三角形而言共有三個，它們即為三角形的**旁心**，旁心恆在三角形的外部，通常以 I_a 、 I_b 、 I_c 表示旁心。

如下圖， $\triangle ABC$ 中，旁切圓 I_a 與 $\overline{BC}$ 相切，旁切圓 I_b 與 $\overline{AC}$ 相切，旁切圓 I_c 與 $\overline{AB}$ 相切。



同學可能還有一個疑問？像外心到三頂點等距離，內心到三邊等距離，那旁心有什麼性質呢？

旁切圓與內切圓不同之處在於內切圓在三角形的內部（因為內心是三條內角平分線的交點），且與三角形三邊的直線相切；而旁切圓雖然也與三角形三邊的直線相切，但是它是在三角形的外部，既然旁心也是角平分線的交點，自然也是到三邊所在直線的距離相等，只不過它是在三角形的外部罷了。

自我挑戰解答

第 1 章 P82

(1) 設影長為 x 公分，

$$100 : 150 = 60 : x$$

$$100x = 150 \times 60 = 9000$$

$$x = 90 \text{ (公分)}$$

答：90 公分。

(2) 設第 3 根柱子高度為 $\overline{AB}$ ，其落在牆上的影子 $\overline{CD}$ 相關位置關係如右圖，

則 $\overline{BD} = 120$ 公分， $\overline{CD} = 120$ 公分。

$\because \overline{CD} : 100 = \overline{DE} : 60$ (利用(1)，將 $\overline{CD}$ 想像為柱高， $\overline{DE}$ 為影長)

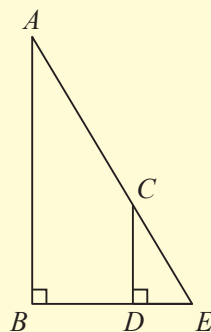
$$120 : 100 = \overline{DE} : 60$$

$$\overline{DE} = 72$$

故 $\overline{BE} = 120 + 72 = 192$ (公分)

且 $\overline{AB} : 100 = 192 : 60$

$$\overline{AB} = \frac{100 \times 192}{60} = 320 \text{ (公分)}$$



答：320 公分。

第 2 章 P128

(1) 設掃地機器人圓心為 O ，半徑為 r 公分， X 、 Y 、 Z 為切點，

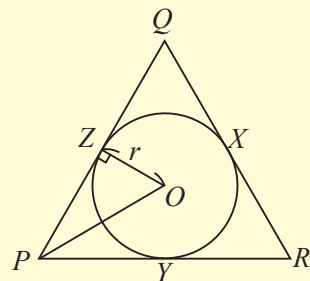
$\therefore \angle OZP = 90^\circ$ ，故 $\triangle POZ$ 為 $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ 的直角三角形，

得 $\overline{OZ} : \overline{PZ} : \overline{OP} = 1 : \sqrt{3} : 2$ ，

$\therefore \overline{PZ} = \overline{PY} = \overline{RY} = \overline{RX} = \overline{QX} = \overline{QZ} = 40$ ，

因此 $r = \overline{OZ} = 40 \times \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{40\sqrt{3}}{3}$ (公分)。

答： $\frac{40\sqrt{3}}{3}$ 公分。



(2) $\therefore$ 掃地機器人半徑為 20 公分，

由(1)可知， $\triangle AOF$ 為 $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ 的直角三角形，

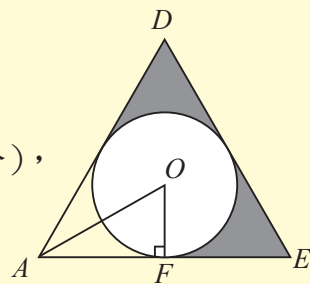
且 $\overline{AF} = \overline{FE} = 20\sqrt{3}$ ，故正三角形 ADE 的邊長為 $40\sqrt{3}$ 公分，

$\therefore$ 正三角形 ADE 的面積 $= \frac{\sqrt{3}}{4} \times (40\sqrt{3})^2 = 1200\sqrt{3}$ (平方公分)，

圓面積 $= 20 \times 20 \times \pi = 400\pi$ (平方公分)，

$\therefore$ 無法經過的區域面積為 $1200\sqrt{3} - 400\pi$ (平方公分)。

答： $(1200\sqrt{3} - 400\pi)$ 平方公分。



第 3 章 P182

(1) 答： $13^2 - x^2$ ； $15^2 - (14 - x)^2$ 。

$$(2) 13^2 - x^2 = 15^2 - (14 - x)^2$$

$$169 - x^2 = 225 - (196 - 28x + x^2)$$

$$28x = 140$$

$$x = 5$$

$$\therefore \overline{AH} = \sqrt{13^2 - x^2} = \sqrt{169 - 5^2} = \sqrt{144} = 12$$

答：12。

(3) 設內切圓半徑為 r ，

$$\because \triangle ABC \text{ 面積} = \frac{1}{2} \times \overline{BC} \times \overline{AH} = \frac{1}{2} \times 14 \times 12 = 84$$

$$\text{又 } \triangle ABC \text{ 面積} = \frac{1}{2} \times r \times \triangle ABC \text{ 周長}$$

$$84 = \frac{1}{2} \times r \times (13 + 14 + 15)$$

$$\therefore r = 4$$

答：4。

1. 常用機型介紹

傳統型計算機



運算規則：依照輸入的先後順序

科學型計算機



運算規則：依照四則運算的規則

手機



註：將手機橫放可出現
三角比等按鍵。

2. 計算機按鍵介紹

以下皆以本教材使用的計算機機型介紹按鍵與按法。



3. 計算機按法介紹

三角比

數值 / 算式	按法	螢幕顯示	搭配課本
$\cos 30^\circ$	30 cos		P74
$\sin 20^\circ$	20 sin		P74

π

數值	按法	螢幕顯示	搭配課本
216π	216 × SHIFT EXP =		P91
$\frac{40}{3}\pi$	40 ÷ 3 × SHIFT EXP =		P92

註：本教材使用之計算機，若需 π 功能，需先按 **SHIFT**，再按 **EXP**。

4. 實作練習 寫出螢幕上顯示的值。

三角比

(1) $\sin 60^\circ =$ _____。 (2) $\cos 60^\circ =$ _____。

(3) $\tan 60^\circ =$ _____。 (4) $\sin 75^\circ =$ _____。

(5) $3\cos 75^\circ =$ _____。 (6) $\frac{20}{\sin 35^\circ} =$ _____。

π

(1) $6\pi =$ _____。 (2) $\frac{100}{3}\pi =$ _____。