

人物介紹



博士

數學狂熱者，擅長將數學套入各種生活情境中。



傑克

幽默風趣愛搞笑，喜歡出風頭。



威利

個性憨厚，但其實是電玩高手，號稱電玩狂人。



妙麗

數學一級棒，說話很犀利，是博士的小助手。



艾美

外表是氣質美少女，但是愛耍冷，喜歡各種藝術類活動。



安琪

個子嬌小天真爛漫，有點小迷糊，愛問問題，心中永遠有十萬個為什麼？



洛基

喜歡吃美食，但又愛漂亮，藉由運動維持身材。

4

一元一次不等式

137

4-1 一元一次不等式的解及圖示 141

4-2 解一元一次不等式及其應用 154

5

統計圖表與統計數據 177

5-1 統計圖表 181

5-2 平均數、中位數與眾數 200

教學附件 229

計算機介紹 239

課中標示說明

課後標示說明



學習前哨站

診斷學生是否已建立先備知識。



學習主題

根據該節主題切割成若干教學活動，以利同學形成階段性的數學觀念，並穩固學習的內涵。



教學例題

與課文相關的基本題目，以實例產生呼應或作為對照說明。附有詳解，並於題號旁標示其題目類型。



隨堂練習

通常於例題後，安排類似的題目，增加同學自我演算的機會。不附解答。



探索活動

透過步驟化的學習，加強同學的思考邏輯能力，並能觀察出數學的原理原則。



議題

在課程內容中融入各項議題，培養學生批判思考及解決問題的能力。



跨領域

數學的應用是跨領域的，結合其他科目的學習，幫助學生統整所學。



Thinking

將特別值得同學思索及探討的問題，用另一個段落來呈現，以便和課文與例題有所區隔。



補給站

提供相關的延伸或生活常識補充，作為延伸思考及課外參考資料。



計算機

搭配計算機的使用教學，培養學生使用計算機的正确態度。看到 ，代表可使用計算機協助計算。



重點摘要

於一段概念學習之後，將重點條列化整理，讓同學更容易掌握重點。



補充說明

針對較為困難或易產生錯誤的地方，作為提示或提醒學生注意。



教學附件

配合課本教學內容，透過附件實際操作，動手也動腦，加深學習成效。



重點回顧

將該節中重要的學習內容，作條列化的統整，方便同學作有系統的複習。



自我評量

每一節後面均安排相關的複習題目，以利於該節結束時，可以加強演練。



資訊普拉斯

提供相關的資訊教學補充，培養學生正確使用工具的素養。



數學萬花筒

提供與該章節相關的補充知識等，作為課外的參考資料。



自我挑戰

本單元為統整課程，由學生自行挑戰，教師視班級情況決定如何運用。



趣學數學

結合教學內容，透過簡單、有趣的數學問題，啟發學習樂趣。

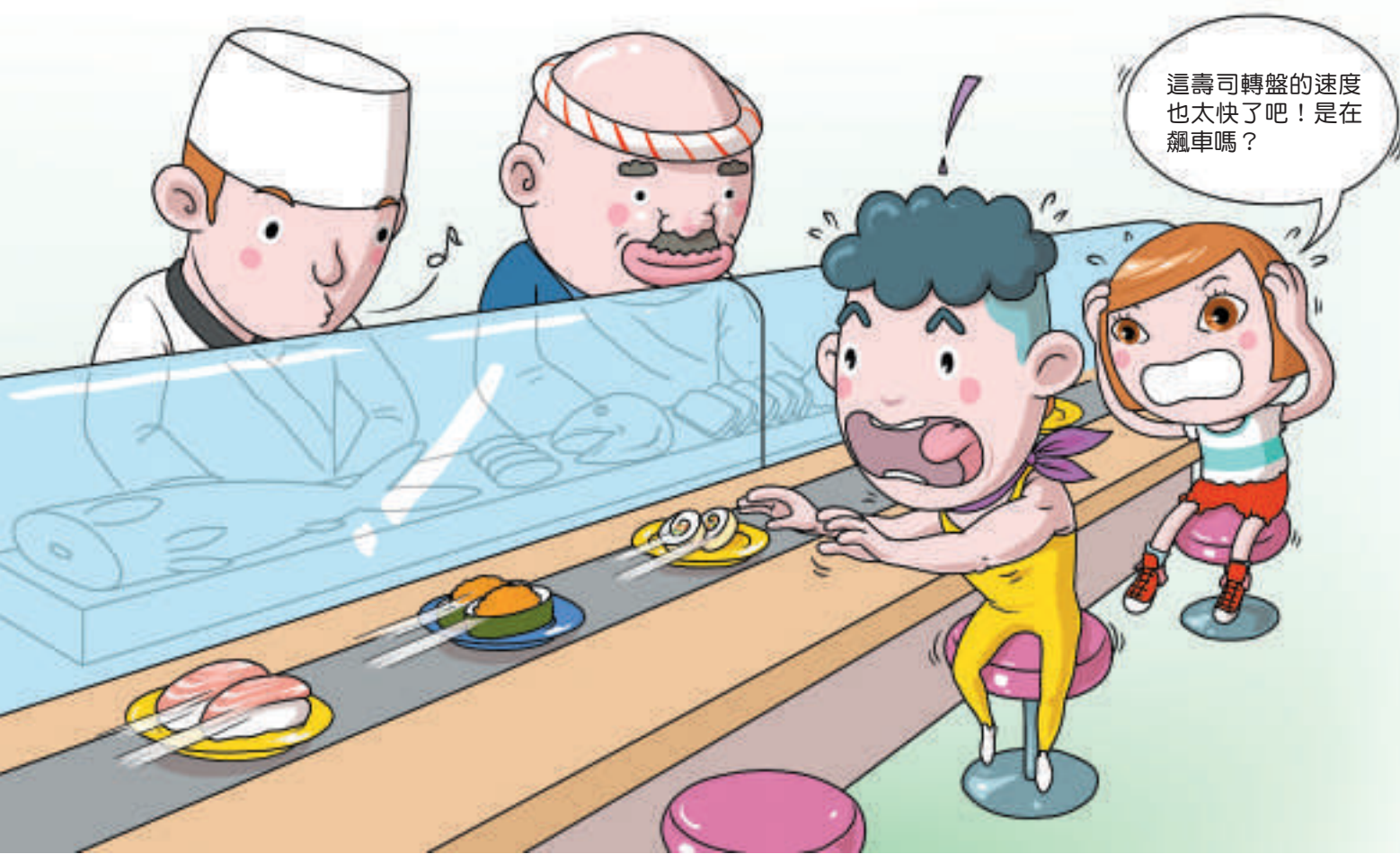
1

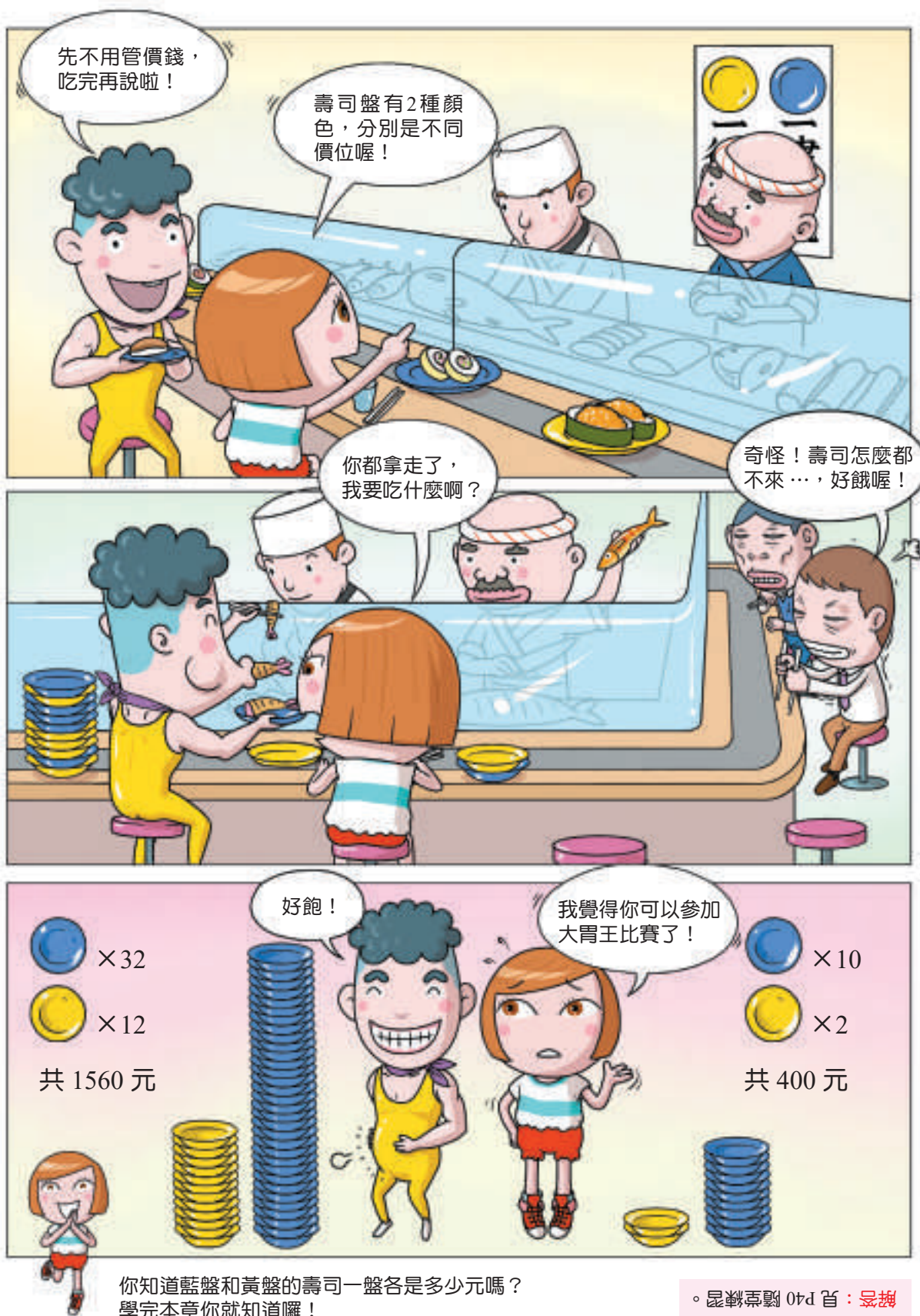
二元一次聯立方程式



迴轉壽司店利用兩個顏色的盤子來代表不同的價錢，在不知道每盤價錢的狀況下，如何透過結帳總金額得知每盤的價錢呢？

第一冊已學習如何利用含一個未知數的一元一次方程式，解決生活中的數量問題，本章將進一步學習如何使用含有兩個未知數解決生活中的問題。







學習前哨站

本單元為學生自我複習，
教師可視班級情況決定如何運用。



回顧 ① 同類項的加減

7 上第 3 章

$$5x - (-2x) = 5x + 2x = 7x$$



式子的加減，同類項要合併，所以化簡 $5x - (-2x)$ 可得 $7x$ 。



課前練習

化簡下列各式：

(1) $7x + (-3x) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(2) $6x - 13x = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

回顧 ② 式子的求值

7 上第 3 章

將 $x = -5$ 代入 $-2x - 6$ ，得 $-2x - 6 = (-2) \times (-5) - 6 = 10 - 6 = 4$

所以當 $x = -5$ 時， $-2x - 6$ 的值為 4。



課前練習

已知 $x = -3$ ，求下列各式的值：

(1) $8x - 4 = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(2) $-2x + 5 = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

回顧 ③ 解一元一次方程式

7 上第 3 章

$$8x - 6x + 2 = 8$$

$$2x + 2 = 8$$

$$2x = 6$$

$$x = 3$$



課前練習

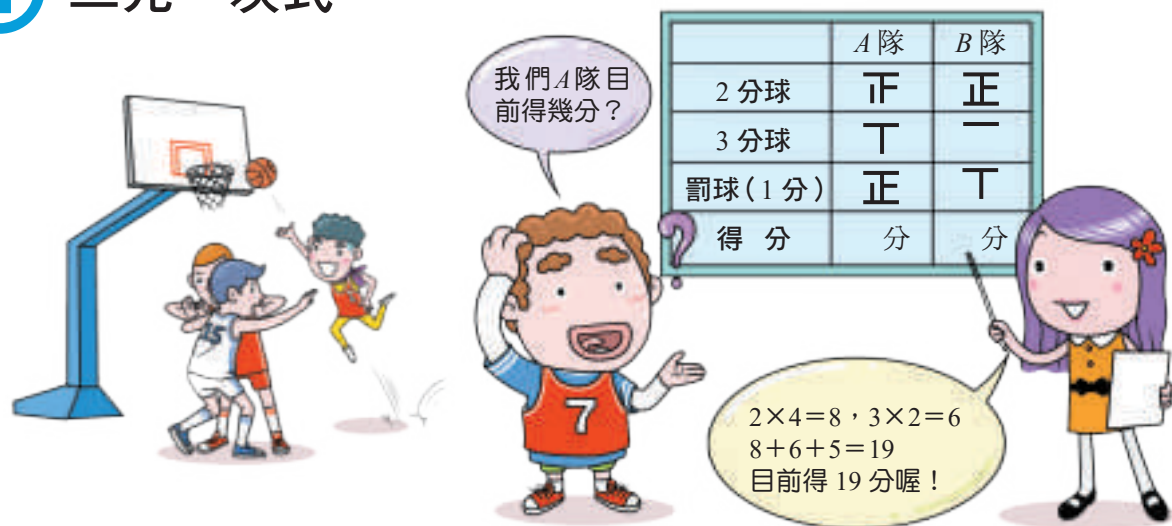
解下列各一元一次方程式：

(1) $7x - 9 = -23$

(2) $-6x - 5(2x + 3) = 17$

1-1 二元一次方程式

① 二元一次式



在第一冊已學過根據題意列出含有 x 的一次式，現在我們要學習含有兩個未知數（例如： x 與 y ）的一次式。以某場籃球賽為例：



：我只投進 x 顆 2 分球，所以我得 $2x$ 分。



：我投進 x 顆 2 分球， y 顆 3 分球，罰球得 5 分，共得 $(2x+3y+5)$ 分。

在上例中， $2x$ 只含有一種未知數（一元），且這種未知數的次方是一次，這就是第一冊所學的一元一次式。而像 $2x+3y+5$ 含有兩種未知數（二元），且這兩種未知數的次方都是一次，這樣的式子稱為**二元一次式**。



隨堂練習

自評 P18 第 1 題

1. 亮瑜買每張 4 元的西卡紙 x 張及每張 15 元的粉彩紙 y 張。回答下列問題：

(1) 每張 4 元的西卡紙 x 張需_____元，每張 15 元的粉彩紙 y 張需_____元。

(2) 亮瑜共需付_____元。

2. 可晴買每個 25 元的麵包 x 個和每瓶 20 元的果汁 y 瓶，並加購 1 個 1 元的提袋，共需付_____元。



例 1 列二元一次式

自評 P18 第 2 題

一瓶 2000 毫升的汽水，倒滿每杯容量 x 毫升的杯子 3 杯，及每杯容量 y 毫升的杯子 5 杯後，瓶內剩下多少毫升的汽水？



解一 逐一減去先後倒出的量

倒滿每杯容量 x 毫升的杯子 3 杯，就是倒出了 $3x$ 毫升的汽水；
倒滿每杯容量 y 毫升的杯子 5 杯，就是倒出了 $5y$ 毫升的汽水；
所以瓶內剩下 $(2000 - 3x - 5y)$ 毫升的汽水。

解二 一次減去全部倒出的量

因為分別倒出了 $3x$ 毫升及 $5y$ 毫升的汽水，
也就是共倒出 $(3x + 5y)$ 毫升的汽水，
所以瓶內剩下 $2000 - (3x + 5y)$ 毫升的汽水。

$2000 - 3x - 5y$ 與 $2000 - (3x + 5y)$ 兩個式子代表的容量相等。

隨堂練習

校慶園遊會當天志忠原有 250 元的園遊券，買烤香腸花掉了 x 張 5 元的園遊券與 y 張 10 元的園遊券，則志忠剩下 _____ 元的園遊券。

在前頁中， 投進
 x 顆 2 分球，
 y 顆 3 分球，
罰球得 5 分，
所以他總共得到 $(2x + 3y + 5)$ 分。

如果  投進的球數中，
有 9 顆 2 分球、
2 顆 3 分球，
即表示 $x=9$ 、 $y=2$ ，代入後得到
 $2x + 3y + 5 = 2 \times 9 + 3 \times 2 + 5$
 $= 18 + 6 + 5$
 $= 29$ (分)

由上面的說明，發現二元一次式的值可由 x 與 y 分別所代表的數為多少來決定。

例2 代入求值

自評 P18 第 3 題

依據下列各小題的 x 、 y 值，分別求出二元一次式 $3x-4y+1$ 的值。

- (1) $x=5$ 、 $y=2$
- (2) $x=-2$ 、 $y=3$
- (3) $x=-\frac{2}{3}$ 、 $y=-\frac{5}{2}$

解 (1) 當 $x=5$ 、 $y=2$ 時，

$$\begin{aligned} 3x-4y+1 &= 3 \times 5 - 4 \times 2 + 1 \\ &= 15 - 8 + 1 \\ &= 8 \end{aligned}$$

(2) 當 $x=-2$ 、 $y=3$ 時，

$$\begin{aligned} 3x-4y+1 &= 3 \times (-2) - 4 \times 3 + 1 \\ &= (-6) - 12 + 1 \\ &= -17 \end{aligned}$$

(3) 當 $x=-\frac{2}{3}$ 、 $y=-\frac{5}{2}$ 時，

$$\begin{aligned} 3x-4y+1 &= 3 \times \left(-\frac{2}{3}\right) - 4 \times \left(-\frac{5}{2}\right) + 1 \\ &= (-2) + 10 + 1 \\ &= 9 \end{aligned}$$

在 例2 中，給定 x 、 y 值時，二元一次式 $3x-4y+1$ 的結果也可以用下列表格的方式來呈現：

二元一次式	x	5	-2	$-\frac{2}{3}$
	y	2	3	$-\frac{5}{2}$
$3x-4y+1$		8	-17	9

隨堂練習

在下表空格中，填入各二元一次式的值。

二元一次式	x	1	2	0	$-\frac{1}{2}$
	y	3	-1	-2.5	$-\frac{5}{2}$
$2x+4y$					
$2x-6y+3$					



② 二元一次式的化簡

二元一次式 $2x + 3y + 5$ 有 $2x$ 、 $3y$ 、 5 三項。

其中 $2x$ 稱為這個二元一次式的 x 項；

$3y$ 稱為這個二元一次式的 y 項；

5 不含文字符號，稱為這個二元一次式的常數項。

文字符號及次數均相同的項稱為同類項，在化簡二元一次式的過程中，就像化簡一元一次式那樣，需將同類項合併，不是同類項不能合併。

例如：(1) $2x + 3x$ 中， $2x$ 與 $3x$ 是同類項，可以合併為 $5x$ 。

(2) $25x + 18y$ 中， $25x$ 與 $18y$ 不是同類項，所以不能合併。

例3 合併同類項

自評 P18 第 4 題(1)

化簡下列各式：

(1) $2x + 2y + 4x + y$

(2) $3x - 4y + 9 + 5x + y - 7$

解

(1) $2x + 2y + 4x + y$

$= 2x + 4x + 2y + y$ ← $2x$ 與 $4x$ 為同類項，
 $2y$ 與 y 為同類項。

$= 6x + 3y$ ← $6x$ 與 $3y$ 不是同類項，
不能再合併。

(2) $3x - 4y + 9 + 5x + y - 7$

$= 3x + 5x - 4y + y + 9 - 7$ ← 9 與 -7
也為同類項。

$= 8x - 3y + 2$ ← $8x$ 、 $-3y$ 與 2 不是同類項，
不能再合併。



隨堂練習

化簡下列各式：

(1) $x + 4y - 3x + 2$

(2) $5x - 6y - 4 - 6x - 2y + 4$

例4 去括號再合併

自評 P18 第 4 題(2)~(4)

化簡下列各式：

(1) $(2x+4y-5) + (4x-5y+6)$

(2) $(3x-2y-1) - (2x+y-3)$

解一 用橫式運算

(1) $(2x+4y-5) + (4x-5y+6)$

$= 2x+4y-5+4x-5y+6$

$= 6x-y+1$

(2) $(3x-2y-1) - (2x+y-3)$

$= 3x-2y-1-2x-y+3$

$= x-3y+2$

括號前面有「-」號，則去括號時，
要將括號內的每一項都變號。



解二 將同類項上下對齊，用直式運算

$$\begin{array}{r}
 (1) \quad \begin{array}{r} 2x \\ + \end{array} \begin{array}{r} 4x \\ -5 \\ +6 \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{r} 6x \\ -y \\ +1 \end{array} \\
 \begin{array}{c} \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\ (2x+4x) \quad [4y+(-5y)] \quad [(-5)+6] \end{array}
 \end{array}$$

運算結果為 $6x-y+1$ 。

$$\begin{array}{r}
 (2) \quad \begin{array}{r} 3x \\ - \end{array} \begin{array}{r} 2x \\ -2y \\ -1 \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{r} x \\ -3y \\ +2 \end{array} \\
 \begin{array}{c} \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\ (3x-2x) \quad [(-2y)-y] \quad [(-1)-(-3)] \end{array}
 \end{array}$$

運算結果為 $x-3y+2$ 。

隨堂練習

化簡下列各式：

(1) $(4x-5y-9) + (3x+4y-8)$

(2) $(5x+2y-8) - (2x-4y+3)$

$$\begin{array}{r}
 (3) \quad \begin{array}{r} 7x - y + 5 \\ + \end{array} \begin{array}{r} 3x - 5y - 9 \end{array} \\
 \hline
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 (4) \quad \begin{array}{r} 3x - 5y - 7 \\ - \end{array} \begin{array}{r} x + 8y + 8 \end{array} \\
 \hline
 \end{array}$$

例5 去括號再合併

自評 P19 第 4 題(5)

化簡 $2(3x - y + 9) - 3(x - 2y - 5)$ 。

解
$$\begin{aligned} & 2(\overbrace{3x - y + 9}) - 3(\overbrace{x - 2y - 5}) \\ &= 6x - 2y + 18 - 3x + 6y + 15 \\ &= 3x + 4y + 33 \end{aligned}$$

有括號時，可利用分配律
去括號，再合併同類項。



隨堂練習

化簡下列各式：

(1) $\frac{1}{2}(2x - 4y + 6) + 2(3x + 5y - 1)$

(2) $4(-2x + y + 3) - 3(x + 2y - 1)$

例6 通分化簡

自評 P19 第 4 題(6)

化簡 $\frac{3x + 2y - 2}{3} - \frac{3x - y + 1}{2}$ 。

解
$$\begin{aligned} \frac{3x + 2y - 2}{3} - \frac{3x - y + 1}{2} &= \frac{2(3x + 2y - 2)}{6} - \frac{3(3x - y + 1)}{6} \\ &= \frac{2(3x + 2y - 2) - 3(3x - y + 1)}{6} \\ &= \frac{6x + 4y - 4 - 9x + 3y - 3}{6} \\ &= \frac{-3x + 7y - 7}{6} \end{aligned}$$

隨堂練習

化簡下列各式：

(1) $\frac{x - 3y + 2}{2} + \frac{2x + y - 3}{2}$

(2) $\frac{2x + y - 3}{4} - \frac{2x - 3y + 1}{6}$

③ 二元一次方程式

安琪買了每個 25 元的麵包 x 個和每瓶 20 元的果汁 y 瓶，共花了 230 元。

每個 25 元的麵包 x 個，共需 $25x$ 元；

每瓶 20 元的果汁 y 瓶，共需 $20y$ 元。

因為共花了 230 元，所以可列等式

$$25x + 20y = 230。$$



像 $25x + 20y = 230$ 這種含有兩種未知數（二元），且這兩種未知數的次方都是一次的等式，稱為**二元一次方程式**。

隨堂練習

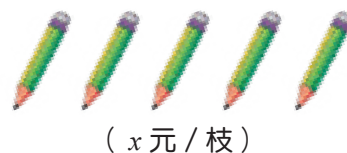
根據下列各問題，列出二元一次方程式：

- (1) 如圖，一瓶 2000 毫升的汽水，
倒滿每杯容量 x 毫升的杯子 3 杯，
及每杯容量 y 毫升的杯子 5 杯後，
瓶內還剩 250 毫升的汽水。



可列出二元一次方程式：_____。

- (2) 妙麗有 83 元，買 x 元的鉛筆 5 枝和
 y 元的橡皮擦 3 個後，還剩下 21 元。



可列出二元一次方程式：_____。



當二元一次方程式中的未知數 x 、 y 以一組特定的數代入，例如以 $x=a$ 、 $y=b$ 這組數代入，可使等號左右兩邊的值相等時，則 $x=a$ 、 $y=b$ 為此方程式的一組解。

在前頁的漫畫中，每個 25 元的麵包 x 個，每瓶 20 元的果汁 y 瓶，共花了 230 元。



可能買 6 個麵包，4 瓶果汁，
表示 $x=6$ 、 $y=4$ 。

$$25 \times 6 + 20 \times 4 = 230$$

所以 $x=6$ 、 $y=4$ 是 $25x+20y=230$ 的一組解。



也可能買 2 個麵包，9 瓶果汁，
表示 $x=2$ 、 $y=9$ 。

$$25 \times 2 + 20 \times 9 = 230$$

所以 $x=2$ 、 $y=9$ 是 $25x+20y=230$ 的另一組解。

例 7 解的判別

自評 P19 第 5 題

判別下列各組 x 、 y 所代表的數，是否為方程式 $-2x+y=3$ 的解。

(1) $x=0$ 、 $y=3$

(2) $x=-1$ 、 $y=-1$

解 (1) 以 $x=0$ 、 $y=3$ 代入時，

$$\begin{aligned} -2x+y &= -2 \times 0 + 3 \\ &= 3 \text{ (合),} \end{aligned}$$

所以 $x=0$ 、 $y=3$
是方程式 $-2x+y=3$ 的一組解。

(2) 以 $x=-1$ 、 $y=-1$ 代入時，

$$\begin{aligned} -2x+y &= -2 \times (-1) + (-1) \\ &= 1 \text{ (不合),} \end{aligned}$$

所以 $x=-1$ 、 $y=-1$
不是方程式 $-2x+y=3$ 的一組解。



隨堂練習

1. 判別下列各組 x 、 y 所代表的數，是否為方程式 $-2x-3y=8$ 的解。

(1) $x=-1$ 、 $y=-2$

(2) $x=1$ 、 $y=-4$

(3) $x=-4$ 、 $y=0$

2. 已知 $x=1$ 、 $y=a$ 是二元一次方程式 $3x+2y=5$ 的解，則 $a=?$ 自評 P19 第 6 題

例8 求二元一次方程式的解

找出二元一次方程式 $2x+3y=12$ 的任意三組解。

思路分析

將 x 用一個指定的數代入 $2x+3y=12$ ，可求得 y 的值，即可找到一組解。

解 (1) $x=0$ 代入 $2x+3y=12$

$$\text{得 } 2 \times 0 + 3y = 12$$

$$3y = 12$$

$$y = 4$$

(2) $x=1$ 代入 $2x+3y=12$

$$\text{得 } 2 \times 1 + 3y = 12$$

$$3y = 10$$

$$y = \frac{10}{3}$$

(3) $x=-3$ 代入 $2x+3y=12$

$$\text{得 } 2 \times (-3) + 3y = 12$$

$$-6 + 3y = 12$$

$$3y = 18$$

$$y = 6$$

每個人所選定的數可以不一樣。



因此(1) $x=0$ 、 $y=4$ (2) $x=1$ 、 $y=\frac{10}{3}$ (3) $x=-3$ 、 $y=6$ 為方程式 $2x+3y=12$ 的三組解。

我們也可以先指定 y 的值代入方程式中，求得 x 的值。例如：將 $y=0$ 代入 $2x+3y=12$ ，可得 $x=6$ ，因此 $x=6$ 、 $y=0$ 也是方程式 $2x+3y=12$ 的一組解。

由 **例8** 可知，將 x 以任意指定的數代入二元一次方程式時，都可以求得相對應的 y 值；將 y 以任意指定的數代入二元一次方程式時，也可以求得相對應的 x 值。一般而言，一個二元一次方程式有無限多組解。

隨堂練習

請填入適當的數，使 x 、 y 的值是二元一次方程式 $3x-y=9$ 的解。

x	-1	0	1	2			
y					0	3	

例9 整數解的應用

自評 P19 第 7 題

章老師想在社團活動時進行分組教學，並將該社團的 60 位學生分成每組 8 人或 6 人。假設 8 人一組的有 x 組，6 人一組的有 y 組，請寫出所有可能的分組方法。

解 依題意可列得方程式 $8x + 6y = 60$ 。將等號兩邊同除以 2，得 $4x + 3y = 30$ 。

因為 x 、 y 都代表組數，所以 x 與 y 必須為正整數或 0。

因此方程式中， x 以 0、1、2、3、…… 依序代入，

解得 y 後，再檢查 y 是否也符合正整數或 0 的條件，如下表。

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	……
y	10	$\frac{26}{3}$	$\frac{22}{3}$	6	$\frac{14}{3}$	$\frac{10}{3}$	2	$\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	負數
檢查	○	×	×	○	×	×	○	×	×	×

由上表可知符合條件的解為：

- (1) $x=0$ 、 $y=10$ ，每組都是 6 人，共有 10 組，
- (2) $x=3$ 、 $y=6$ ，表示 8 人的有 3 組，6 人的有 6 組，
- (3) $x=6$ 、 $y=2$ ，表示 8 人的有 6 組，6 人的有 2 組。

隨堂練習

小琳買了兩種卡片共花了 75 元，其中每張 10 元的卡片 x 張、15 元的卡片 y 張。

小琳可能買了幾張 10 元的卡片？(兩種卡片都要買)

由 例9 與 隨堂練習 可知，加上條件限制的二元一次方程式，需要判別其解的合理性。



重點回顧

1 二元一次式

含有兩種未知數(二元)，且這兩種未知數的次方都是一次，這樣的式子稱為二元一次式。

例 $-2x+y-5$ 、 $x-3y$ 皆為二元一次式。

2 項的合併

式子做加減運算時，必須是同類項才能合併。

例 x 、 $3x$ 是同類項， $2y$ 、 $3y$ 是同類項， 1 、 5 是同類項。

$$\begin{aligned}\text{因此 } & x+2y+1+3x+3y+5 \\ & =x+3x+2y+3y+1+5 \\ & =4x+5y+6\end{aligned}$$

3 二元一次方程式

含有兩種未知數(二元)，且這兩種未知數的次方都是一次的等式，稱為二元一次方程式。

例 $3x-7y=5$ 、 $8x=3y$ (可整理成 $8x-3y=0$) 皆為二元一次方程式。

4 二元一次方程式的解

(1) 二元一次方程式中的未知數 x 、 y 以一組特定的數代入，例如： $x=a$ 、 $y=b$ 可使等號左右兩邊的值相等時，則 $x=a$ 、 $y=b$ 為此方程式的一組解。

例 將 $x=0$ 、 $y=3$ 代入 $-5x+y=3$ 時，

$$-5x+y=-5\times 0+3=3(\text{合}),$$

所以 $x=0$ 、 $y=3$ 是方程式 $-5x+y=3$ 的一組解。

(2) 一個二元一次方程式有無限多組解，如果該方程式有條件限制，需要判別其解的合理性。

例 二元一次方程式 $3x+2y=18$ 有無限多組解，但是如果 x 與 y 都是正整數時，此方程式的解只有 $x=2$ 、 $y=6$ 與 $x=4$ 、 $y=3$ 兩組解。



I-I 自我評量

- ① 小莉與家人聚餐，共點了每份 100 元的一號餐 x 份和每份 150 元的二號餐 y 份，則一共花了_____元。

課 P7 隨堂

- ② 小虹帶 400 元，到夜市買了每個 x 元的髮飾 3 個與每雙 $2y$ 元的襪子 5 雙，則小虹還剩下_____元。

課 P8 例 1

- ③ 在下表的空格中，填入各二元一次式的值。

課 P9 例 2

二元一次式	x	1	3	0	-0.4
	y	-1	0	$-\frac{1}{3}$	1
$-5x+3y+8$					
$-3x+5y$					

- ④ 化簡下列各式：

課 P10~12 例 3~6

$$(1) -5x + y - 8 - 4y - 3 + 9x$$

$$(2) -(-x + 2y - 4)$$

$$\begin{array}{r} (3) \quad 3x + 5y - 12 \\ + \quad 2x - 7y - 6 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} (4) \quad 2x - 3y + 8 \\ - \quad 9x - 7y - 5 \\ \hline \end{array}$$

(5) $3(2x - y + 5) - 2(4x + y - 1)$

(6) $\frac{3x + 6y}{2} + \frac{3x + y - 5}{4}$

- 5 下列哪幾組 x 、 y 所代表的數是方程式 $3x - 4y = -2$ 的解？

課 P14 例 7

甲： $x = -2$ 、 $y = -2$

乙： $x = 2$ 、 $y = 1$

丙： $x = 0$ 、 $y = \frac{1}{2}$

丁： $x = -\frac{5}{3}$ 、 $y = -\frac{3}{4}$

- 6 已知 $x = 3$ 、 $y = 4$ 是二元一次方程式 $ax - 2y = 1$ 的解，求 a 的值。

課 P14 隨堂第 2 題

- 7 已知健太買了每枝 20 元的原子筆 x 枝和每枝 30 元的螢光筆 y 枝，兩種都有買，且一共花了 160 元。回答下列問題：

課 P16 例 9

(1) 依題意可列得二元一次方程式：_____。

(2) 健太可能買了幾枝原子筆？

(A) 5 枝

(B) 6 枝

(C) 7 枝

(D) 8 枝

1-2 解二元一次聯立方程式



① 二元一次聯立方程式及其解的意義

自評 P36 第 1 題

根據一個問題的敘述，有時可同時列出兩個二元一次方程式，例如：

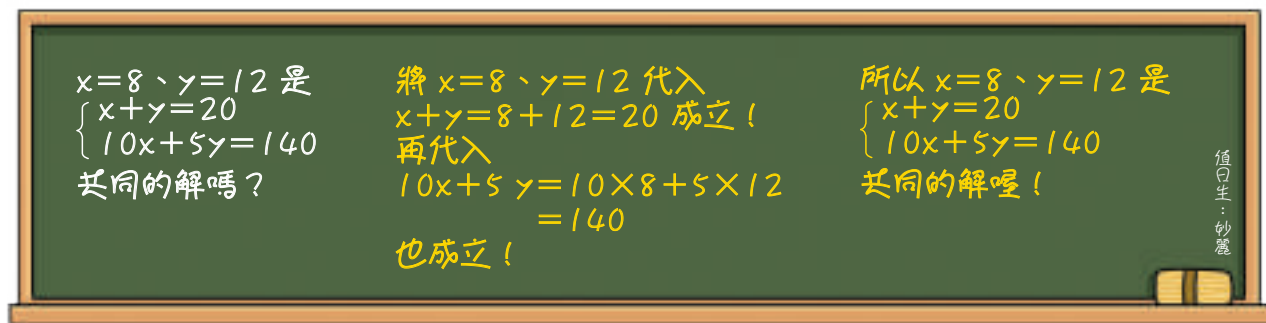
如果 10 元硬幣有 x 枚，5 元硬幣有 y 枚，兩種硬幣共 20 枚，合計是 140 元，則兩種硬幣各有多少枚？

由「兩種硬幣共 20 枚」，可列得方程式 $x+y=20$ ；

由「合計是 140 元」，可列得方程式 $10x+5y=140$ 。

這兩個二元一次方程式，同時用來表示問題中的數量關係，因此將這兩個方程式並列寫成 $\begin{cases} x+y=20 \\ 10x+5y=140 \end{cases}$ 。像這樣並列在一起的二元一次方程式，稱為二元一次

聯立方程式或二元一次方程組。



在上面的討論中， $x=8$ 、 $y=12$ 是二元一次聯立方程式 $\begin{cases} x+y=20 \\ 10x+5y=140 \end{cases}$ 的解。因此 10 元硬幣有 8 枚，5 元硬幣有 12 枚。

📌 二元一次聯立方程式的解

將 $x=a$ 、 $y=b$ 代入 x 、 y 的二元一次聯立方程式後，可使這兩個方程式的等式都成立，則稱 $x=a$ 、 $y=b$ 為此二元一次聯立方程式的解。

例1 解的檢驗

自評 P36 第2題

下列哪一組 x 、 y 是二元一次聯立方程式 $\begin{cases} x+y=7 & \cdots\cdots\cdots ① \\ 10x+5y=60 & \cdots\cdots\cdots ② \end{cases}$ 的解？

(1) $x=6$ 、 $y=0$

(2) $x=2$ 、 $y=5$

(3) $x=5$ 、 $y=2$

解 (1) 當 $x=6$ 、 $y=0$ ：代入①式得 $x+y=6+0=6$ (不合)，所以 $x=6$ 、 $y=0$ 不是此聯立方程式的解。(2) 當 $x=2$ 、 $y=5$ ：代入①式得 $x+y=2+5=7$ (合)，代入②式得 $10x+5y=10\times 2+5\times 5=20+25=45$ (不合)，所以 $x=2$ 、 $y=5$ 不是此聯立方程式的解。(3) 當 $x=5$ 、 $y=2$ ：代入①式得 $x+y=5+2=7$ (合)，代入②式得 $10x+5y=10\times 5+5\times 2=50+10=60$ (合)，所以 $x=5$ 、 $y=2$ 是此聯立方程式的解。

為了說明方便，可將聯立方程式中的式子編號。



隨堂練習

1. 下列哪一組 x 、 y 是二元一次聯立方程式 $\begin{cases} 3x+y=13 \\ x-y=3 \end{cases}$ 的解？

(1) $x=5$ 、 $y=-2$

(2) $x=-2$ 、 $y=-5$

(3) $x=4$ 、 $y=1$

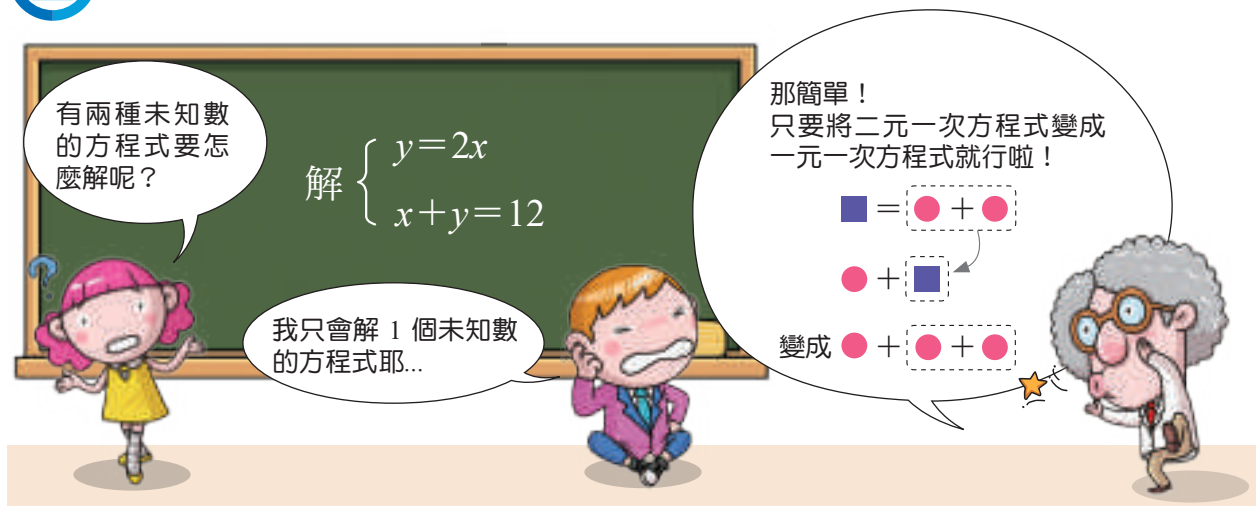
2. $x=2$ 、 $y=3$ 是下列哪一組二元一次聯立方程式的解？

(1) $\begin{cases} 2x+3y=13 \\ x+y=5 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} 3x+y=9 \\ 2x-y=8 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} -2x+5y=-19 \\ x+3y=11 \end{cases}$

② 代入消去法



如何求得二元一次聯立方程式的解呢？下面的例子將介紹一種常用的方法來求二元一次聯立方程式 $\begin{cases} y=2x & \text{①} \\ x+y=12 & \text{②} \end{cases}$ 的解。

步驟 1：由①式可知 $y=2x$ ，

將①式代入②式 $x + y = 12$

②式可被取代為 $x + 2x = 12$

$$3x = 12$$

$$x = 4$$

消去未知數 y ，使②式變為 x 的一元一次方程式，就可求得 x 的值。



步驟 2：將 $x=4$ 代入①式即可求得 y 值，所以 $y=2x=2 \times 4=8$ 。

步驟 3：驗算解是否正確：

將 $x=4$ 、 $y=8$ 代入①式得 $8=2 \times 4$ ，等號成立；

代入②式得 $4+8=12$ ，等號成立。

因此 $x=4$ 、 $y=8$ 為二元一次聯立方程式 $\begin{cases} y=2x \\ x+y=12 \end{cases}$ 的解。



Thinking

在上述的**步驟 2**中，如果將 $x=4$ 代入②式，是否也可求得 $y=8$ ？

求二元一次聯立方程式解的過程，稱為解聯立方程式。像上述這樣利用取代的方式，先消去一種未知數的解題方法，稱為**代入消去法**。

例2 直接代入消去

自評 P36 第3題(1)

利用代入消去法解二元一次聯立方程式 $\begin{cases} y=2x+1 & \text{..... ①} \\ x+2y=12 & \text{..... ②} \end{cases}$

思路分析 $\begin{cases} y=2x+1 & \text{..... ①} \\ x+2y=12 & \text{..... ②} \end{cases}$ ，②式中的 y 可用 $2x+1$ 取代。

解 將①式 $y=2x+1$ 代入②式得

$$x+2(2x+1)=12$$

$$x+4x+2=12$$

$$5x=10$$

$$x=2$$

將 $x=2$ 代入①式得

$$y=2 \times 2 + 1 = 5$$

因此，解為 $x=2$ 、 $y=5$ 。

驗算

將 $x=2$ 、 $y=5$

代入①式得 $5=2 \times 2 + 1$ ，等號成立；

代入②式得 $2+2 \times 5=12$ ，等號成立。

驗算是為了檢查答案是否正確，自行檢驗即可，不一定要將檢驗過程寫出來。

隨堂練習

利用代入消去法完成下列各二元一次聯立方程式的解：

$$(1) \begin{cases} y=-x \\ 5x+y=28 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x=-5y+1 \\ 2x-3y=-11 \end{cases}$$



在二元一次聯立方程式中，如果沒有形如 $y=ax+b$ 或 $x=cy+d$ 時，可將其中一個方程式改寫成前述形式，再代入另一個方程式。

例3 移項再代入消去

利用代入消去法解二元一次聯立方程式 $\begin{cases} x-3y=-1 & \text{①} \\ 2x+y=5 & \text{②} \end{cases}$

解一 消去 y

由①式得 $x = -1 + 3y$ ③

將③式代入②式得

$$2(-1+3y)+y=5$$

$$-2+6y+y=5$$

$$7y=7$$

$$y=1$$

將 $y=1$ 代入③式得

$$x = -1 + 3 \times 1 = 2$$

因此，解為 $x=2$ 、 $y=1$ 。

解二 消去 x

由②式得 $y = 5 - 2x$ ③

將③式代入①式得

$$x - 3(5 - 2x) = -1$$

$$x - 15 + 6x = -1$$

$$7x = 14$$

$$x = 2$$

將 $x=2$ 代入③式得

$$y = 5 - 2 \times 2 = 1$$

因此，解為 $x=2$ 、 $y=1$ 。



Thinking

在例3中，將②式整理成 $x = \frac{5-y}{2}$ ，並代入①式是否可求出方程式的解？

例4 移項再代入消去

利用代入消去法解二元一次聯立方程式 $\begin{cases} 3a+5b=22 & \cdots\cdots\cdots ① \\ 2a+b=3 & \cdots\cdots\cdots ② \end{cases}$

思路分析

觀察①、②式，發現只有②式中 b 的係數為 1，可先改寫②式再代入①式。

解 由②式得 $b=3-2a$ $\cdots\cdots\cdots ③$

將③式代入①式得 $3a+5(3-2a)=22$

$$3a+15-10a=22$$

$$-7a=7$$

$$a=-1$$

將 $a=-1$ 代入③式得 $b=3-2\times(-1)$

$$=3+2$$

$$=5$$

因此，解為 $a=-1$ 、 $b=5$ 。

隨堂練習

利用代入消去法解下列各二元一次聯立方程式：

$$(1) \begin{cases} x-2y=8 \\ 2x-3y=13 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} 2a+b=2 \\ a-4b=-2 \end{cases}$$



例5 直接代入消去的應用

自評 P36 第 3 題(2)

利用代入消去法解二元一次聯立方程式 $\begin{cases} 4x=9y & \cdots \cdots \cdots ① \\ 4x-3y=18 & \cdots \cdots \cdots ② \end{cases}$

思路分析

$\begin{cases} 4x=9y & \cdots \cdots \cdots ① \\ 4x-3y=18 & \cdots \cdots \cdots ② \end{cases}$ ，觀察到①、②兩式分別都有 $4x$ ，所以②式的 $4x$ 可直接用 $9y$ 來取代。

解 將①式 $4x=9y$ 代入②式得

$$9y-3y=18$$

$$6y=18$$

$$y=3$$

將 $y=3$ 代入①式得

$$4x=9 \times 3$$

$$4x=27$$

$$x=\frac{27}{4}$$

因此，解為 $x=\frac{27}{4}$ 、 $y=3$ 。



隨堂練習

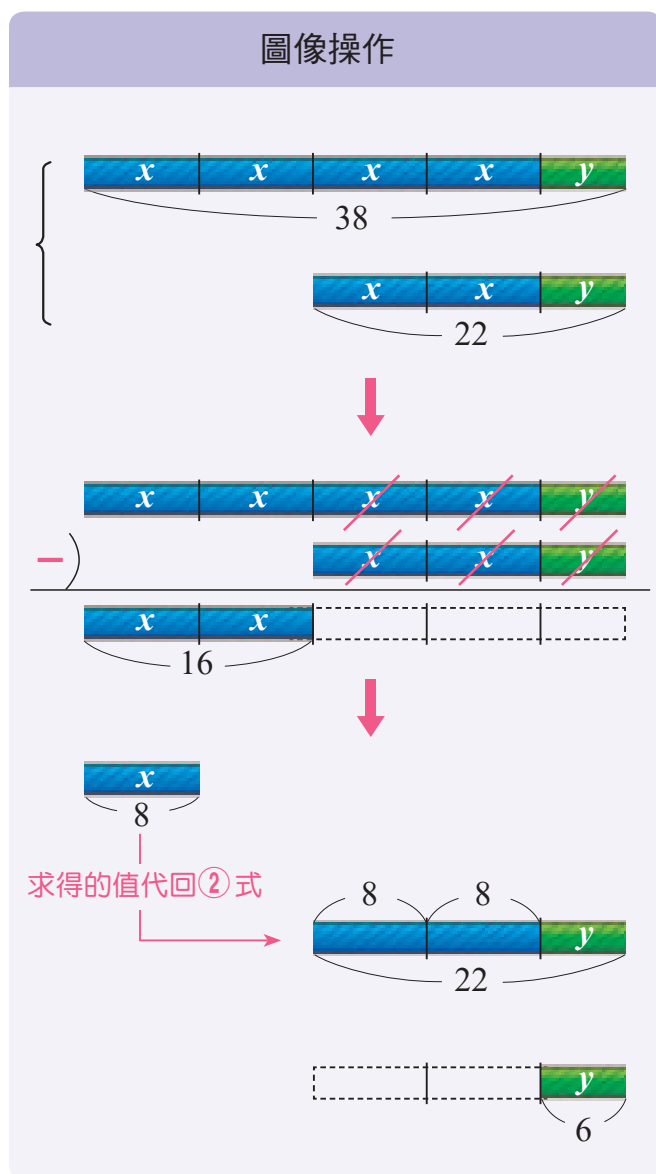
利用代入消去法解下列各二元一次聯立方程式：

$$(1) \begin{cases} 2x=3y \\ 4x-3y=2 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} 2a=3b-1 \\ 2a+b=3 \end{cases}$$

③ 加減消去法

接著學習另一種解聯立方程式的方法：
在下面的線段圖中，如何求出 x 與 y 的長度？



$$\begin{cases} 4x + y = 38 \cdots \cdots \textcircled{1} \\ 2x + y = 22 \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 4x + y = 38 \\ -) 2x + y = 22 \\ \hline 2x \quad = 16 \end{array}$$

$$x = 8$$

$$2 \times 8 + y = 22$$

$$y = 22 - 16 = 6$$

因此 $x=8$ 、 $y=6$ 為二元一次聯立方程式 $\begin{cases} 4x+y=38 \\ 2x+y=22 \end{cases}$ 的解。

除了使用圖像的方式來解題，我們也可以使用符號記錄並運用相加或相減的方法，先消去其中一種未知數，得到只含有另一種未知數的一元一次方程式，這種解題方法稱為**加減消去法**。

$$\text{解二元一次聯立方程式} \begin{cases} 2x + 3y = 33 & \cdots \cdots \cdots ① \\ 2x - 3y = -9 & \cdots \cdots \cdots ② \end{cases}$$

步驟 1：觀察①、②兩式， $+3y$ 與 $-3y$ 互為相反數，
將兩式相加，就可以消去 y 。

①式 + ②式可得

$$\begin{array}{rcl} 2x & +3y & = 33 \\ +) & 2x & -3y = -9 \\ \hline 4x & & = 24 \\ x & & = 6 \end{array}$$

兩式相加是指將兩式等號左邊的式子相加，右邊的式子也相加。



步驟 2：將 $x=6$ 代入①式得

$$2 \times 6 + 3y = 33$$

$$12 + 3y = 33$$

$$3y = 21$$

$$y = 7$$

也可以這樣做：兩式都有 $2x$ ，
將兩式相減就可以消去 x 。

$$\begin{array}{rcl} & 2x & +3y = 33 \\ -) & 2x & -3y = -9 \\ \hline & & 6y = 42 \\ & & y = 7 \end{array}$$

$y=7$ 代入 $2x+3y=33$ ，
得 $x=6$ 。

步驟 3：驗算解是否正確。

將 $x=6$ 、 $y=7$

代入①式得 $2 \times 6 + 3 \times 7 = 33$ ，等號成立；

代入②式得 $2 \times 6 - 3 \times 7 = -9$ ，等號成立。

因此，解為 $x=6$ 、 $y=7$ 。

可以不用寫出驗算的過程，
也可用計算機代入驗算。



例6 直接加減求解

自評 P37 第3題(3)、(4)

利用加減消去法解二元一次聯立方程式 $\begin{cases} 2x+5y=-9 \cdots \cdots \textcircled{1} \\ 2x+3y=-7 \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$

思路分析

觀察①、②兩式，分別都有 $2x$ ，所以將兩式相減即可消去未知數 x 。

解 由①式－②式可得

$$\begin{array}{r} 2x + 5y = -9 \\ -) \quad 2x + 3y = -7 \\ \hline 2y = -2 \\ y = -1 \end{array}$$

將 $y = -1$ 代入①式得 $2x + 5 \times (-1) = -9$

$$2x = -4$$

$$x = -2$$

因此，解為 $x = -2$ 、 $y = -1$ 。

先觀察兩式，如果有某個未知數（例如 x ），其係數的絕對值相同時，即可利用兩式相加或相減消去該未知數。



隨堂練習

利用加減消去法解下列各二元一次聯立方程式：

$$(1) \begin{cases} x+y=1 \\ 3x-y=-9 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} 3a-b=2 \\ 2a-b=0 \end{cases}$$

如何解 $\begin{cases} 5x+2y=39 \\ 2x+y=17 \end{cases}$ 呢？直接將兩個方程式相加或相減後，發現都無法消去其

中一種未知數（ x 或 y ），此時該如何利用加減消去法來解聯立方程式呢？我們先來看看下列的  **探索活動**。

探索活動 等量公理與方程式的解

利用等量公理將方程式 $2x+y=17$ 左右兩邊同乘以 2，得 $4x+2y=34$ 。

(1) 寫出二元一次方程式 $2x+y=17$ 的任意一組解 $x=$ _____、 $y=$ _____。

寫出的這組解是否也是 $4x+2y=34$ 的解？☐是 ☐否

(2) 寫出二元一次方程式 $4x+2y=34$ 的任意一組解 $x=$ _____、 $y=$ _____。

寫出的這組解是否也是 $2x+y=17$ 的解？☐是 ☐否

由  **探索活動** 可發現，二元一次方程式 $2x+y=17$ 與 $4x+2y=34$ 有相同的解，即方程式經等量公理同乘以一個不為 0 的數後仍有相同的解。

因此，解 $\begin{cases} 5x+2y=39 \cdots \cdots \textcircled{1} \\ 2x+y=17 \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$ 時，如果要用兩式相減消去未知數 y ，必須先將

②式中的 y 調整成 $2y$ ，即

$$\begin{cases} 5x+2y=39 \cdots \cdots \textcircled{1} \\ 2x+y=17 \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases} \xrightarrow{\text{將}\textcircled{2}\text{式乘以}2} \begin{cases} 5x+2y=39 \cdots \cdots \textcircled{1} \\ 4x+2y=34 \cdots \cdots \textcircled{3} \end{cases}$$

因為它們有相同的解，因此①式－③式消去未知數 y ，最後所求得的 x 、 y 值即為原聯立方程式的解。

由前面的學習可知，解聯立方程式時，若遇到兩式直接相加或相減，都無法消去其中一種未知數，我們就會利用等量公理調整方程式的係數，讓聯立方程式的其中一種未知數（例如 y ）的係數相同或互為相反數，再進行加減消去法。

例7 調整一個式子的係數再加減消去

自評 P37 第3題(5)

利用加減消去法解二元一次聯立方程式 $\begin{cases} 3x+4y=23 & \cdots \cdots \cdots \textcircled{1} \\ x-2y=11 & \cdots \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$

思路分析

(1) 消去 x

$$\begin{cases} 3x+4y=23 & \cdots \cdots \cdots \textcircled{1} \\ x-2y=11 & \cdots \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

如何讓②式 x 調整為 $3x$?(2) 消去 y

$$\begin{cases} 3x+4y=23 & \cdots \cdots \cdots \textcircled{1} \\ x-2y=11 & \cdots \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

如何讓②式 $-2y$ 調整為 $-4y$?解 消去 x

$$\textcircled{2} \text{ 式} \times 3 \text{ 得 } 3x-6y=33 \cdots \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$$\begin{array}{rcl} \textcircled{1} \text{ 式} - \textcircled{3} \text{ 式} \text{ 可得} & \begin{array}{r} 3x+4y=23 \\ -) \quad 3x-6y=33 \\ \hline 10y=-10 \\ y=-1 \end{array} & \end{array}$$

將 $y=-1$ 代入①式得

$$3x+4 \times (-1)=23, x=9$$

因此，解為 $x=9$ 、 $y=-1$ 。解 消去 y

$$\textcircled{2} \text{ 式} \times 2 \text{ 得 } 2x-4y=22 \cdots \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$$\begin{array}{rcl} \textcircled{1} \text{ 式} + \textcircled{3} \text{ 式} \text{ 可得} & \begin{array}{r} 3x+4y=23 \\ +) \quad 2x-4y=22 \\ \hline 5x=45 \\ x=9 \end{array} & \end{array}$$

將 $x=9$ 代入①式得

$$3 \times 9+4y=23, y=-1$$

因此，解為 $x=9$ 、 $y=-1$ 。

隨堂練習

利用加減消去法解下列各二元一次聯立方程式：

$$(1) \begin{cases} 4x+5y=3 \\ x-2y=4 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} 9m-3n=1 \\ 3m+6n=5 \end{cases}$$

例8 調整兩個式子的係數再加減消去

自評 P37 第3題(6)

利用加減消去法解二元一次聯立方程式 $\begin{cases} 2x+3y=7 & \cdots\cdots\cdots ① \\ 3x-5y=1 & \cdots\cdots\cdots ② \end{cases}$

思路分析 觀察①、②兩式，要消去 x ，須將兩式中 x 的係數調整成相等的數，也就是它們的公倍數。例如：2 和 3 的最小公倍數 $[2, 3] = 6$

$$\begin{cases} 2x+3y=7 & \cdots\cdots\cdots ① \\ 3x-5y=1 & \cdots\cdots\cdots ② \end{cases}$$

如何讓①式的 $2x$ 與②式的 $3x$ 均調整為 $6x$ ？

解 消去 x

$$\begin{aligned} ① \text{式} \times 3 \text{ 得 } 6x+9y=21 & \cdots\cdots\cdots ③ \\ ② \text{式} \times 2 \text{ 得 } 6x-10y=2 & \cdots\cdots\cdots ④ \end{aligned}$$

將①、②式
均調整成 $6x$ 。

$$\begin{array}{rcl} ③ \text{式} - ④ \text{式} \text{ 可得} & \begin{array}{r} 6x \\ - \end{array} \begin{array}{r} + 9y \\ - 10y \end{array} & = \begin{array}{r} 21 \\ 2 \end{array} \\ & \hline & 19y & = 19 \\ & & y & = 1 \end{array}$$

將 $y=1$ 代入①式得 $2x+3 \times 1=7$ ， $x=2$

因此，解為 $x=2$ 、 $y=1$ 。

若要消去 y ，則將兩式中 y 的係數調整成相反數喔！

$$[3, 5] = 15$$

$$\begin{cases} 2x+3y=7 & \cdots\cdots\cdots ① \\ 3x-5y=1 & \cdots\cdots\cdots ② \end{cases}$$

將①式的 $3y$ 調整為 $15y$ ，
將②式的 $-5y$ 調整為 $-15y$ 。



隨堂練習

利用加減消去法解下列各二元一次聯立方程式：

$$(1) \begin{cases} 3x-5y=-3 \\ 2x-3y=-1 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} 4x+5y=7 \\ 6x-7y=25 \end{cases}$$

解聯立方程式時，如果係數有分數或小數，可先將分數或小數調整成整數。

例9 調整係數再加減消去

自評 P37 第3題(7)

利用加減消去法解二元一次聯立方程式 $\begin{cases} \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}y = 1 & \text{①} \\ 3x - y = 16 & \text{②} \end{cases}$

解 ①式 $\times 6$ 得 $2x - 3y = 6$ ③ $\leftarrow$ 將①式的係數調整為整數。

②式 $\times 3$ 得 $9x - 3y = 48$ ④ $\leftarrow$ 將②式與③式中 y 的係數調整成相等的數。

③式 $-$ ④式可得

$$\begin{array}{r} 2x - 3y = 6 \\ -) \quad 9x - 3y = 48 \\ \hline -7x \quad \quad = -42 \\ x \quad \quad = 6 \end{array}$$

將 $x=6$ 代入②式得 $3 \times 6 - y = 16$

$$18 - y = 16$$

$$y = 2$$

因此，解為 $x=6$ 、 $y=2$ 。

也可以直接將①式的 $-\frac{1}{2}y$ 調整成 $-y$ ：

①式 $\times 2$ 得 $\frac{2}{3}x - y = 2$ ③

②式 $-$ ③式得

$$\frac{7}{3}x = 14, x = 6$$

將 $x=6$ 代入②式得 $y=2$ 。



隨堂練習

利用加減消去法解下列各二元一次聯立方程式：

(1) $\begin{cases} x + 2y = 8 \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y = 2 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} m + 0.5n = 1 \\ 4m - 3n = 9 \end{cases}$

利用加減消去法解題時，要將式子中的同類項合併。

例10 先化簡再加減消去

自評 P37 第 3 題(8)

利用加減消去法解二元一次聯立方程式 $\begin{cases} 3x+y=8 & \text{①} \\ x-5y=-14-2y & \text{②} \end{cases}$

解 由②式可得 $x-5y+2y=-14$ ，即 $x-3y=-14$ ③

$$\begin{cases} 3x+y=8 & \text{①} \leftarrow +y \text{ 調整成 } +3y。 \\ x-3y=-14 & \text{③} \leftarrow -3y \text{ 仍是 } -3y。 \end{cases}$$

①式 $\times 3$ 得 $9x+3y=24$ ④

③式+④式可得

$$\begin{array}{rcl} x & -3y & = -14 & \text{③} \\ + & 9x & +3y & = 24 & \text{④} \\ \hline 10x & & = 10 \\ x & & = 1 \end{array}$$

將 $x=1$ 代入①式得 $3 \times 1 + y = 8$ ， $y=5$

因此，解為 $x=1$ 、 $y=5$ 。

也可以使用代入消去法，
先將①式整理成
 $y=8-3x$ ，
再代入②式，求得
 $x=1$ 、 $y=5$ 。



隨堂練習

利用加減消去法解下列各二元一次聯立方程式：

(1) $\begin{cases} -3y=2x-16 \\ 3x=24-2y \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x+2y=2x \\ 6x-3y=3x-y+2 \end{cases}$



重點回顧

1 二元一次聯立方程式與解

(1) 兩個並列在一起的二元一次方程式，稱為二元一次聯立方程式或二元一次方程組。

例 $\begin{cases} 2x+3y=5 \\ 2x-y=-7 \end{cases}$ 為一組二元一次聯立方程式或二元一次方程組。

(2) 將 $x=a$ 、 $y=b$ 代入二元一次聯立方程式後，可使這兩個方程式的等式都成立，則稱 $x=a$ 、 $y=b$ 為此二元一次聯立方程式的解。

例 將 $x=-2$ 、 $y=3$ 代入 $2x+3y=5$ 及 $2x-y=-7$ ，可使這兩個方程式都成立，

所以 $x=-2$ 、 $y=3$ 是二元一次聯立方程式 $\begin{cases} 2x+3y=5 \\ 2x-y=-7 \end{cases}$ 的解。

2 方程式的化簡與編號

(1) 在解二元一次聯立方程式時，先化簡式子，以利於觀察。

(2) 為了說明方便，可將題目的式子或計算過程所新增的式子加上編號。

例 $\begin{cases} 5x-2y=4 & \text{..... ①} \\ 7x+y=2x-3y+22 & \text{..... ②} \end{cases}$ ，由②式可得 $5x+4y=22$ ③，

故可得 $\begin{cases} 5x-2y=4 & \text{..... ①} \\ 5x+4y=22 & \text{..... ③} \end{cases}$ 。

3 二元一次聯立方程式的解法

(1) 代入消去法：利用取代的方式，先消去一種未知數的解題方法，稱為代入消去法。在解二元一次聯立方程式時，可用 x 的一次式取代 y 來解題，也可用 y 的一次式取代 x 來解題。

例 $\begin{cases} y=x+2 & \text{..... ①} \\ 3x-2y=-1 & \text{..... ②} \end{cases}$ 將①式代入②式可消去 y ，得 $3x-2(x+2)=-1$ 。

(2) 加減消去法：將兩個方程式相加或相減，先消去一種未知數的解題方法，稱為加減消去法。

例 $\begin{cases} x+y=3 & \text{..... ①} \\ 2x-y=-6 & \text{..... ②} \end{cases}$ ①式+②式可消去 y ，得 $3x=-3$ 。



1-2 自我評量

- ① 聯課活動分組，已知桌球組總共有 38 人報名，其中男生人數比女生人數的 3 倍少 2 人。設男生有 x 人報名，女生有 y 人報名，則：

課 P20 課文

(1) 由總共 38 人報名，可列得二元一次方程式：_____。

(2) 由男生人數比女生人數的 3 倍少 2 人，可列得二元一次方程式：

_____。

(3) 因此可列得二元一次聯立方程式：_____。

- ② 判別 $x=2$ 、 $y=-3$ 是否為下列二元一次聯立方程式的解。

課 P21 例 1

(1)
$$\begin{cases} 3x+y=9 \\ x-2y=8 \end{cases}$$

(2)
$$\begin{cases} x+y=-1 \\ x-y=5 \end{cases}$$

(3)
$$\begin{cases} 2x+y=1 \\ x-y=5 \end{cases}$$

(4)
$$\begin{cases} 4x-y=11 \\ -x+3y=7 \end{cases}$$

- ③ 解下列各二元一次聯立方程式：

(1)
$$\begin{cases} 3x-4y=5 \\ x=2y+3 \end{cases}$$

課 P23 例 2

(2)
$$\begin{cases} 2a=3b \\ 5a-3b=3 \end{cases}$$

課 P26 例 5

$$(3) \begin{cases} x+y=8 \\ x-y=2 \end{cases}$$

課 P29 例 6

$$(4) \begin{cases} 3x+2y=7 \\ 3x-4y=13 \end{cases}$$

課 P29 例 6

$$(5) \begin{cases} 3m-5n=2 \\ -m+n=-1 \end{cases}$$

課 P31 例 7

$$(6) \begin{cases} 3x-6y=2 \\ 8x+10y=1 \end{cases}$$

課 P32 例 8

$$(7) \begin{cases} 3x-2y=6 \\ \frac{1}{2}x+\frac{2}{3}y=4 \end{cases}$$

課 P33 例 9

$$(8) \begin{cases} 2y=-6-3x \\ -15=7x+5y \end{cases}$$

課 P34 例 10

1-3 應用問題



由上面漫畫可得：

條件 1



+



= 66 元

條件 2



+



= 93 元

解題步驟：

步驟 1： 假設兩個適當的未知數

→ 設昆布卷每個 x 元，玉米每個 y 元。



步驟 2： 列二元一次聯立方程式

→ 由 **條件 1** 可得 $2x + 3y = 66$

由 **條件 2** 可得 $3x + 4y = 93$

因此可列得聯立方程式

$$\begin{cases} 2x + 3y = 66 & \cdots \cdots \cdots \textcircled{1} \\ 3x + 4y = 93 & \cdots \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$



步驟 3： 解聯立方程式

→ ①式 $\times 3$ 得 $6x + 9y = 198 \cdots \cdots \cdots \textcircled{3}$

②式 $\times 2$ 得 $6x + 8y = 186 \cdots \cdots \cdots \textcircled{4}$

由③式 $-$ ④式可得 $y = 12$

將 $y = 12$ 代入①式得 $2x + 3 \times 12 = 66$

$$2x + 36 = 66$$

$$2x = 30$$

$$x = 15$$

步驟 4： 依題意寫出答案

(若不合題意，則寫無解或沒有解。)

→ 答：昆布卷 15 元，玉米 12 元。



應用問題的解題步驟

1. 假設兩個適當的未知數

2. 列二元一次聯立方程式

3. 解聯立方程式

4. 依題意寫出答案

例1 直接列式解題

自評 P46 第 1 題

廚神餐廳裡有 13 張桌子，共有 73 個座位。其中，4 人座位的方桌有 x 張，7 人座位的圓桌有 y 張，則這間餐廳的方桌和圓桌各有多少張？



解 依題意可列出聯立方程式 $\begin{cases} x+y=13 & \text{①} \\ 4x+7y=73 & \text{②} \end{cases}$ ① ← 方桌和圓桌共 13 張。
② ← 共 73 個座位。

①式 $\times 4$ 得 $4x+4y=52$ ③

由②式 $-$ ③式可得 $3y=21$ ， $y=7$

將 $y=7$ 代入①式得

$x+7=13$ ， $x=6$

所以 4 人座位的方桌有 6 張，7 人座位的圓桌有 7 張。

驗算

$6+7=13$ (張)，
 $4\times 6+7\times 7=73$ (個)，
故符合題意。

隨堂練習



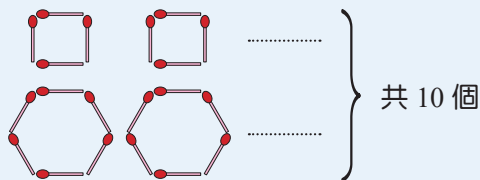
在上面的漫畫中，如果藍盤的壽司一盤 x 元，黃盤的壽司一盤 y 元，則一盤藍盤壽司與一盤黃盤壽司各是多少元？

在 **例1** 中，題目已先設定未知數，但大多數的問題並非如此，此時就必須根據題目的要求，自行選擇適當的未知量來假設未知數。

例2 總和問題

自評 P46 第 2 題

如右圖，宣文用 54 根火柴棒排了四邊形和六邊形共 10 個，則四邊形和六邊形各有多少個？



解 假設四邊形有 x 個，六邊形有 y 個。

依題意可列出聯立方程式 $\begin{cases} x+y=10 & \text{①} \\ 4x+6y=54 & \text{②} \end{cases}$ $\leftarrow$ 四邊形和六邊形共 10 個。
 $\leftarrow$ 共 54 根火柴。

①式 $\times 4$ 得 $4x+4y=40$ ③

②式 $-$ ③式可得 $2y=14$

$$y=7$$

將 $y=7$ 代入①式得 $x+7=10$

$$x=3$$

所以四邊形有 3 個，六邊形有 7 個。

可以不用寫出檢驗的過程。



隨堂練習

小智訂購某場音樂會的票券，他買了 3 張一樓的票，5 張二樓的票，一共花了 3600 元。若一樓每張票的售價比二樓貴 400 元，則一樓每張票的售價是多少元？二樓每張票的售價是多少元？



例3 倍數問題

自評 P46 第 3 題

山上的廟裡有一位老和尚與一位小和尚。以下是小女孩與老和尚的對話：



小和尚今年幾歲啦？



五年前我的年齡是小和尚的 8 倍；而距今五年後，我的年齡會是小和尚的 4 倍多 10 歲。

依據老和尚的說法，老和尚與小和尚今年幾歲呢？



思路分析

五年前老和尚年齡 = 五年前小和尚年齡的 8 倍。

五年後老和尚年齡 = 五年後小和尚年齡的 4 倍加 10 歲。

解 假設今年老和尚 x 歲，小和尚 y 歲。

依題意可列出聯立方程式

$$\begin{cases} x-5=8(y-5) \cdots \cdots \textcircled{1} \\ x+5=4(y+5)+10 \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

整理①式得 $x-8y=-35 \cdots \cdots \textcircled{3}$

整理②式得 $x-4y=25 \cdots \cdots \textcircled{4}$

③式－④式可得 $-4y=-60$ ， $y=15$

將 $y=15$ 代入④式得 $x-4 \times 15=25$ ， $x=85$

所以今年老和尚的年齡為 85 歲，小和尚的年齡為 15 歲。



	五年前	今年	五年後
老和尚	$x-5$	x	$x+5$
小和尚	$y-5$	y	$y+5$



隨堂練習

姐弟各有一些錢，若弟弟給姐姐 10 元，則姐姐的錢是弟弟的 6 倍。若姐姐給弟弟 10 元，則姐姐的錢是弟弟的 3 倍還多 10 元。試問姐弟兩人原來各有多少元？

例4 分組問題



環境

自評 P47 第 4、5 題

露營可以體驗合作的精神，亦能學習愛護大自然。為了讓草地得以修養生息，園區只提供有限的帳篷數，這樣的理念與環境保育及永續發展不謀而合。

右圖是佳禾國中童軍團野外露營活動的招募海報，招生後名額瞬間秒殺。如果假設男生有 x 人，女生有 y 人，依題意及海報內容列出聯立方程式，並求此次露營男、女生各有多少人報名？



解 男生每 3 人一頂帳篷， x 人需 $\frac{x}{3}$ 頂帳篷；女生每 4 人一頂帳篷， y 人需 $\frac{y}{4}$ 頂帳篷。

依題意可列出聯立方程式 $\begin{cases} x+y=34 & \text{①} \\ \frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 10 & \text{②} \end{cases}$

②式 $\times 12$ 得 $4x+3y=120$ ③

①式 $\times 3$ 得 $3x+3y=102$ ④

③式 $-$ ④式可得 $x=18$ ，

將 $x=18$ 代入①式得 $18+y=34$ ， $y=16$

所以男生有 18 人，女生有 16 人報名。

上面的問題，也可以用不同的假設來解題，例如接下來的 **隨堂練習**。



隨堂練習

在 **例4** 中，若假設男生需 x 頂帳篷，女生需 y 頂帳篷，回答下列問題：

(1) 依題意列出聯立方程式，並求出 x 、 y 的值。

(2) 男、女生各有多少人報名？



如果計算求解過程無誤，在求得應用問題的解後，還要注意這個解是否符合題意，或檢驗是否有不合理的情形。

例5 合理性問題

自評 P47 第 6 題

有蘋果與芭樂兩種水果，其中蘋果的顆數比芭樂的 2 倍多 4 顆，且蘋果顆數的 2 倍比芭樂多 5 顆，求蘋果與芭樂各有多少顆？

解 假設蘋果 x 顆，芭樂 y 顆。

依題意可列出聯立方程式

$$\begin{cases} x = 2y + 4 & \text{①} \quad \leftarrow \text{蘋果顆數} = \text{芭樂顆數的 2 倍加 4 顆。} \\ 2x = y + 5 & \text{②} \quad \leftarrow \text{蘋果顆數的 2 倍} = \text{芭樂顆數加 5 顆。} \end{cases}$$

將①式代入②式得 $2(2y + 4) = y + 5$

$$4y + 8 = y + 5$$

$$3y = -3$$

$$y = -1$$

因為芭樂的顆數不可能為負數，所以本題無解。

隨堂練習

已知有大、小兩個整數，大數比小數的 3 倍多 1，且大數的 3 倍比小數的 5 倍多 5。此兩個整數各是多少？



重點回顧

運用二元一次聯立方程式的應用問題

鈺凱在班際籃球比賽中，投進 2 分球與 3 分球共 16 球，總得分 38 分，則他投進 2 分球與 3 分球各多少個？

解題步驟：

步驟 1	假設未知數	
	投進 2 分球與 3 分球各多少個？	設投進了 2 分球 x 個，3 分球 y 個。
步驟 2	列聯立方程式	
	$\begin{cases} 2 \text{ 分球與 } 3 \text{ 分球共投進 } 16 \text{ 球} \\ 2 \text{ 分球的分數與 } 3 \text{ 分球的分數共 } 38 \text{ 分} \end{cases}$	$\begin{cases} x + y = 16 \\ 2x + 3y = 38 \end{cases}$
步驟 3	解聯立方程式	
 計算出 x、y 的值。		$\begin{cases} x + y = 16 & \text{①} \\ 2x + 3y = 38 & \text{②} \end{cases}$ ①式 $\times 2$ 可得 $2x + 2y = 32$ ③ ②式 $-$ ③式得 $y = 6$ 將 $y = 6$ 代入 ①式得 $x = 10$。
步驟 4	依題意寫出答案	
	若不合題意，則寫無解或沒有解。	答：鈺凱共投進 10 個 2 分球，6 個 3 分球。





I-3 自我評量

- ① 籃子裡有白色雞蛋 x 顆、褐色雞蛋 y 顆，兩種雞蛋共 16 顆，合計 126 元。已知白色雞蛋每顆 6 元，褐色雞蛋每顆 11 元，則這兩種雞蛋各有幾顆？



課 P40 例 1

- ② 第一次段考的數學考卷有選擇題、填充題和綜合題三大類，其中選擇和填充題共 22 題，綜合題有 4 題。如果選擇題每題 3 分，填充題每題 4 分，綜合題每題 6 分，總分 100 分，則選擇和填充各有多少題？

課 P41 例 2

- ③ 校外教學時，彬彬帶的零用錢比婷婷的 2 倍還多 100 元，兩人各花 100 元後，彬彬剩下的錢是婷婷剩下的 4 倍。兩人原來各帶了多少零用錢？

課 P42 例 3

- 4 籃球社共有學生 40 人，練習結束後共同分享 7 個西瓜。如果男生每 4 人分得一個，女生每 8 人分得一個，恰好分完，則籃球社中的男、女生各有多少人？

課 P43 例 4

- 5 桌球社某次活動中，如果男生每 2 人一組，女生每 4 人一組，共可分 17 組。如果男生每 4 人一組，女生每 2 人一組，共可分 16 組。該社團有男、女社員各多少人？

課 P43 例 4

- 6 七年勇班有男、女學生共 31 人，已知女生人數的 3 倍比男生多 19 人，則男、女學生各是多少人？

課 P44 例 5





自我挑戰

本單元為統整課程，由學生自行挑戰，
教師可視班級情況決定如何運用。

大大玩具店舉辦公仔互換活動，已知 1 個龍形公仔可以和 2 個虎形公仔互換。試回答下列問題：



- (1) 阿輝原有龍形公仔 64 個，虎形公仔 56 個。如果他將一部分的龍形公仔換成虎形公仔後，龍形公仔剩下 50 個，則虎形公仔會有多少個？

解

- (2) 小宇原有龍形公仔與虎形公仔共 120 個，如果他將龍形公仔全部換成虎形公仔後，虎形公仔就有 150 個，則小宇原有龍形公仔與虎形公仔各多少個？

解

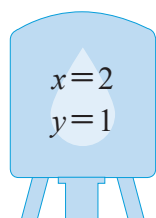


趣學數學

本單元為配合此章所設計的趣味問題，由學生自行練習，教師可視班級情況而自行決定如何運用。

1 配合 1-1

水管工人正在進行大樓水管連接工程，從水塔接通管線到水龍頭，根據下列配置管線的規則，水管的路徑應該為何呢？接接看吧！



規則：

1. 將 $x=2$ 、 $y=1$ 代入式子，算出每個式子的值。
2. 依求出的值，找到對應值的水管。
3. 畫出正確的路線即可。

$y+x-1$	$\frac{1}{2}x-5$	$3x+y$
$x+1$	$5y-2x-6$	$x+y$
$2x-3y+1$	$-6x-y+2$	$-7y+2$
$3y$	$2x-y-1$	$-x-2y$

終於接好囉！



2 配合 1-2

這裡有一張旋轉壽司店的套餐組合價目表，根據價目表上的線索，你知道 4 號餐是多少元嗎？

SUSHI 壽司套餐		MENU	
1 號餐	 +  +  + 		40元
2 號餐	 +  + 		90元
3 號餐	 +  + 		70元
4 號餐	 + 		? 元





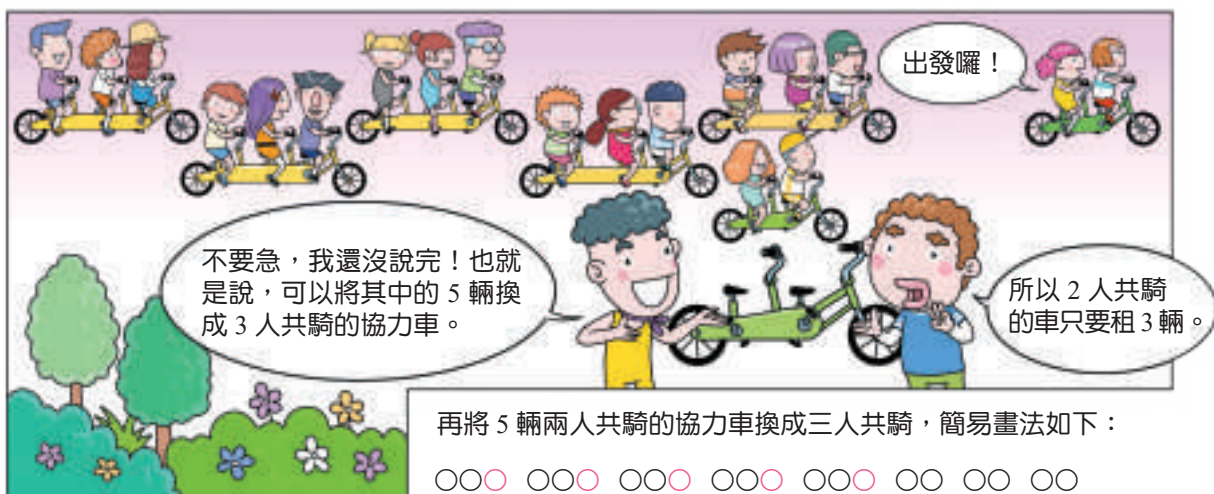
圖解應用問題

戶外

威利和班上同學共 21 人，到高雄 旗津玩。

我們去騎協力車吧！
有 2 人共騎，也有 3 人
共騎的協力車耶。

如果租 8 輛的話，2 人
共騎和 3 人共騎的協力
車要各租多少輛？



2

直角坐標與二元一次 方程式的圖形

• 7 上 1-1
數線
絕對值

2-1 直角坐標平面

- 1. 平面位置的描述
- 2. 直角坐標
- 3. 象限

• 8 上
2-3 畢氏定理
(平面上兩點間的距離)

2-2 二元一次方程式的 圖形

• 7 下 1-1
二元一次方程式

- 1. $ax + by = c$ 的解轉換成圖形
- 2. $ax + by = c$ 的圖形
- 3. $y = k$ 的圖形
- 4. $x = h$ 的圖形

• 8 下
2-2 線型函數與圖形

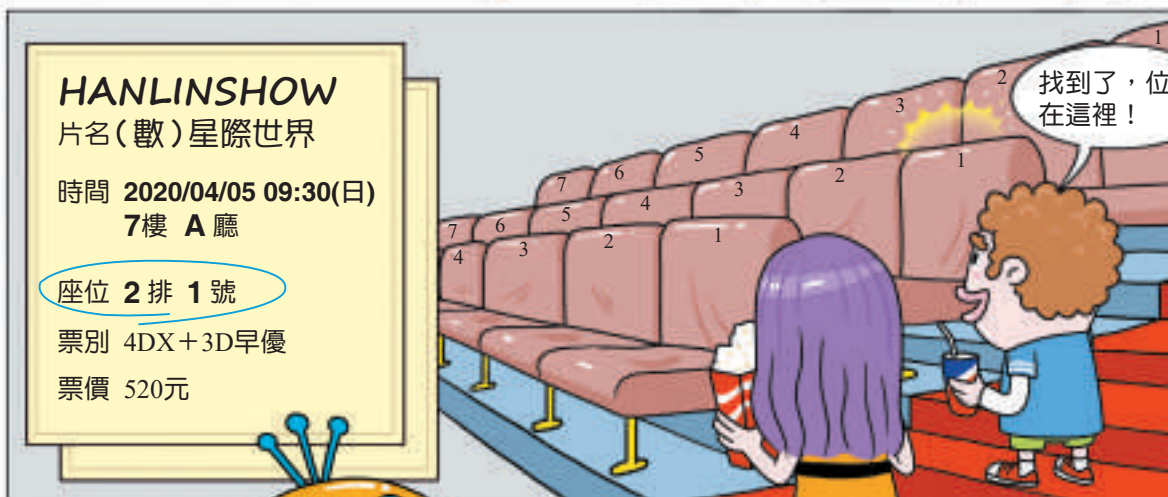
• 7 下 1-2
二元一次聯立方程式
及其解的意義

- 5. 求二元一次方程式
- 6. 二元一次聯立方程式的圖形

你是怎麼透過電影票上的座位號碼找到座位的呢？

生活中常需要確定位置，而描述位置的方法有很多種，在本章中，將先介紹如何用數對表示坐標平面上某一點的位置，並透過將二元一次方程式的解描繪在坐標平面上，進一步觀察「二元一次聯立方程式」的解與其圖形之間的關係。





描述位置的方法有很多種，電影票上的座位號碼就是其中一個。除此之外，我們也可以用數對來表示位置喔！想知道怎麼表示嗎？翻開 P55 你就知道囉！





學習前哨站

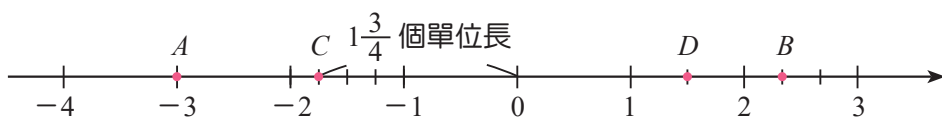
本單元為學生自我複習，
教師可視班級情況決定如何運用。



回顧 ① 數線

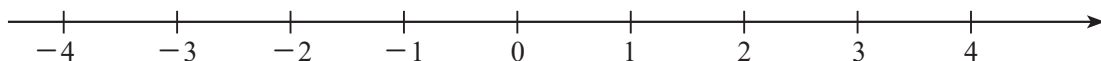
7 上第 1 章

在數線上分別標出 $A(-3)$ 、 $B(2\frac{1}{3})$ 、 $C(-1\frac{3}{4})$ 、 $D(1.5)$ 的位置。



課前練習

在數線上分別標出 $A(2)$ 、 $B(-3)$ 、 $C(-\frac{1}{3})$ 的位置。



回顧 ② 二元一次方程式

7 下第 1 章

$x=-1$ 、 $y=-3$ 與 $x=-2$ 、 $y=5$ ，哪一個是二元一次方程式 $2x-y=1$ 的解呢？

以 $x=-1$ 、 $y=-3$ 代入 $2x-y=1$ 時， $2x-y=2\times(-1)-(-3)=1$ (合)。

以 $x=-2$ 、 $y=5$ 代入 $2x-y=1$ 時， $2x-y=2\times(-2)-5=-9$ (不合)。

所以 $x=-1$ 、 $y=-3$ 是二元一次方程式 $2x-y=1$ 的解。



課前練習

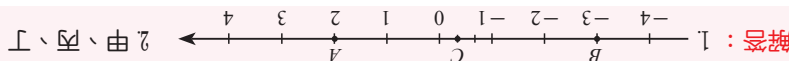
判別下列選項，哪些是二元一次方程式 $3x+y=-4$ 的解？

甲： $x=-2$ 、 $y=2$

乙： $x=-1$ 、 $y=1$

丙： $x=\frac{2}{3}$ 、 $y=-4$

丁： $x=0$ 、 $y=-4$



2-1 直角坐標平面

可搭配附件 1

① 平面位置的描述

數線上任何一點都可以用坐標來表示它的位置。例如：在原點左方 3 個單位長的 A 點，可以用 $A(-3)$ 表示。但如果要描述平面上某處的位置，就不能只用數線上的坐標來描述，而要藉助其他的方法。例如：我們可以用 $(2, 1)$ 代表電影票中的 2 排 1 號，也可利用座位表表示教室中每個學生的位置，如右圖。

曉玫坐在第 3 排第 2 個，若將曉玫的座位記成 $(3, 2)$ ，則坐在第 2 排第 3 個的昱婷，其座位可記成 $(2, 3)$ 。 $(3, 2)$ 與 $(2, 3)$ 這兩個數對，分別表示不同的位置。

第 5 個		思豪		可杰		
第 4 個				宗翰	嘉呈	
第 3 個		昱婷			書華	
第 2 個			曉玫			
第 1 個						家晉
	第 1 排	第 2 排	第 3 排	第 4 排	第 5 排	第 6 排
	講台					

隨堂練習

中華隊在奧運開幕進場時，選手隊伍如下圖。如果天成的位置在第 4 排第 2 列，以數對 $(4, 2)$ 表示，彥勳的位置可以用數對表示為_____。

第 4 列	淑淨		雅婷		建廷	
第 3 列	詠然		資穎			彥勳
第 2 列		建安	怡萍	天成		詩嘉
第 1 列				千瑩		
	第 1 排	第 2 排	第 3 排	第 4 排	第 5 排	第 6 排

② 直角坐標

為了方便描述在平面上某個點的位置，我們可以在平面上作兩條互相垂直而且有共同原點的數線，如圖一。其中，

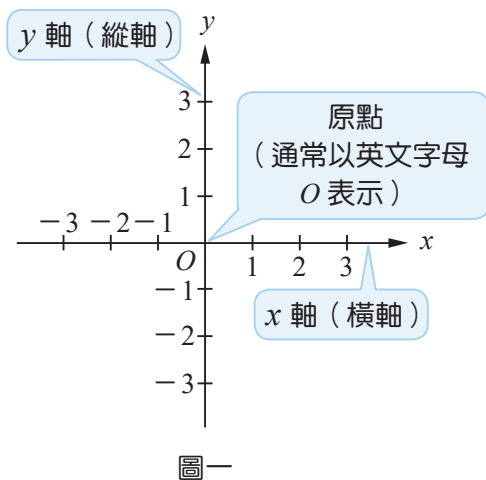
水平的數線稱為 **x 軸（橫軸）**，

一般以向右的箭頭表示正向；

鉛垂的數線稱為 **y 軸（縱軸）**，

一般以向上的箭頭表示正向。

這兩條數線所在的平面稱為**直角坐標平面**，簡稱**坐標平面**。

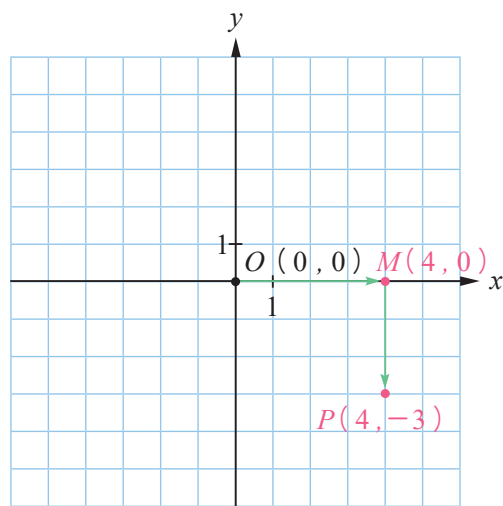


圖一

坐標平面上點的位置，可以用數對 (x, y) 的方式表示，如圖二。

以數對 $(0, 0)$ 表示**原點 O** 的位置（兩軸的交點），若要找出數對 $(4, -3)$ 所表示的位置，方法如下：

從原點 O 出發，先沿著 x 軸的正向（向右）移動 4 個單位到達 M 點，其**坐標**為 $(4, 0)$ ，記作 $M(4, 0)$ ；再朝著 y 軸的負向（向下）移動 3 個單位到達 P 點， P 點的坐標為 $(4, -3)$ ，記作 $P(4, -3)$ 。



圖二

📌 平面上點的坐標

坐標平面上任一點 P 的位置以數對 (a, b) 表示，即稱 P 點坐標為 (a, b) ，記作 $P(a, b)$ ，其中 a 稱為 P 點的 x 坐標或橫坐標，

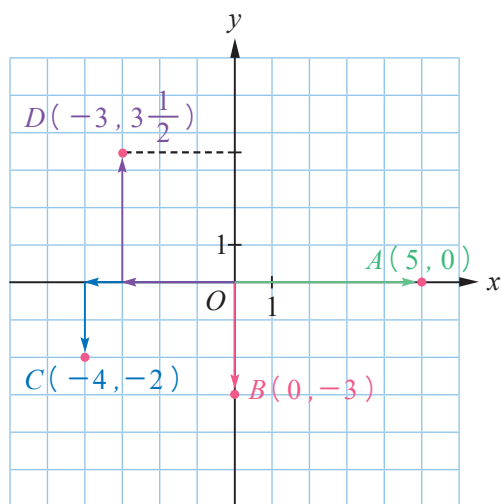
b 稱為 P 點的 y 坐標或縱坐標。

例1 在坐標平面上描點

自評 P67、68 第 1、3(1)題

在坐標平面上分別標出 $A(5, 0)$ 、 $B(0, -3)$ 、 $C(-4, -2)$ 、 $D(-3, 3\frac{1}{2})$ 四點的位置。

- 解** $A(5, 0)$: 從原點 $(0, 0)$ 出發，沿著 x 軸的正向(向右)移動 5 個單位，到達 $A(5, 0)$ 。
- $B(0, -3)$: 從原點 $(0, 0)$ 出發，沿著 y 軸的負向(向下)移動 3 個單位，到達 $B(0, -3)$ 。
- $C(-4, -2)$: 從原點出發，先沿著 x 軸的負向(向左)移動 4 個單位，再朝著 y 軸的負向(向下)移動 2 個單位，到達 $C(-4, -2)$ 。
- $D(-3, 3\frac{1}{2})$: 從原點出發，先沿著 x 軸的負向(向左)移動 3 個單位，再朝著 y 軸的正向(向上)移動 $3\frac{1}{2}$ 個單位，到達 $D(-3, 3\frac{1}{2})$ 。



坐標平面上著色的箭頭是為了方便找到坐標平面上的點，繪製坐標平面圖形時，無須畫出這些箭頭。

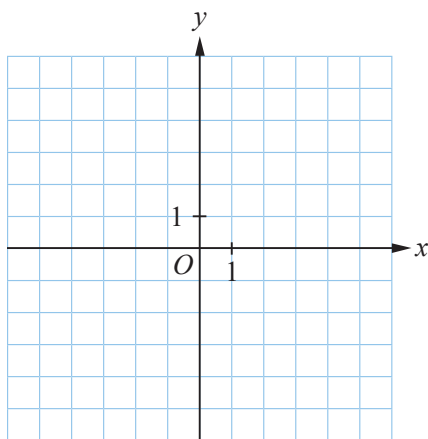
Thinking

在 **例1** 中，從原點出發，如果先沿著 y 軸的負向(向下)移動 2 個單位，再朝著 x 軸的負向(向左)移動 4 個單位，是否也可以到達 $C(-4, -2)$ ？



隨堂練習

1. 從原點出發，沿著 x 軸的負向移動 3 個單位到達 E 點，則 E 點坐標為 (____, ____); 再從 E 點開始朝著 y 軸的正向移動 6 個單位到達 F 點，則 F 點坐標為 (____, ____).
2. 在坐標平面上分別標出 $P(0, 2)$ 、 $Q(-5, 0)$ 、 $R(4, 2)$ 、 $S(2, -3\frac{1}{2})$ 四點的位置。



由 **例1** 與 **隨堂練習** 可以發現：

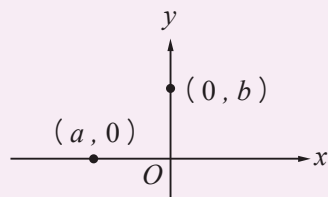
坐標 $(a, 0)$ 表示在 x 軸上坐標為 a 的位置；
坐標 $(0, b)$ 表示在 y 軸上坐標為 b 的位置。

x 軸上的點，其 y 坐標必為 0；
 y 軸上的點，其 x 坐標必為 0。



兩軸上點的坐標

1. x 軸上的任意一點，其坐標為 $(a, 0)$ 的形式。
2. y 軸上的任意一點，其坐標為 $(0, b)$ 的形式。



從原點出發，沿著 x 軸正向移動 a 個單位 ($a > 0$) 到達 A 點，再從 A 點朝著與 y 軸平行的方向向上移動 b 個單位 ($b > 0$) 到達 P 點，則 P 點的坐標是 (a, b) 。但如果不是從原點出發，最後的坐標又是如何呢？

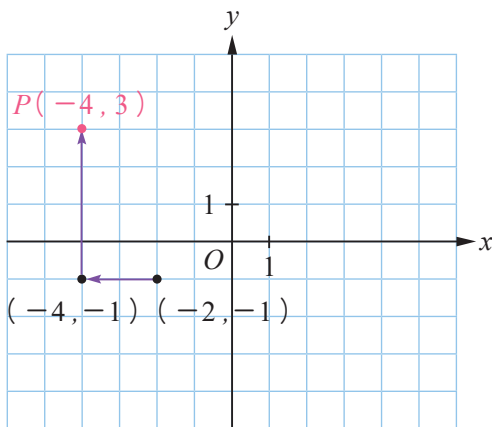
例2 求移動後的坐標

自評 P68 第 2 題

在坐標平面上，由 $(-2, -1)$ 沿著與 x 軸平行的方向向左移動 2 個單位，再沿著與 y 軸平行的方向向上移動 4 個單位，可到達 P 點，求 P 點的坐標。

解 如下圖所示，從 $(-2, -1)$ 出發，

先沿著與 x 軸平行的方向向左移動 2 個單位，到達 $(-4, -1)$ ，
再朝著與 y 軸平行的方向向上移動 4 個單位，到達 $(-4, 3)$ ，
則 P 點坐標為 $(-4, 3)$ 。



Thinking

自評 P68 第 3 題(2)

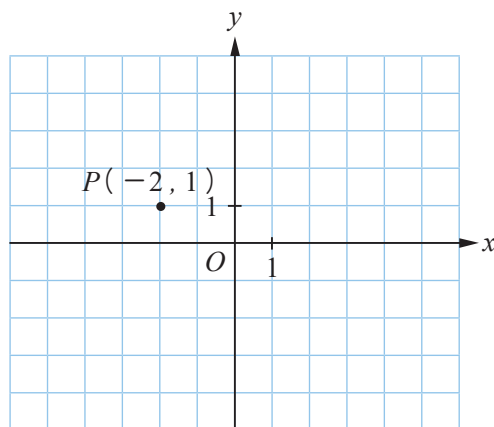
已知 P 點的坐標為 $(1, 2)$ ：

- (1) 如果 P 點沿著與 x 軸平行的方向，向左或向右移動若干個單位後，可到達 M 點，則 M 點的 y 坐標是多少？ M 點與 P 點的 y 坐標相同嗎？
- (2) 如果 P 點沿著與 y 軸平行的方向，向上或向下移動若干個單位後，可到達 N 點，則 N 點的 x 坐標是多少？ N 點與 P 點的 x 坐標相同嗎？



隨堂練習

1. 如右圖，在坐標平面上， P 點的坐標為 $(-2, 1)$ ，由 P 點沿著與 x 軸平行的方向向右移動 5 個單位，可到達 D 點，再由 D 點沿著與 y 軸平行的方向向下移動 3 個單位，可到達 E 點。在右圖中標出 D 、 E 兩點，並寫出 D 、 E 兩點的坐標。



2. 回答下列問題：

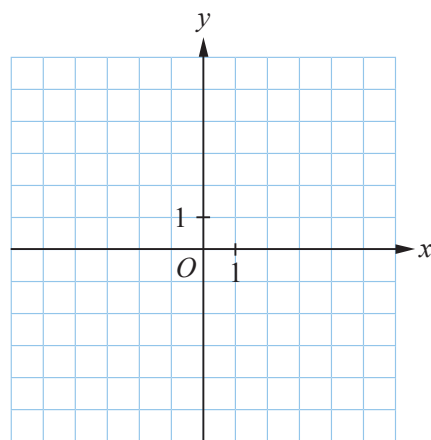
- (1) 在坐標平面上， P 點的坐標為 $(-1, -4)$ ，由 P 點沿著與 y 軸平行的方向向上移動 6 個單位，可到達 D 點，則 D 點的坐標為_____。
- (2) 承(1)，另一點 Q 點沿著與 y 軸平行的方向向下移動 3 個單位，再沿著與 x 軸平行的方向向右移動 3 個單位，可到達 P 點，則 Q 點的坐標為_____。



探索活動 由鉛垂線與水平線得到交點坐標

回答下列問題：

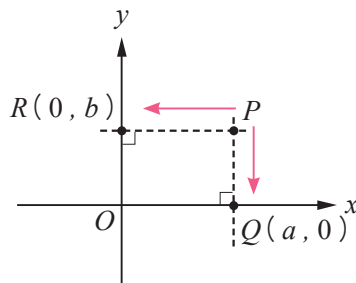
- (1) 在坐標平面上標出 $A(3, 2)$ 的位置。
- (2) 從 $A(3, 2)$ 畫一條垂直 x 軸的直線，交 x 軸於 B 點，求 B 點坐標與 $\overline{AB}$ 長度。
- (3) 從 $A(3, 2)$ 畫一條垂直 y 軸的直線，交 y 軸於 C 點，求 C 點坐標與 $\overline{AC}$ 長度。
- (4) 在坐標平面上，從 $(5, 0)$ 畫一條垂直 x 軸的直線；從 $(0, -3)$ 畫一條垂直 y 軸的直線，則這兩條直線的交點坐標為何？



在坐標平面上的任意一點 P ，透過前頁  探索活動 中的方式，可求出 P 點坐標，方法如下：

由圖可知，

- ① 從 P 畫一條垂直 x 軸的直線，與 x 軸交於 Q 點， Q 點坐標為 $(a, 0)$ ， $\overrightarrow{PQ}$ 上任意點的 x 坐標為 a 。
- ② 從 P 畫一條垂直 y 軸的直線，與 y 軸交於 R 點， R 點坐標為 $(0, b)$ ， $\overrightarrow{PR}$ 上任意點的 y 坐標為 b 。



由①、②可得 P 點的坐標為 (a, b) 。

可以使用直尺來畫垂直線喔！



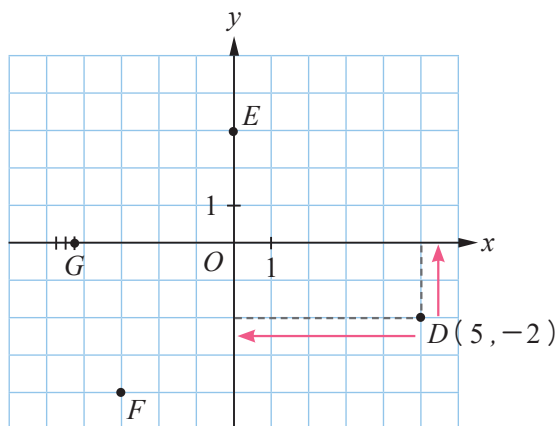
坐標平面上某一點的坐標

對於坐標平面上一點 P ，先由 P 點向 x 軸、 y 軸畫垂直線，分別交 x 軸、 y 軸於 Q 、 R 兩點。如果 Q 、 R 兩點在 x 軸與 y 軸上的坐標分別用 $(a, 0)$ 、 $(0, b)$ 表示，則 P 點的坐標為 (a, b) 。

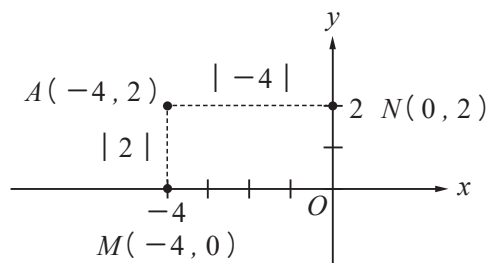
隨堂練習

自評 P69 第 4、5 題

坐標平面上 D 點的坐標為 $(5, -2)$ ，試寫出 E 、 F 、 G 三點的坐標。



如右圖，在坐標平面上，點 $A(-4, 2)$
 與 x 軸的距離是 2 個單位長，
 此時垂足 M 的坐標為 $(-4, 0)$ ；
 與 y 軸的距離是 4 個單位長，
 此時垂足 N 的坐標為 $(0, 2)$ 。



點與兩軸的距離

如果 $P(a, b)$ 為坐標平面的一點，則 P 點與 x 軸的距離為 $|b|$ 個單位長，與 y 軸的距離為 $|a|$ 個單位長。

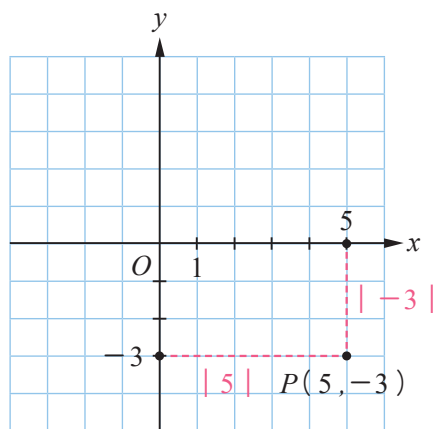
例3 點到兩軸的距離

坐標平面上有一點 $P(5, -3)$ ，回答下列問題：

- (1) P 點與 x 軸的距離是多少個單位長？
- (2) P 點與 y 軸的距離是多少個單位長？

解 如右圖所示，

- (1) 點 $P(5, -3)$ 與 x 軸的距離是
 $|-3| = 3$ 個單位長。
- (2) 點 $P(5, -3)$ 與 y 軸的距離是
 $|5| = 5$ 個單位長。

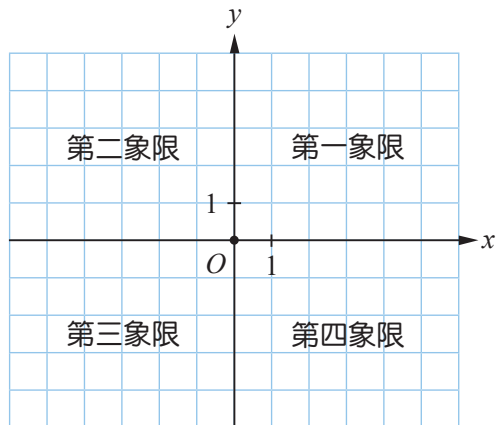


隨堂練習

坐標平面上有一點 $Q(-2, -6)$ ，則 Q 點與 x 軸的距離是_____個單位長；
 與 y 軸的距離是_____個單位長。

③ 象限

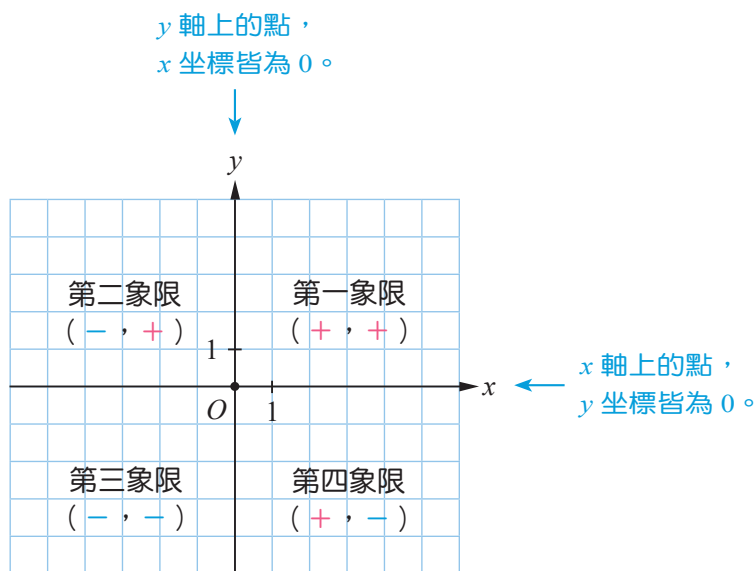
如右圖，坐標平面被 x 軸與 y 軸分割成四個區域，數學上稱這四個區域為四個**象限**。由右上方起，依逆時針方向，依序稱為**第一象限**、**第二象限**、**第三象限**、**第四象限**。這四個象限與 x 軸、 y 軸涵蓋了坐標平面上所有的點。 **x 軸與 y 軸上的點，不屬於任何一個象限。**



我們可以發現：

- (1) 在第一象限內的點，各點坐標的性質符號必為 $(+, +)$ ，例如： $(1, 2)$ 。
- (2) 在第二象限內的點，各點坐標的性質符號必為 $(-, +)$ ，例如： $(-1, 2)$ 。
- (3) 在第三象限內的點，各點坐標的性質符號必為 $(-, -)$ ，例如： $(-1, -2)$ 。
- (4) 在第四象限內的點，各點坐標的性質符號必為 $(+, -)$ ，例如： $(1, -2)$ 。

配合前面學過兩軸的坐標形式，可以整理如下：



例4 點在象限或兩軸上的判別

自評 P69 第 6 題

判別下列各點分別在哪一象限或在哪一條坐標軸上？

$$A(-4, 3)、B(6, -2)、C\left(\frac{2}{5}, 5\right)、D\left(-3, -\frac{3}{2}\right)、E(3, 0)、F(0, -5)$$

解 A 點坐標的性質符號為 $(-, +)$ ，所以 A 點在第二象限。 B 點坐標的性質符號為 $(+, -)$ ，所以 B 點在第四象限。 C 點坐標的性質符號為 $(+, +)$ ，所以 C 點在第一象限。 D 點坐標的性質符號為 $(-, -)$ ，所以 D 點在第三象限。 E 點的 y 坐標為 0，所以 E 點在 x 軸上。 F 點的 x 坐標為 0，所以 F 點在 y 軸上。**隨堂練習**

請於下表空格中，填入各點分別在哪一象限或在哪一條坐標軸上？

點	$A(-4, -3)$	$B(-2, 0)$	$C(2, 4)$
象限或坐標軸			

點	$D(3\frac{2}{3}, -7)$	$E(0, 8)$	$F(-2.7, 5\frac{3}{4})$
象限或坐標軸			

**補給站 象限命名的由來**

中國《易經》的「太極生兩儀，兩儀生四象，四象生八卦」，其中兩儀是指月、日，也就是陰、陽。若將陰、陽互相組合可以構成四象，分別是「少陽」、「老陽」、「少陰」、「老陰」，也可以用來代表春、夏、秋、冬四季。

在數學的直角坐標平面上， x 、 y 兩軸所分割而成的四個區域，就如同「四象」的對應，因此以象限來命名。

象限的英文為 quadrant，也是指「四分之一」的意思。

例5 點在象限或兩軸上的判別

自評 P69 第7題

如果 $a < 0$, $b > 0$, 則下列各點分別在哪一象限或在哪一條坐標軸上?

- (1) $A(a, b)$ (2) $B(-b, \frac{a}{b})$ (3) $C(b-a, -a^2)$ (4) $D(0, -ab)$

解 (1) 因為 $a < 0$, $b > 0$,

即 (a, b) 的性質符號是 $(-, +)$,

所以 A 點在第二象限。

(2) 因為 $b > 0$, $-b < 0$, $\frac{a}{b} < 0$ (負數除以正數),

即 $(-b, \frac{a}{b})$ 的性質符號是 $(-, -)$,

所以 B 點在第三象限。

(3) 因為 $b-a > 0$ (正數減負數), 且由 $a^2 > 0$, 可知 $-a^2 < 0$,

即 $(b-a, -a^2)$ 的性質符號是 $(+, -)$,

所以 C 點在第四象限。

(4) 因為 x 坐標為 0 , y 坐標不為 0 ,

所以 D 點在 y 軸上。

隨堂練習

如果 $a < 0$, $b > 0$, 則於下表空格中, 填入各點分別在哪一象限或在哪一條坐標軸上?

點	$A(b, a)$	$B(-a^3, a-b)$	$C(\frac{a}{b}, a^2)$	$D(ab, 0)$
象限或坐標軸				





重點回顧

1 平面上點的坐標

坐標平面上任一點 P 的位置，以數對 (a, b) 表示，則稱 P 點坐標為 (a, b) ，
記作 $P(a, b)$ ，其中 a 稱為 P 點的 x 坐標（橫坐標），
 b 稱為 P 點的 y 坐標（縱坐標）。

例 數對 $(5, 3)$ 表示在坐標平面上 x 坐標是 5， y 坐標是 3 的點。

2 兩軸上點的坐標

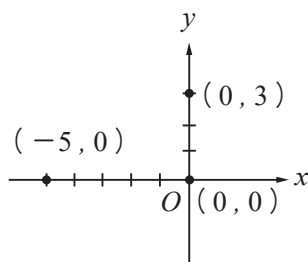
(1) x 軸上的任意一點，其 y 坐標必為 0，
可寫為 $(a, 0)$ 的形式。

例 $(-5, 0)$ 在 x 軸上。

(2) y 軸上的任意一點，其 x 坐標必為 0，
可寫為 $(0, b)$ 的形式。

例 $(0, 3)$ 在 y 軸上。

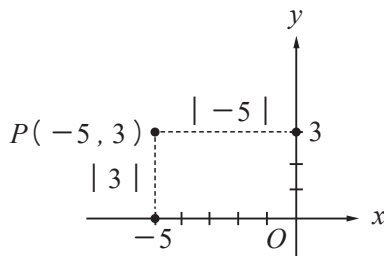
(3) 原點的坐標為 $(0, 0)$ 。



3 點與兩軸的距離

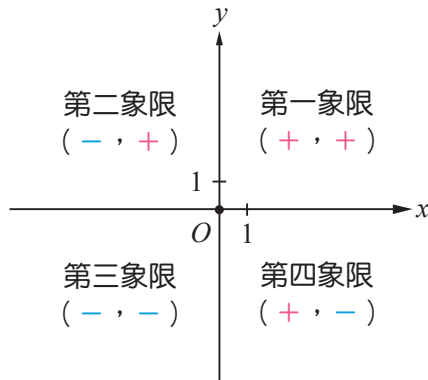
如果 $P(a, b)$ 為坐標平面上的一點，
則 P 點與 x 軸的距離為 $|b|$ 個單位長，
與 y 軸的距離為 $|a|$ 個單位長。

例 $P(-5, 3)$ 與 x 軸的距離為 $|3| = 3$ ，
與 y 軸的距離為 $|-5| = 5$ 。



4 象限

直角坐標平面被 x 軸與 y 軸分割成四個
區域，數學上稱這四個區域為四個象
限。各象限的位置與象限內點的坐標，
其數對的性質符號如右圖所示。

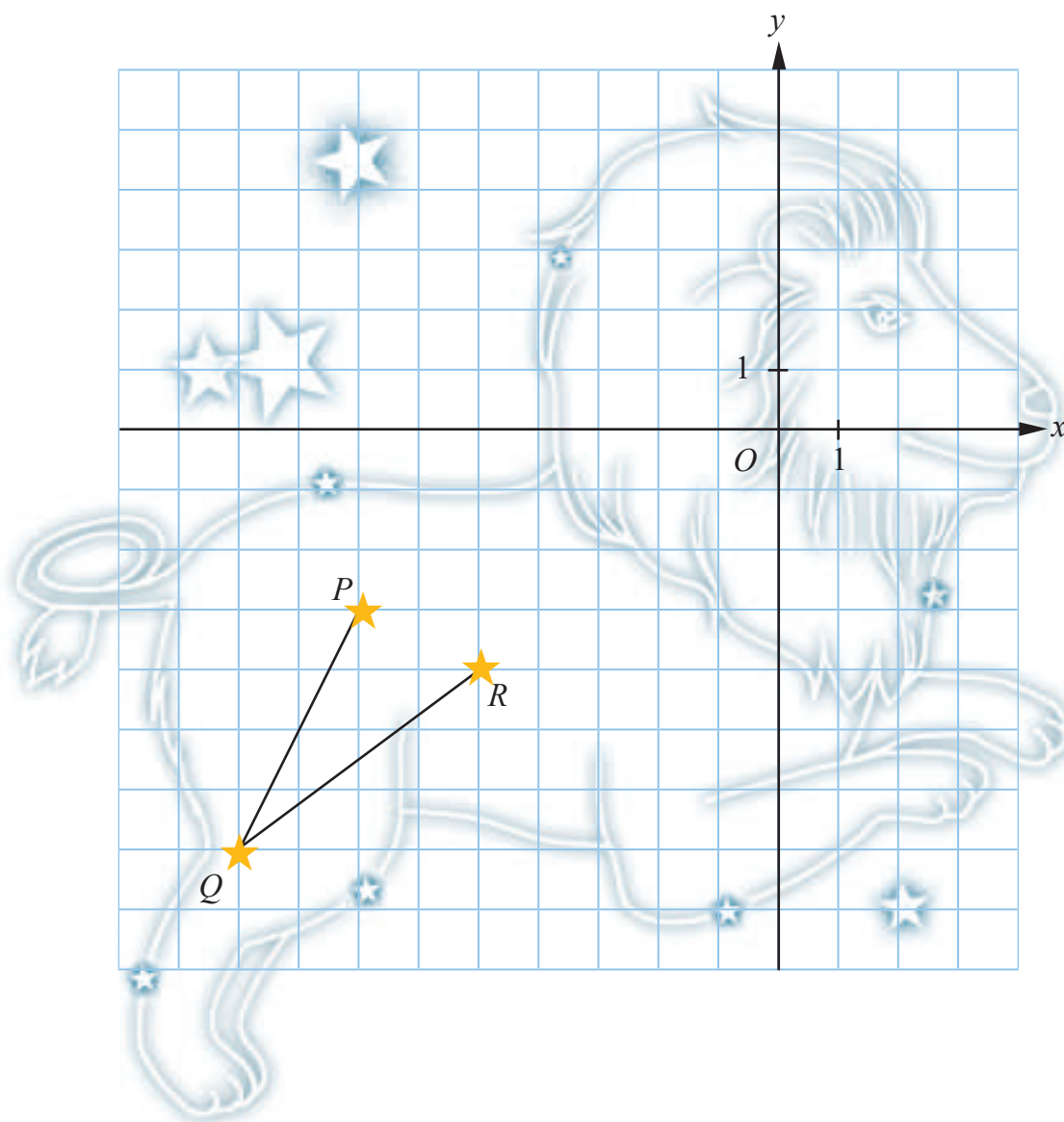




2-1 自我評量

- ① 下圖中， P 、 Q 、 R 三點是星空中獅子座的一部分，其它較亮的星星在直角坐標平面上的位置分別為 $A(1, 3)$ 、 $B(0, 4)$ 、 $C(-2, 1)$ 、 $D(-\frac{7}{4}, -1)$ 、 $E(\frac{1}{2}, -2)$ 、 $F(\frac{3}{4}, -4)$ ，它們代表了獅子的頭、頸及鬃毛，試描出這幾個點，並依照順序連接起來，最後再連接 $\overline{DP}$ 與 $\overline{FR}$ ，使之成為一個完整的獅子座圖形。

課 P57 例 1

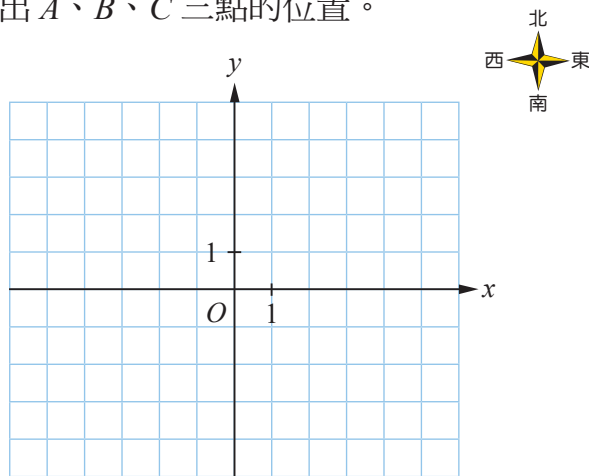


- ② P 點的坐標為 $(2, -3)$ ，由 P 點沿著與 y 軸平行的方向向上移動 2 個單位，再沿著與 x 軸平行的方向向左移動 5 個單位，可到達 Q 點，求 Q 點的坐標。 課 P59 例 2

- ③ 海巡署收到一艘漁船的求救信號後，發現該船位於點 $A(5, -4)$ 以緩慢的速率向正北漂移，同時發現在點 $B(5, 3)$ 和點 $C(-2, -4)$ 處各有一艘救難船。如果兩艘救難船的速率相同，回答下列問題：

(1) 在坐標平面上分別標出 A 、 B 、 C 三點的位置。

課 P57 例 1

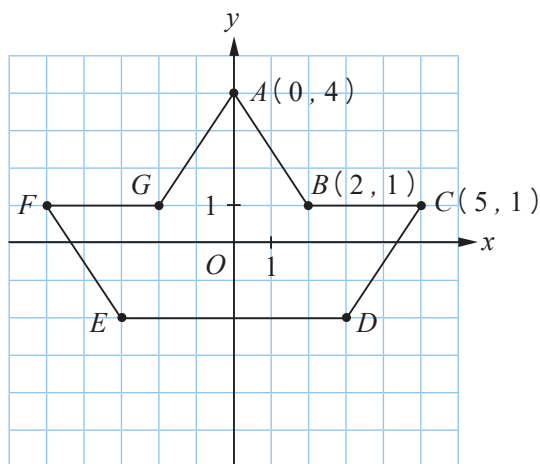


(2) 海巡署應派哪條船前去救援，才可以在最短時間內靠近漁船？

課 P59 Thinking

- 4 右圖是一個對稱於 y 軸的圖形，試求 D 、 E 、 F 、 G 各點的坐標。

課 P61 隨堂



- 5 如果行政院的坐標是 $(4, 4)$ ，則立法院的位置最可能是下列哪一個？

- (A) $(-\frac{3}{2}, 8)$ (B) $(8, -\frac{3}{2})$
(C) $(\frac{3}{2}, -8)$ (D) $(-\frac{3}{2}, -8)$

課 P61 隨堂



- 6 請於下表空格中，填入各點分別在哪一象限或在哪一條坐標軸上？

課 P64 例 4

點	$A(5, -7)$	$B(3\frac{1}{4}, 0)$	$C(-300, 108)$
象限或坐標軸			

- 7 已知 $P(a, b)$ 在第二象限，回答下列問題：

課 P65 例 5

- (1) $Q(b, a)$ 在第幾象限？
(2) $R(-a^2, b)$ 在第幾象限？



2-2 二元一次方程式的圖形



① $ax + by = c$ 的解轉換成圖形

一個二元一次方程式的任意一組解，可以記錄成數對 (x, y) 的形式。例如：
 $x=3$ 、 $y=4$ 是二元一次方程式 $x+3y=15$ 的一組解，習慣上會把 x 的值寫在前面，
 y 的值寫在後面，將這組解記成數對 $(3, 4)$ 。

$(3, 4)$ 在坐標平面上所對應的圖形就是一個點，這個點的 x 坐標是 3， y 坐標是 4。也就是說：

方程式的解	數對	坐標平面上的「點」
$x=3$ 、 $y=4$	$\rightarrow (3, 4)$	$\rightarrow$ 點坐標 $(3, 4)$

例 1 二元一次方程式的解與描點

自評 P90 第 1 題

求出二元一次方程式 $2x + y = 5$ 的任意五組解，並在坐標平面上標示出這五個點。

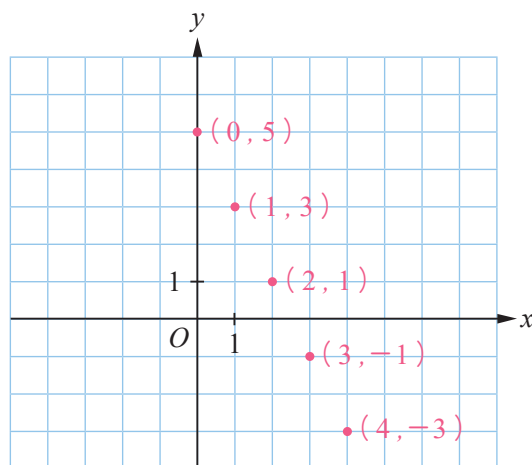
解 將 x 分別以 0、1、2、3、4 代入，求出對應的 y 值，如下表：

x	0	1	2	3	4
y	5	3	1	-1	-3

將上表的解 $(0, 5)$ 、 $(1, 3)$ 、

$(2, 1)$ 、 $(3, -1)$ 、 $(4, -3)$

在坐標平面上標出，如圖所示。

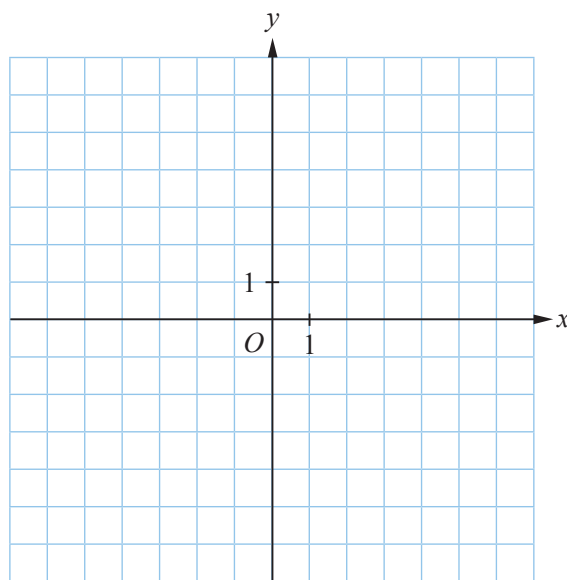




隨堂練習

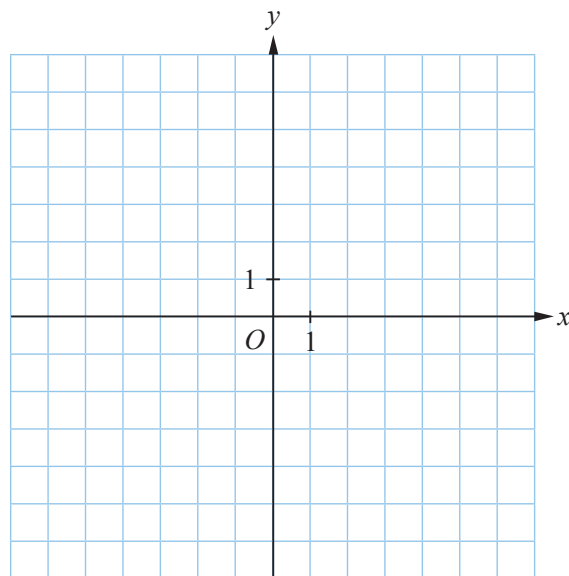
1. 下表中， x 與 y 的值都是二元一次方程式 $2x - y = 4$ 的解，完成下表，並將這些解寫成數對的型態，標示在坐標平面上。

x	0	3		
y			-2	0



2. 下列哪些數對是二元一次方程式 $3x + y = 4$ 的解？並將這些數對標示在坐標平面上。

$(0, 4)$ 、 $(2, -2)$ 、 $(-2, 2)$



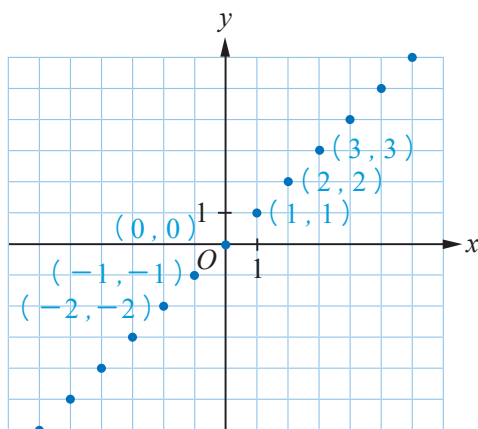
② $ax+by=c$ 的圖形

給定一個二元一次方程式，其全部的解皆可寫成數對 (x, y) 的形式，這些數對會對應到坐標平面上的點，這些點所形成的圖形，就稱為該方程式的圖形。

例如：下表中每一組 x 、 y 值都是二元一次方程式 $x-y=0$ 的解。

x		-2	-1	0	1	2	3	
y		-2	-1	0	1	2	3	

把代表這些解的點標示在坐標平面上，如圖一。

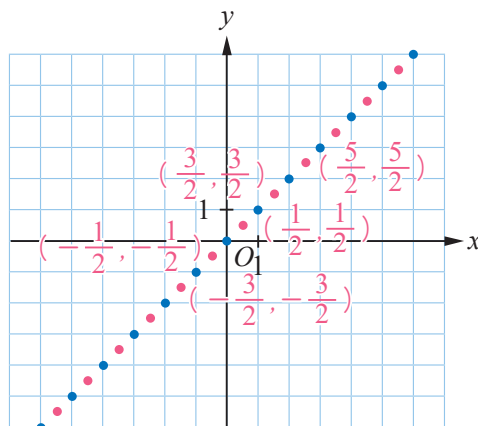


圖一

如果再找出二元一次方程式 $x-y=0$ 的其他解，如下表：

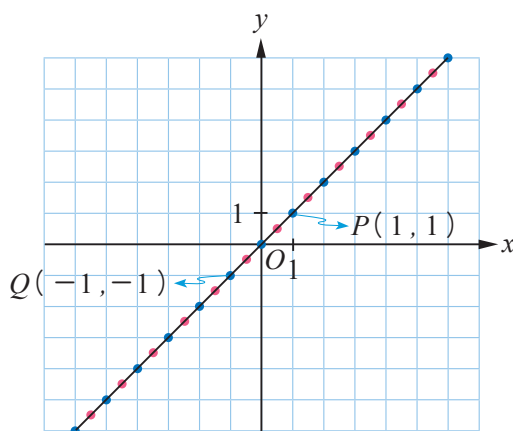
x		$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	
y		$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	

把代表這些解的點標示在坐標平面上，如圖二。



圖二

畫出通過 $P(1, 1)$ 、 $Q(-1, -1)$ 兩點的直線，如圖三，此時可以發現所標示的點都落在 $\overleftrightarrow{PQ}$ 上。



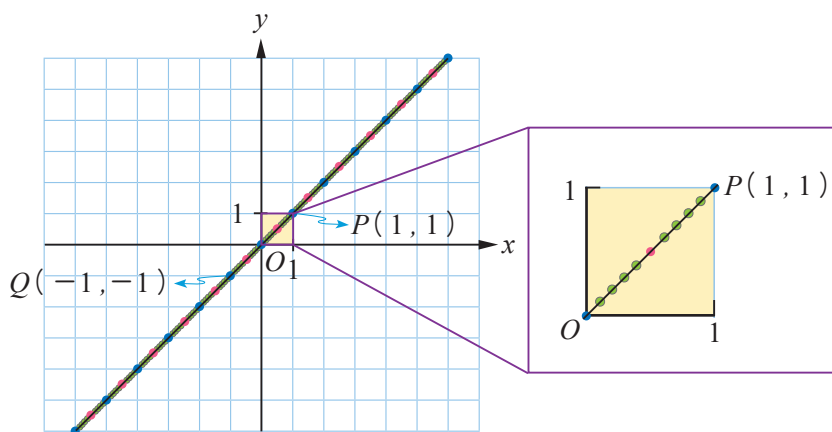
圖三

如果再找出二元一次方程式 $x-y=0$ 的其他解，如下表：

x		0.1	0.2	0.3	0.4	
y		0.1	0.2	0.3	0.4	

把代表這些解的點標示在坐標平面上，如圖四。

可觀察到這些點都位在同一條直線上。



圖四

圖四中， $\overleftrightarrow{PQ}$ 為二元一次方程式 $x-y=0$ 的所有解在坐標平面上所成的圖形，就稱 $\overleftrightarrow{PQ}$ 是二元一次方程式 $x-y=0$ 的圖形。

例2 二元一次方程式的圖形

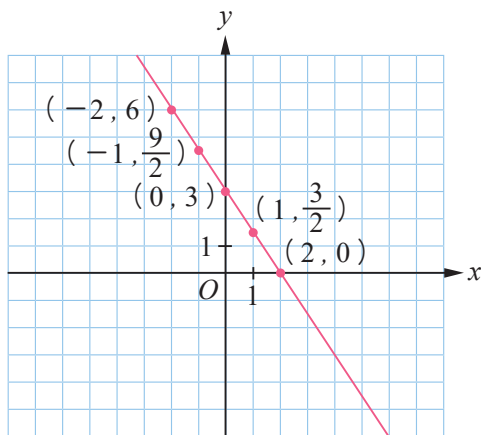
1. 找出二元一次方程式 $3x+2y=6$ 的任意五組解，並標示在坐標平面上。
2. 承 1.，通過任意兩點畫一條直線，觀察這些點是否都在這條直線上？

解 1. 將 x 分別以 -2 、 -1 、 0 、 1 、 2 代入，
 求出對應的 y 值，如下表：

x	-2	-1	0	1	2
y	6	$\frac{9}{2}$	3	$\frac{3}{2}$	0

將上述五個點標示在坐標平面上。

2. 連接 $(2, 0)$ 、 $(0, 3)$ 畫一條直線，
 可以發現這些點都位在這條直線上。



隨堂練習

有四個數 a 、 b 、 c 、 d ，且 $(2, a)$ 、 $(-3, b)$ 、 $(c, 8)$ 、 $(d, -4)$ 這四點都在二元一次方程式 $2x - y = 4$ 的圖形上，求 a 、 b 、 c 、 d 這四個數的值。

藉由坐標平面，我們將方程式轉換成了圖形，而由前面的說明可知： $x - y = 0$ 與 $3x + 2y = 6$ 的圖形都是一條直線。事實上，每個二元一次方程式 $ax + by = c$ 在坐標平面上的圖形都是一條直線，該直線上的任何一點都是原方程式的一組解。

圖形 $ax + by = c$ 的圖形

設 a 、 b 、 c 為已知數， x 、 y 的二元一次方程式 $ax + by = c$ 的所有解，在坐標平面上的圖形是一條直線，此直線就是二元一次方程式 $ax + by = c$ 的圖形。

補給站 利用 Geogebra 繪製二元一次方程式的圖形

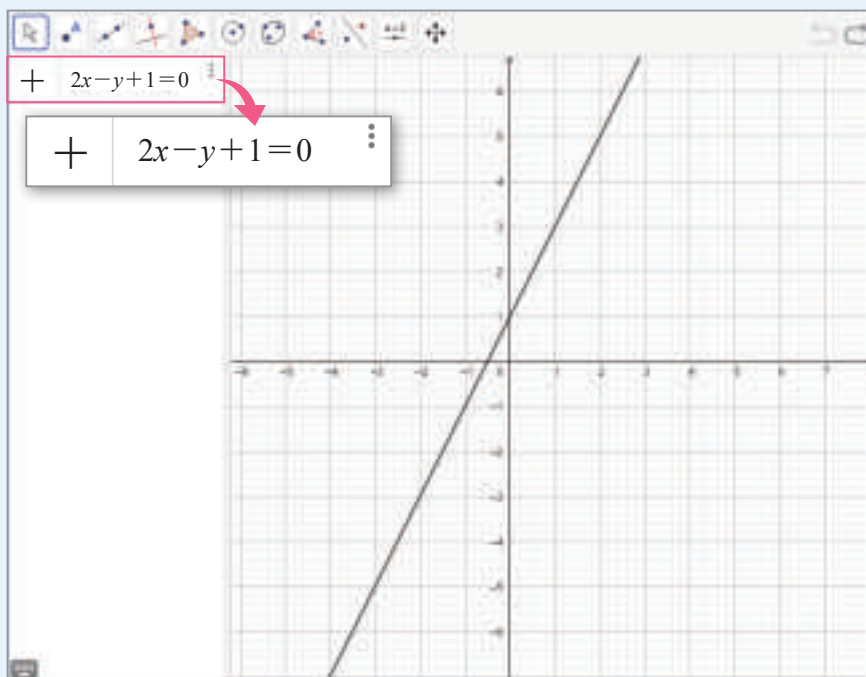
GeoGebra 是一套結合平面幾何、立體幾何、代數、表格及計算機的動態數學軟體，由 Markus Hohenwarter 及一個國際程式設計團隊所共同開發，可以免費下載，目的在教導與學習數學課程。這套軟體可以畫出點、直線、圓與多邊形等圖形，也可以直接在直角坐標中輸入點坐標以及方程式而得到圖形。

利用 Geogebra 6.0 可以繪製二元一次方程式的圖形，我們以 $2x - y + 1 = 0$ 為例，方法如下：

步驟 1：開啟電腦 Geogebra 軟體，於左方代數區 **+** 的欄位中，輸入

$$2x - y + 1 = 0 \quad (\text{或 } 2 * x - y + 1 = 0、y = 2x + 1 \text{ 皆可})。$$

步驟 2：按 **ENTER**，得到 $2x - y + 1 = 0$ 的圖形。



也可以試著輸入其他方程式，例如：

$$3x - 2y = 5、$$

$$y = 5、$$

$$x = 5 \cdots$$



藉由 Geogebra 可以發現，二元一次方程式 $ax + by = c$ 的圖形是一條直線。

因為相異兩點可以畫出唯一的一條直線，所以我們只需找出二元一次方程式的兩組解，將它們標示在坐標平面上，則通過此兩點所畫的直線即為原方程式的圖形。

例如：選出二元一次方程式 $2x - y + 1 = 0$ 的兩組解所對應的點 $(1, 3)$ 與 $(2, 5)$ ，通過這兩點畫一直線，此直線即為方程式的圖形。

例3 畫二元一次方程式的圖形（通過原點）

在坐標平面上畫出二元一次方程式 $3x+2y=0$ 的圖形。

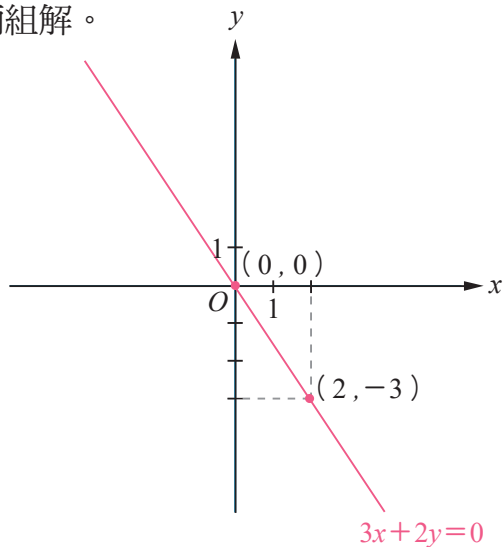
解 **步驟 1：** 先求出二元一次方程式 $3x+2y=0$ 的兩組解。

x	0	2
y	0	-3

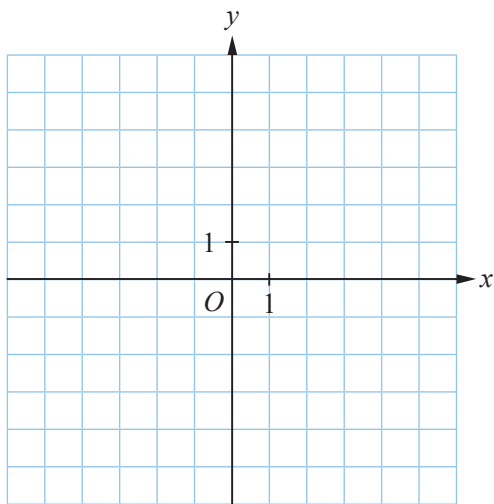
步驟 2： 將這兩組解的點 $(0, 0)$ 與 $(2, -3)$ 標示在坐標平面上。

步驟 3： 畫出通過此兩點的直線。

此直線即為二元一次方程式 $3x+2y=0$ 的圖形。

**隨堂練習**

在坐標平面上畫出二元一次方程式 $4x-y=0$ 的圖形。

**通過原點的直線**

二元一次方程式 $ax+by=c$ 中，若 $c=0$ ，則圖形為通過原點的直線。

例4 畫二元一次方程式的圖形

自評 P90 第2題(1)、(2)

在坐標平面上畫出二元一次方程式 $3x - y = 6$ 的圖形。

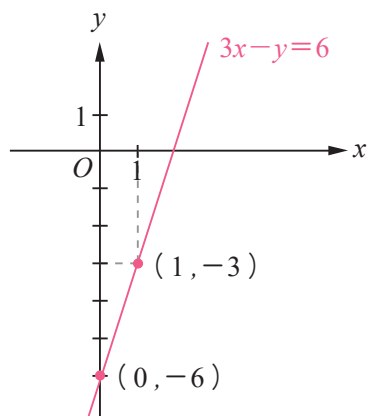
解 **步驟 1**：先求出二元一次方程式 $3x - y = 6$ 的兩組解。

x	0	1
y	-6	-3

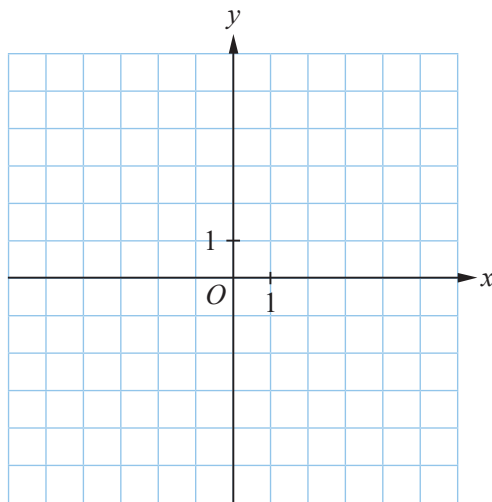
步驟 2：將這兩組解的點 $(0, -6)$ 與 $(1, -3)$ 標示在坐標平面上。

步驟 3：畫出通過此兩點的直線。

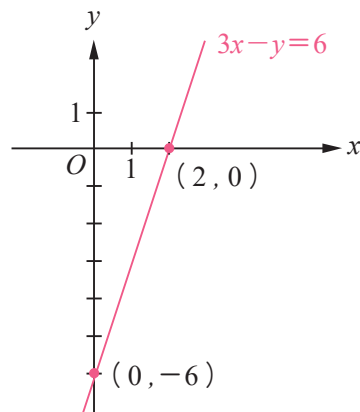
此直線即為二元一次方程式 $3x - y = 6$ 的圖形。

**隨堂練習**

在坐標平面上畫出二元一次方程式 $y = x - 3$ 的圖形。



右圖是 **例4** 中 $3x - y = 6$ 的圖形與兩軸的交點，因為 y 軸上任一點的 x 坐標為 0，將 $x = 0$ 代入 $3x - y = 6$ ，可得 $y = -6$ ，所以此直線與 y 軸的交點坐標為 $(0, -6)$ ；而 x 軸上任一點的 y 坐標為 0，將 $y = 0$ 代入 $3x - y = 6$ ，可得 $x = 2$ ，所以此直線與 x 軸的交點坐標為 $(2, 0)$ 。



由於找到任意兩組解即可畫出二元一次方程式的圖形，在畫二元一次方程式的圖形時，為了方便起見，一般都會先描出直線與兩軸的交點。

例5 圖形與兩軸的交點

自評 P91 第3題

寫出二元一次方程式 $3x-4y=12$ 與 x 軸、 y 軸的交點坐標，並在坐標平面上畫出此方程式的圖形。

解 因為 y 軸上任一點的 x 坐標為 0，將 $x=0$ 代入 $3x-4y=12$ ，可得 $y=-3$ ；

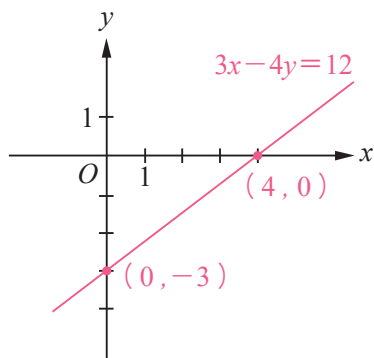
因為 x 軸上任一點的 y 坐標為 0，將 $y=0$ 代入 $3x-4y=12$ ，可得 $x=4$ 。

x	0	4
y	-3	0

所以此直線與 y 軸的交點坐標為 $(0, -3)$ ；

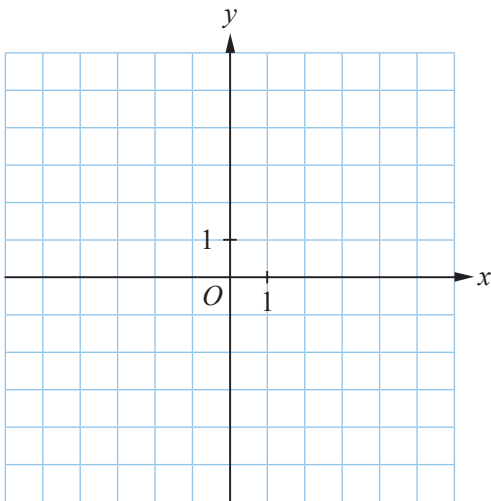
與 x 軸的交點坐標為 $(4, 0)$ 。

在坐標平面上標示這兩組解所代表的點，並畫出通過此兩點的直線，此直線即為二元一次方程式 $3x-4y=12$ 的圖形。



隨堂練習

在坐標平面上畫出二元一次方程式 $y=3x+3$ 的圖形，並在圖形上標示與 x 軸、 y 軸的交點坐標。

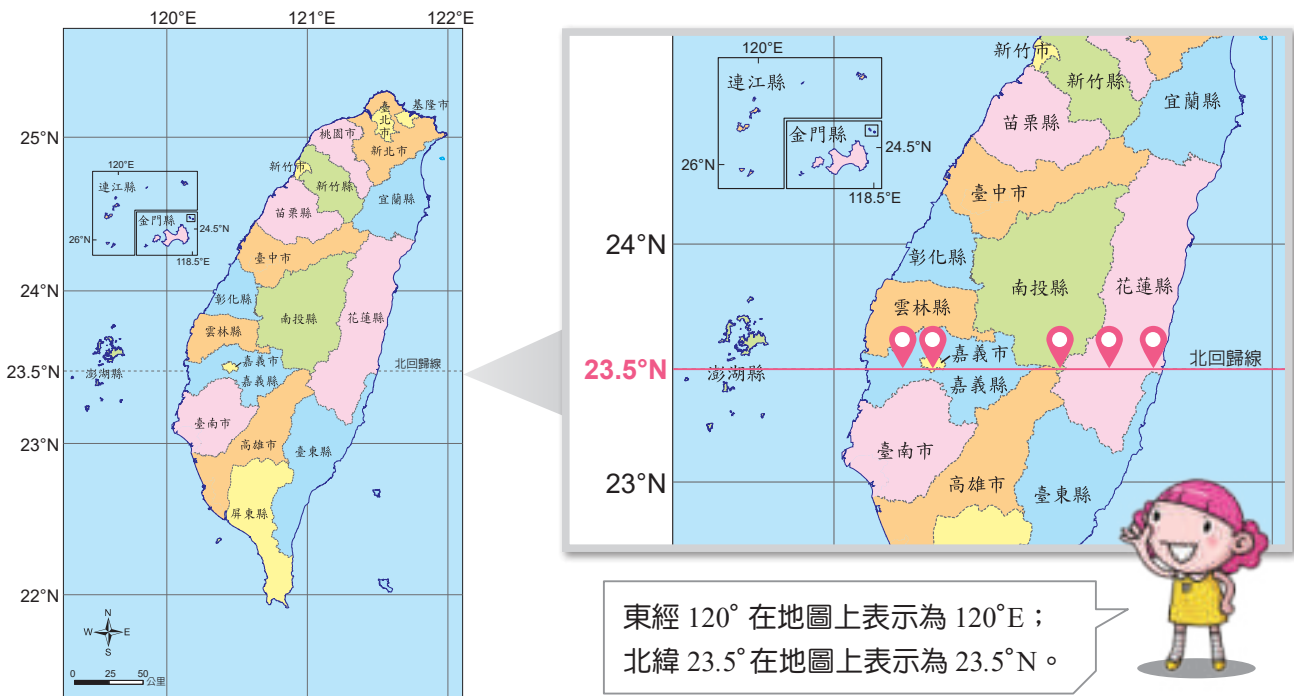


③ $y=k$ 的圖形



在內政部地籍圖資便民服務系統中，輸入(經度，緯度)就可以出現臺灣每一個地區的位置，經度以東經為正，緯度以北緯為正。例如：輸入 121.5641(東經)、25.0343(北緯)就會出現臺北 101 大樓的地理位置。

下圖是標示臺灣經緯度的地圖，從地圖可知北回歸線(北緯 23.5°)通過嘉義縣、嘉義市、南投縣、花蓮縣。



而通過這些地點的經度與緯度如下表：

x (經度)		120.3	120.45	120.8	121.35	121.5	
y (緯度)		23.5	23.5	23.5	23.5	23.5	
地點		嘉義縣 六腳鄉	嘉義市 東區	南投縣 信義鄉	花蓮縣 瑞穗鄉	花蓮縣 豐濱鄉	

從表中可以發現，北回歸線通過的這些點，不論 x 坐標是什麼， y 坐標都是 23.5。
那麼在坐標平面上，要怎麼用方程式來描述這條北回歸線呢？我們先來介紹某些特殊方程式的圖形。

在坐標平面上畫 $y=k$ 的圖形時， $y=k$ 是二元一次方程式 $0x+y=k$ 的簡化，所以不論 x 為何數， y 都是 k 。我們來看看如何畫 $y=k$ 的圖形。

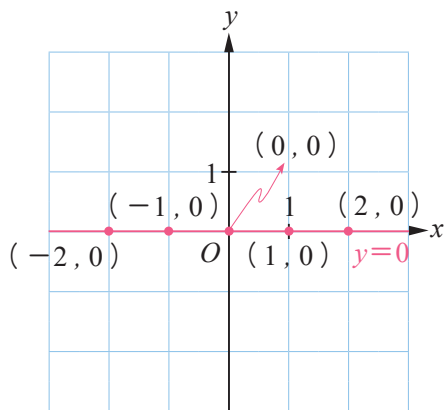
► $y=0$ 的圖形

將 $y=0$ 看成 $0x+y=0$ 時，列出方程式 $0x+y=0$ 的一些解，如下表：

x	-2	-1	0	1	2
y	0	0	0	0	0

在坐標平面上標示這些解所代表的點。

事實上， y 坐標為 0 的點都在 x 軸上，所以 $y=0$ 的圖形就是 x 軸，如圖一。



圖一

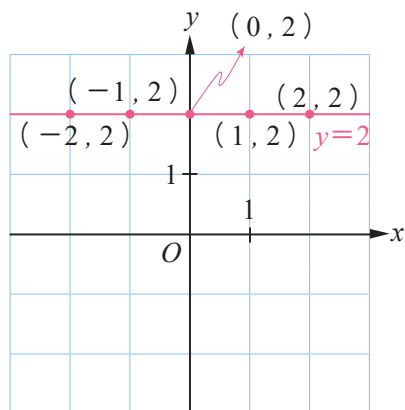
► $y=k$ ($k \neq 0$) 的圖形

將 $y=2$ 看成 $0x+y=2$ 時，列出方程式 $0x+y=2$ 的一些解，如下表：

x	-2	-1	0	1	2
y	2	2	2	2	2

在坐標平面上標示這些解所代表的點。

事實上， y 坐標為 2 的點所形成的直線就是 $y=2$ 的圖形，它是一條與 x 軸平行的水平線，也就是通過 $(0, 2)$ 與 y 軸垂直的直線，如圖二。



圖二

📌 垂直 y 軸的水平線 ($y=k$ 的圖形)

1. 當 $k=0$ 時， $y=0$ 的圖形就是 x 軸。
2. 當 $k \neq 0$ 時， $y=k$ 的圖形都是與 x 軸平行的水平線，也就是通過 $(0, k)$ 且垂直 y 軸的水平線。

例6 垂直 y 軸的直線

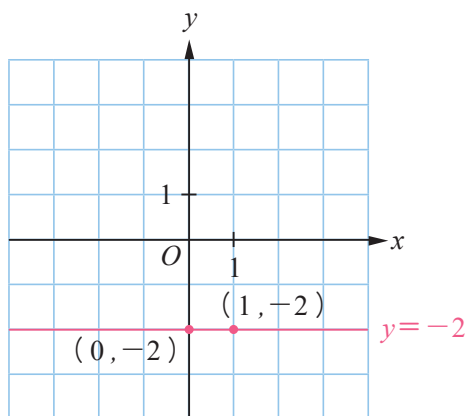
自評 P90 第 2 題(3)

在坐標平面上畫出方程式 $y = -2$ 的圖形。

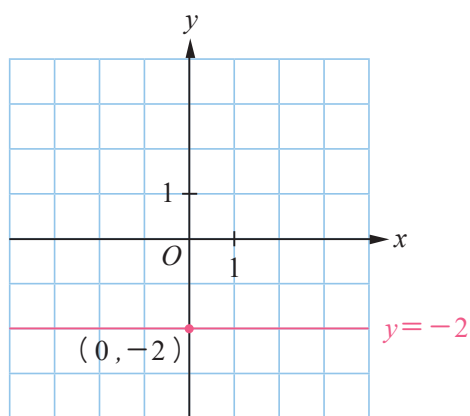
解一 將 $y = -2$ 視為 $0x + y = -2$ ，任取兩組解。

x	0	1
y	-2	-2

過 $(0, -2)$ 與 $(1, -2)$ 畫一直線，
則直線為 $y = -2$ 的圖形。

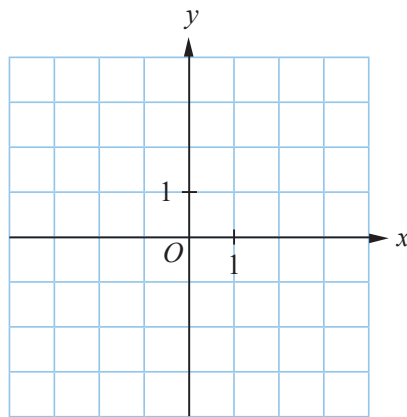


解二 在 y 軸上坐標是 -2 的位置，
畫一條與 y 軸垂直的直線，
如下圖所示。



隨堂練習

在坐標平面上畫出方程式 $y = 1$ 的圖形。



④ $x=h$ 的圖形

在坐標平面上畫 $x=h$ 的圖形時， $x=h$ 是二元一次方程式 $x+0y=h$ 的簡化，所以不論 y 為何數， x 都是 h 。我們來看看如何畫 $x=h$ 的圖形。

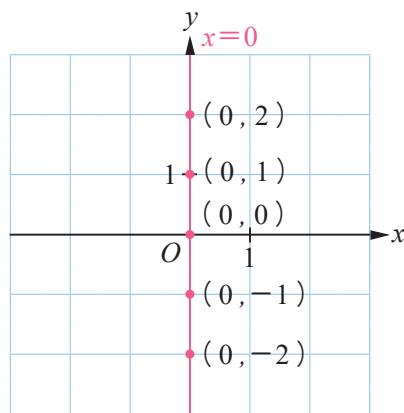
▶ $x=0$ 的圖形

將 $x=0$ 看成 $x+0y=0$ ，列出方程式 $x+0y=0$ 的一些解，如下表：

x	0	0	0	0	0
y	-2	-1	0	1	2

在坐標平面上標示這些解所代表的點。

事實上， x 坐標為 0 的點都在 y 軸上，所以 $x=0$ 的圖形就是 y 軸，如圖一。



圖一

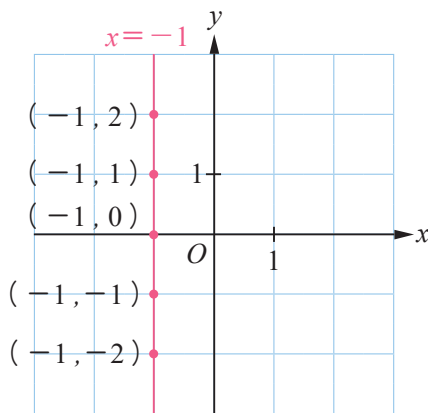
▶ $x=h$ ($h \neq 0$) 的圖形

將 $x=-1$ 看成 $x+0y=-1$ ，列出方程式 $x+0y=-1$ 的解。

x	-1	-1	-1	-1	-1
y	-2	-1	0	1	2

在坐標平面上標示這些解所代表的點。

事實上， x 坐標為 -1 的點所形成的直線就是 $x=-1$ 的圖形，它是一條與 y 軸平行的鉛垂線，也就是通過 $(-1, 0)$ 與 x 軸垂直的直線，如圖二。



圖二

📌 垂直 x 軸的鉛垂線 ($x=h$ 的圖形)

1. 當 $h=0$ 時， $x=0$ 的圖形就是 y 軸。
2. 當 $h \neq 0$ 時， $x=h$ 的圖形都是與 y 軸平行的鉛垂線，也就是通過 $(h, 0)$ 且垂直 x 軸的鉛垂線。

例7 垂直 x 軸的直線

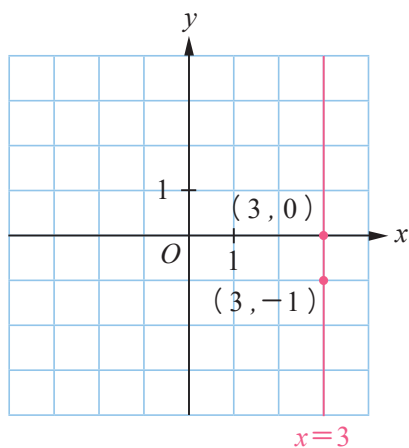
自評 P90 第 2 題(4)

在坐標平面上畫出方程式 $x=3$ 的圖形。

解 將 $x=3$ 視為 $x+0y=3$ ，任取兩組解。

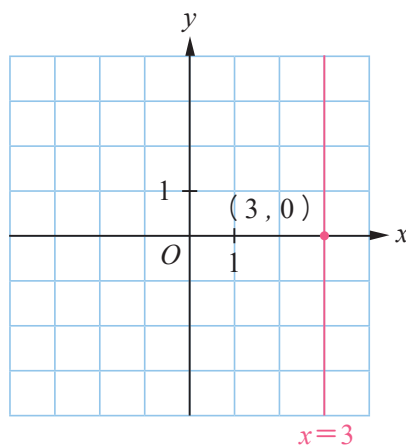
x	3	3
y	0	-1

過 $(3, 0)$ 與 $(3, -1)$ 畫一直線，
則直線為 $x=3$ 的圖形。



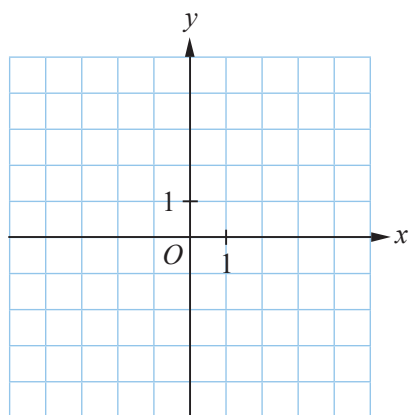
解

在 x 軸上坐標是 3 的位置，
畫一條與 x 軸垂直的直線，
如下圖所示。



隨堂練習

在坐標平面上畫出方程式 $x = -\frac{5}{2}$ 的圖形。



5 求二元一次方程式

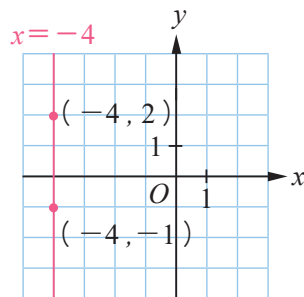
經由前面的討論，如果我們觀察到的圖形是鉛垂線或水平線，該如何求出它所對應的方程式呢？

例8 鉛垂線與水平線的方程式

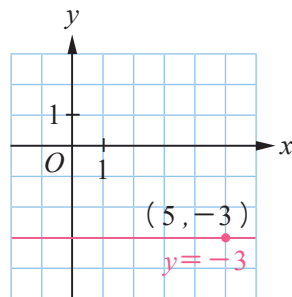
1. 哪個方程式的圖形是同時通過 $A(-4, -1)$ 、 $B(-4, 2)$ 兩點的鉛垂線？
2. 哪個方程式的圖形通過點 $C(5, -3)$ ，而且是平行 x 軸的水平線？

解

1. 通過 $A(-4, -1)$ 、 $B(-4, 2)$ 兩點畫一直線，
發現圖形為垂直 x 軸的鉛垂線，
直線上所有點的 x 坐標都是 -4 ，
因此這條直線所對應的方程式為 $x = -4$ 。



2. 通過點 $C(5, -3)$ ，畫一直線平行 x 軸，
發現直線上所有點的 y 坐標都是 -3 ，
因此這條直線所對應的方程式為 $y = -3$ 。



隨堂練習

1. 哪個方程式的圖形是同時通過 $A(3, -4)$ 、 $B(5, -4)$ 兩點的水平線？
2. 哪個方程式的圖形通過點 $C(6, -2)$ ，而且是平行 y 軸的鉛垂線？

如果觀察到的圖形不是鉛垂線或水平線時，又該如何求出它對應的方程式呢？

因為二元一次方程式 $ax+by=c$ 在坐標平面上的圖形是一條直線，此二元一次方程式的任一組解都會在該直線上，所以可以利用直線通過的點求二元一次方程式。

例9 求過已知兩點的二元一次方程式

自評 P91 第4題

已知二元一次方程式 $ax+by=1$ 的圖形為通過 $P(3, 5)$ 、 $Q(1, 1)$ 兩點的直線，求此方程式。

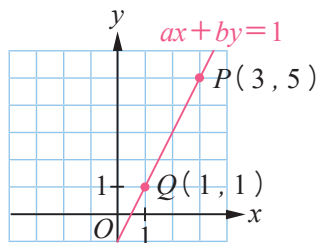
解 將 $(3, 5)$ 、 $(1, 1)$ 分別代入 $ax+by=1$

$$\text{得} \begin{cases} 3a+5b=1 & \text{①} \\ a+b=1 & \text{②} \end{cases}$$

由①式－②式 $\times 3$ 得 $2b=-2$ ，則 $b=-1$

將 $b=-1$ 代入②式得 $a=2$

故可得二元一次方程式為 $2x-y=1$ 。



在例9中， $2x-y=1$ 也可以表示成 $y=2x-1$ 或 $x=\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}$ ，即 $y=ax+b$ 或 $x=ay+b$ 等形式的圖形也是一條直線。因此，也可以用例9的方法求出這些形式的二元一次方程式。

隨堂練習

自評 P91 第5題

1. 已知二元一次方程式 $x=ay+6$ 的圖形為通過點 $(2, 1)$ 的直線，求 a 的值與此方程式。
2. 已知二元一次方程式 $y=ax+b$ 的圖形為通過 $A(2, -5)$ 、 $B(1, -2)$ 兩點的直線，求 a 、 b 的值與此方程式。

⑥ 二元一次聯立方程式的圖形

上一章已經學過二元一次聯立方程式，例如： $\begin{cases} x-y=1 \\ x+2y=4 \end{cases}$ ，其中包含兩個

二元一次方程式 $x-y=1$ 與 $x+2y=4$ ，因此在坐標平面上，可以分別畫出它們的圖形：

(1) 找出 $x-y=1$ 的兩組解：

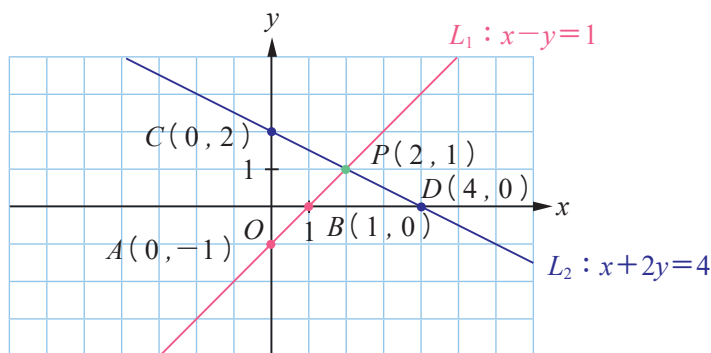
x	0	1
y	-1	0

則 $x-y=1$ 的圖形是通過 $A(0, -1)$ 、 $B(1, 0)$ 兩點的直線 L_1 。(如下圖)

(2) 找出 $x+2y=4$ 的兩組解：

x	0	4
y	2	0

則 $x+2y=4$ 的圖形是通過 $C(0, 2)$ 、 $D(4, 0)$ 兩點的直線 L_2 。(如下圖)



由上圖可以發現，直線 L_1 與 L_2 交於一點 $P(2, 1)$ 。

因為 $P(2, 1)$ 在直線 L_1 上，所以 $x=2$ 、 $y=1$ 是方程式 $x-y=1$ 的解，又 $P(2, 1)$ 也在直線 L_2 上，所以 $x=2$ 、 $y=1$ 也是方程式 $x+2y=4$ 的解，所以直線 L_1 與 L_2 的交點 $P(2, 1)$ 為此二元一次聯立方程式的解。

二元一次聯立方程式的圖形與其解

兩條直線交於一點時，其交點坐標就是二元一次聯立方程式的解；而二元一次聯立方程式的解，就是這兩個方程式所代表的兩條直線在坐標平面上的交點。

例10 兩個二元一次方程的交點坐標

自評 P91 第 6 題

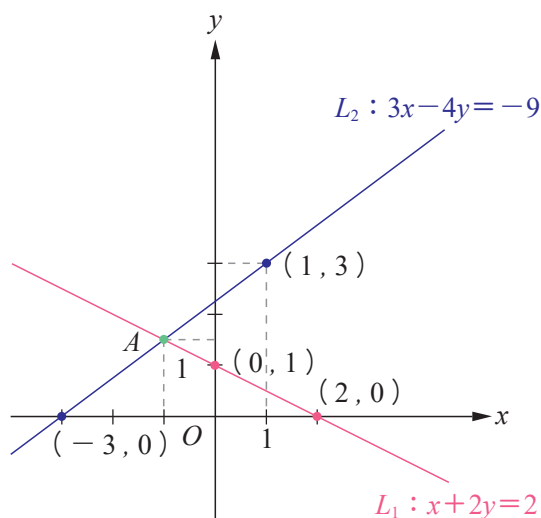
在坐標平面上分別畫出二元一次方程式 $x+2y=2$ 與 $3x-4y=-9$ 的圖形。假設此兩條直線相交於一點 A ，求出 A 點的坐標。

解 (1) 先找出方程式 $x+2y=2$ 的兩組解

x	0	2
y	1	0

再找出 $3x-4y=-9$ 的兩組解

x	1	-3
y	3	0



即直線 L_1 、 L_2 分別是二元一次方程式 $x+2y=2$ 與 $3x-4y=-9$ 的圖形。

(2) 解聯立方程式 $\begin{cases} x+2y=2 & \text{..... ①} \\ 3x-4y=-9 & \text{..... ②} \end{cases}$

由①式 $\times 2$ +②式得

$$5x = -5$$

$$x = -1$$

將 $x = -1$ 代入①式得

$$-1 + 2y = 2$$

$$y = \frac{3}{2}$$

所以兩條直線的交點坐標為 $A(-1, \frac{3}{2})$ 。

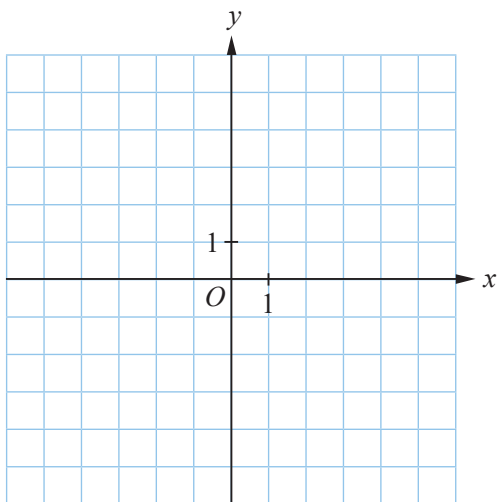
二元一次聯立方程式的解就是兩條直線的交點坐標。





隨堂練習

1. 在坐標平面上，二元一次方程式 $2x + y = -2$ 與 $x + 2y = 5$ 的圖形交於一點 P ，畫出這兩個二元一次方程式的圖形，並求出 P 點的坐標。



2. 在坐標平面上，二元一次方程式 $2x + 3y = 5$ 與 $x - 6y = 0$ 的圖形交於一點 A ，求 A 點的坐標。



1 二元一次方程式的圖形與畫法

- (1) 一個二元一次方程式的任意一組解，可以記錄成數對的形式，此時這一組解在坐標平面上的圖形就是一個點。
- (2) 二元一次方程式的圖形都是一條直線。
- (3) 畫出二元一次方程式圖形的方法，須先找出此二元一次方程式中，兩組不同的解，然後在坐標平面上標示出此兩點，並畫一條直線通過這兩點，即為此方程式的圖形。

2 二元一次方程式 $ax+by=c$ 的圖形

條件	$a \neq 0, b \neq 0$	$a = 0, b \neq 0$	$a \neq 0, b = 0$
圖形	不垂直兩軸的直線	垂直 y 軸的直線	垂直 x 軸的直線
例	$2x - y = 4$	$y = 5$	$x = 3$

3 二元一次聯立方程式的圖形與其解

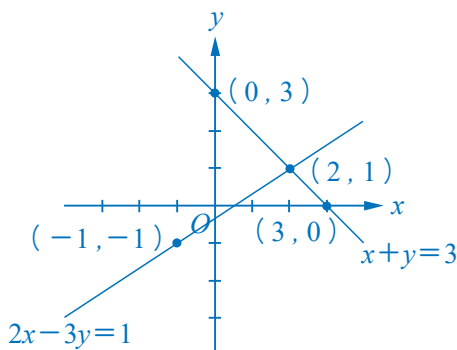
二元一次聯立方程式的解就是這兩個方程式圖形的交點坐標；兩條直線的交點坐標就是這兩條直線所代表的兩個方程式的共同解。

例 二元一次聯立方程式 $\begin{cases} x+y=3 \\ 2x-3y=1 \end{cases}$ 的解為 $x=2, y=1$ ，所以此聯立方程式

圖形的交點坐標為 $(2, 1)$ 。

x	0	3
y	3	0

x	2	-1
y	1	-1





2-2 自我評量

- ① 在坐標平面上，下列哪些點在二元一次方程式 $3x + y = -4$ 的圖形上？ 課 P70 例 1

$(2, -2)$ 、 $(-1, -1)$ 、 $(\frac{2}{3}, -6)$ 、 $(0, -4)$

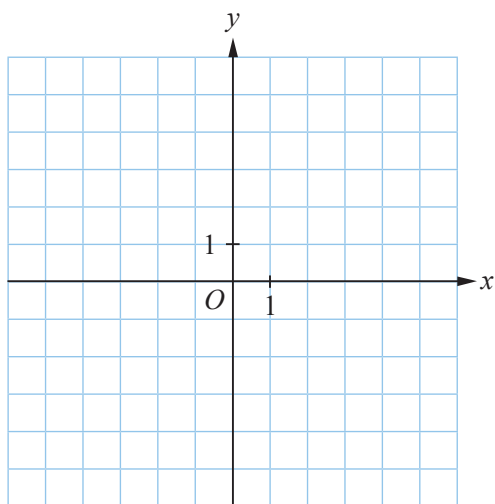
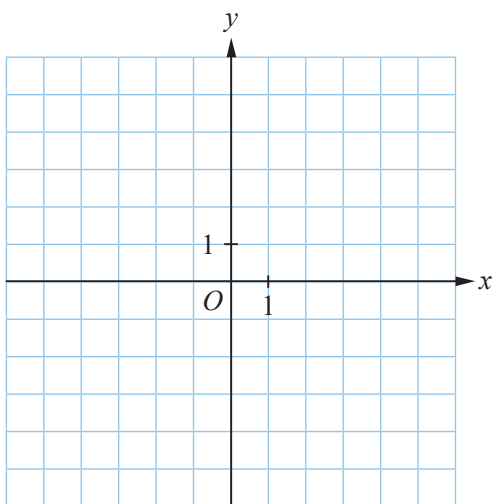
- ② 在坐標平面上畫出下列各二元一次方程式的圖形：

(1) $y = 3x - 1$

課 P77 例 4

(2) $3x + 4y + 12 = 0$

課 P77 例 4

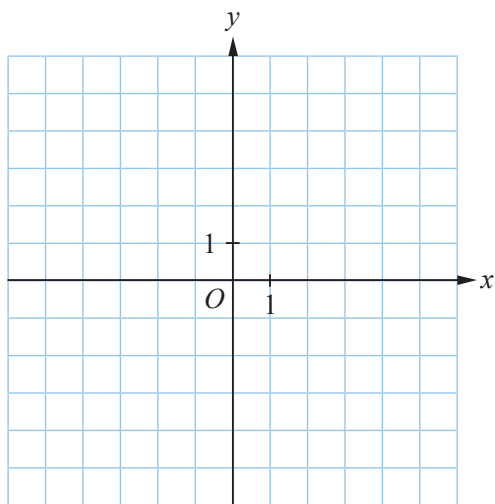
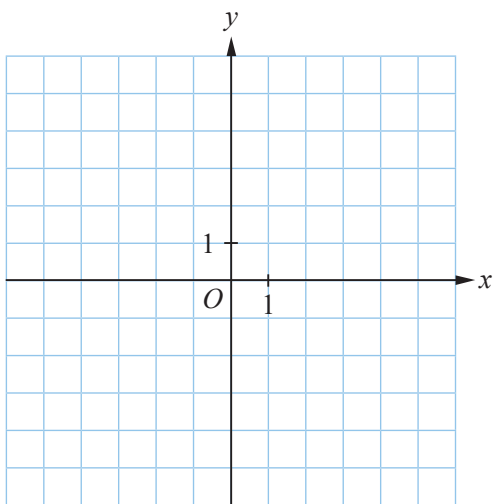


(3) $y = 3$

課 P81 例 6

(4) $2x - 5 = 0$

課 P83 例 7



- 3 二元一次方程式 $y=4x-8$ 的圖形與 x 軸交於 P 點，與 y 軸交於 Q 點，求 P 、 Q 兩點的坐標。

課 P78 例 5

- 4 已知方程式 $ax+by=2$ 的圖形為通過 $P(1, 1)$ 、 $Q(4, -2)$ 兩點的直線，求：

(1) a 、 b 之值。

課 P85 例 9

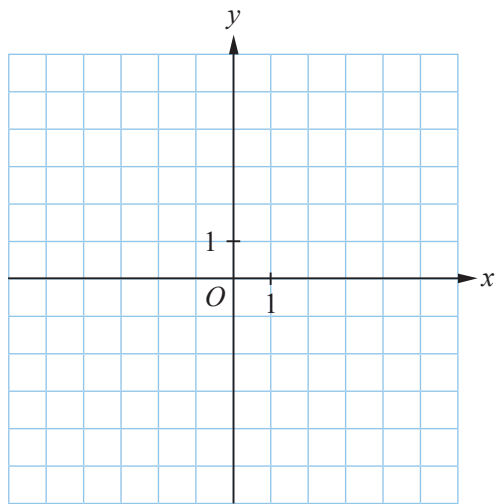
(2) 此二元一次方程式。

- 5 已知方程式 $y=ax+3$ 和 $x=by+4$ 的圖形皆為通過點 $(2, -1)$ 的直線，求出 a 、 b 之值。

課 P85 隨堂

- 6 在坐標平面上分別畫出二元一次方程式 $3x+y=-7$ 與 $-2x+y=3$ 的圖形，並求出此兩條直線的交點坐標。

課 P87 例 10





自我挑戰

本單元為統整課程，由學生自行挑戰，教師可視班級情況決定如何運用。

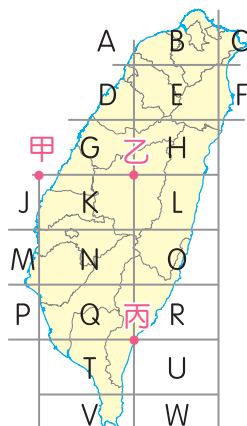


臺灣的電線桿或配電箱，大多標有由英文字母和數字組成的雙排編號，共 9 碼或 11 碼，此編號為「電力坐標」，其中坐標中的英文字母和數字是根據固定的規則編碼，例如：圖一中的電力坐標是 ，第一排第一個英文字母 Q 代表分區坐標區塊，對照圖二即可大概知道位於臺灣的哪個位置。

圖二中，台灣電力公司將臺灣本島分成 22 個字母區塊，每一個字母矩形區塊，東西長 80 公里，南北長 50 公里，並依電力坐標定出直角坐標。



圖一



圖二

如果有不小心受困的民眾不曉得自己的所在位置，只要向救難單位報出電力坐標，救難人員就可依電力坐標確認位置！



() (1) 圖一中電線桿上的編號對照圖二可知，其位置在下列何處的可能性最高？

- (A)雲林縣 (B)南投縣 (C)嘉義縣 (D)屏東縣

(2) 若圖二中，甲點在 K 區左上角，台電所定的直角坐標為 $(170, 2650)$ ；乙點在 K 區右上角，台電所定的直角坐標為 $(250, 2650)$ ，單位為公里，試求 R 區塊左下角丙點的坐標。

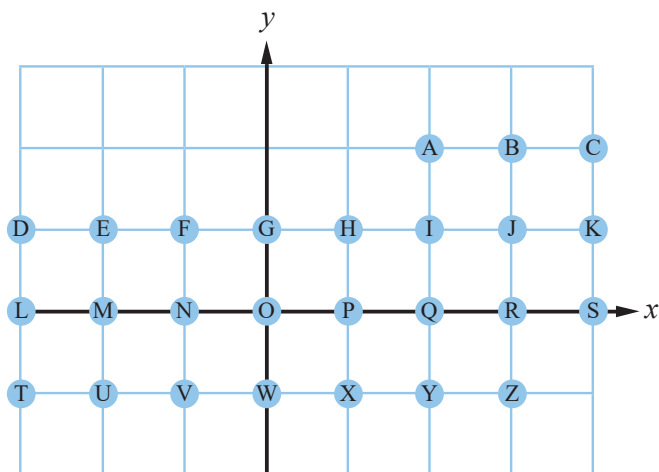
解



趣學數學

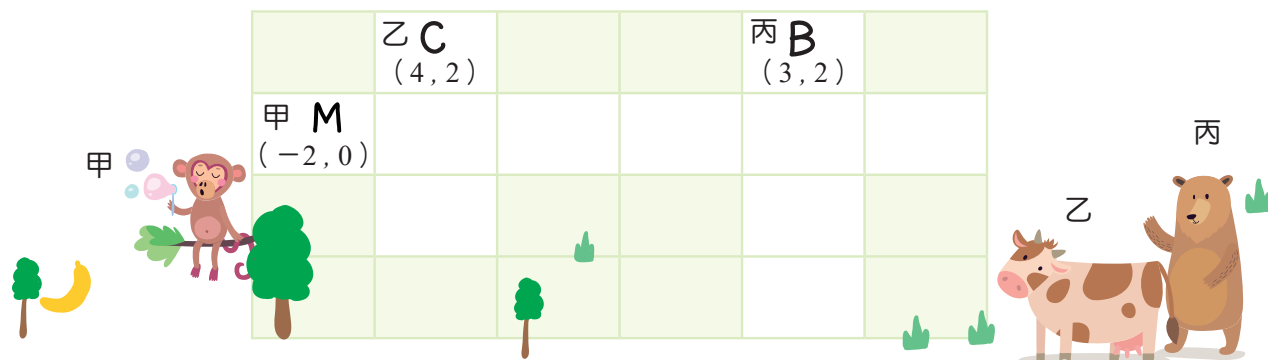
本單元為配合此章所設計的趣味問題，由學生自行練習，教師可視班級情況而自行決定如何運用。

在這張英文字母坐標中，每個字母都有其代表的坐標，例如：「X」的坐標為 $(1, -1)$ 。



1 配合 2-1

利用英文字母坐標，依序將甲、乙、丙的英文單字及所對應的坐標填入空格中。



2 配合 2-2

在上面的英文字母坐標系中：

- (1) 分別畫出二元一次方程式 $x-y=0$ 、 $x-y=1$ 、 $x+y=1$ 、 $x=-3$ 的圖形。
- (2) 列出這四條直線所通過的字母：
- (3) 在這些字母中任意拼成 3 個有意義的單字（字母可重複），寫出其中文的意義，並依序寫出單字中字母所在的坐標。

範例 GOOD：好， $(0, 1)$ $(0, 0)$ $(0, 0)$ $(-3, 1)$ 。



數學FUN手玩一轟炸寶果 ◀ 可搭配附件 2-1~2-3

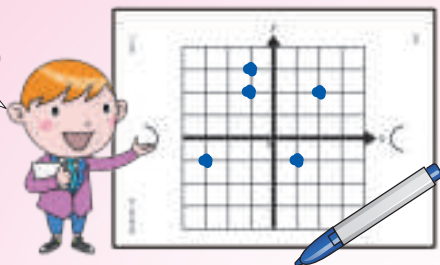
遊戲示範教學

在本章中，我們學習了許多關於直角坐標與方程式圖形的內容，除了課堂上的練習，我們也可透過有趣的寶果遊戲，更熟悉坐標的表示法喔！趕緊拿出附件 2-1~2-3，並找到你的好夥伴，一起切磋吧！

遊戲說明 3~4 人一組

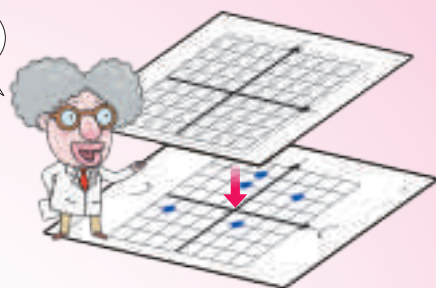
- 1 標記** 每位玩家在自己的坐標板（附件 2-2）上畫記 5 個寶石標記，並發附件 2-3 的 5 張寶石卡（一人一種顏色）

4 種顏色對應
4 個玩家



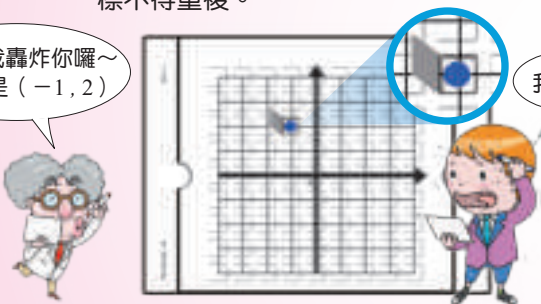
- 2 組合** 將附件 2-1 和附件 2-2 扣合，避免其他玩家看到畫記的位置。

誰都不可以
偷看喔！



- 3 引爆** 輪到的玩家須報出坐標，且所有玩家須翻開自己對應的坐標板。※喊的坐標不得重複。

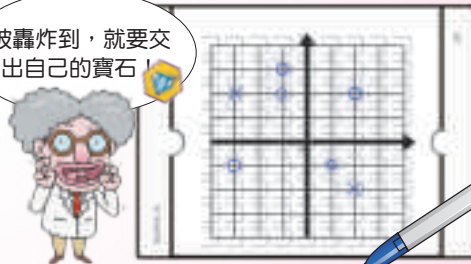
輪到我轟炸你囉～
坐標是 $(-1, 2)$



- 4 記號** 玩家可在坐標板上層做記號，炸到寶石位置的畫○，沒中的畫×。喊到寶石標記須繳出寶石卡。

我被炸了！

被轟炸到，就要交
出自己的寶石！



- 5 結束** 當有玩家所設的寶石卡全部繳出，即為出局，且遊戲結束。剩餘玩家結算獲得的寶石卡，擁有最多寶石者即為贏家喔！

你的寶石全數繳出了！

咦？我輸了嗎？

遊戲結束！



結算分數	
Winner	出局

3 比例



生活中存在許多與比例相關的事物，例如：各種類別的咖啡是由不同比例的成分調配而成；比例尺則是記錄繪製的長度與實際長度的比例。

由於比例是最基本又常見的數量關係，也是後續數學和科學的學習基礎，因此，本章從國小學習過的比值出發，探討比例的應用，並發展正比與反比的概念，對比例做更進一步的認識。





我要來杯有添加巧克力的摩卡。

我要牛奶比例多一點的拿鐵。

美式咖啡 (Americano)		濃縮咖啡：水 1 : 4
拿鐵 (Caffè Latte)		濃縮咖啡：牛奶：奶泡 1 : 2 : 1
卡布奇諾 (Cappuccino)		濃縮咖啡：牛奶：奶泡 1 : 1 : 1
摩卡 (Caffè Mocha)		濃縮咖啡：巧克力：牛奶：奶泡 1 : 1 : 2 : 1
咖啡歐蕾 (Café Au Lait)		濃縮咖啡：牛奶 1 : 5

濃縮咖啡 水 牛奶
 奶泡 巧克力





學習前哨站

本單元為學生自我複習，
教師可視班級情況決定如何運用。



回顧 1 比與比值

國小 6 年級

七年三班有男生 15 人，女生 16 人，則：

- (1) 男生人數與女生人數比為 15 : 16。
- (2) 男生人數與女生人數比值為 $\frac{15}{16}$ 。 ← $15 \div 16 = \frac{15}{16}$ 。
- (3) 男生人數是女生人數的 $\frac{15}{16}$ 倍。 ← 由男生與女生的人數比值得知。



課前練習

小欣打籃球，投籃 25 次，投進了 13 次，則

進球次數與投籃次數的比為 _____ : _____，比值為 _____。

這個比值稱為命中率，以小數表示為 _____。

回顧 2 相等的比

國小 6 年級

若哥哥的存款有 1200 元，且哥哥與妹妹的存款比是 24 : 17，則妹妹的存款有 □ 元。

因此 $24 : 17 = 1200 : \square$

$\times 50$ ← $1200 \div 24 = 50$
 $\times 50$

$\square = 17 \times 50 = 850$ ，所以妹妹的存款是 850 元。



課前練習

有一個長方形長和寬的比為 8 : 5，已知寬為 45 公分，則長為 _____ 公分。

3-1 比例式

① 比與比值



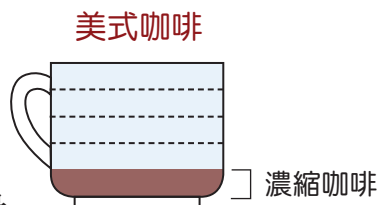
我們常利用比與比值的概念來表示兩數量之間的關係，例如上述漫畫中，12 包餅乾與 3 包餅乾的比為 $12:3$ ，其中 12 稱為**前項**，3 稱為**後項**，前項除以後項所得的數稱為**比值**，因此 $12:3$ 的比值為 $12 \div 3 = 4$ ，即 12 包餅乾是 3 包餅乾的 4 倍。



咖啡是生活中常見的飲料，章首漫畫中可以看到不同品項的咖啡，其中美式咖啡裡含有 1 份濃縮咖啡的液量與 4 份水的液量。

在一杯美式咖啡中，濃縮咖啡的液量：整杯咖啡的液量為 $1 : (1+4) = 1 : 5$ ，其比值為 $1 \div 5 = \frac{1}{5}$ 。

也就是說，濃縮咖啡的液量是整杯的 $\frac{1}{5}$ 倍。



隨堂練習

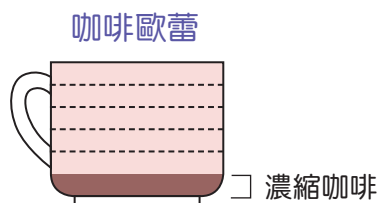
已知一杯咖啡歐蕾裡含有 1 份濃縮咖啡的液量與 5 份牛奶的液量，則：

(1) 一杯咖啡歐蕾中，牛奶的液量：整杯咖啡歐蕾液量

= _____ : _____。

(2) 牛奶的液量與整杯咖啡歐蕾液量的比值為 _____。

(3) 牛奶的液量是整杯咖啡歐蕾液量的 _____ 倍。



比與比值

a 、 b 兩數的比記為 $a : b$ ，則(1) a 稱為比的前項， b 稱為比的後項。

(2) $a : b$ 的比值為 $\frac{a}{b}$ ，即 $a \div b$ 的值 ($b \neq 0$)。

(3) 若 $a \div b = k$ ，表示 a 是 b 的 k 倍。

國小時曾學過正數的比值，事實上，我們也可以求負數的比值。

例 1 求比值

自評 P116 第 1 題

求下列各比的比值：

(1) $(-12) : 20$

(2) $2 : 2\frac{2}{5}$

解 (1) $(-12) : 20$ 的比值為

$$\frac{-12}{20} = -\frac{3}{5}。$$

(2) $2 : 2\frac{2}{5}$ 的比值為

$$2 \div 2\frac{2}{5} = 2 \div \frac{12}{5} = 2 \times \frac{5}{12} = \frac{5}{6}。$$

 隨堂練習

求下列各比的比值：

(1) $26 : 39$

(2) $2\frac{1}{12} : (-\frac{5}{6})$

(3) $3.4 : 5.1$

例2 比值的比較大小



健體 自評 P116 第2題

校慶舉辦師生籃球比賽，學生隊全場三分球出手 20 次，投進 8 次，教師隊全場三分球出手 30 次，投進 12 次，則哪一隊三分球的命中率較高？
(命中率 = 投進次數與投球次數的比值，通常以百分率表示。)

解 學生隊三分球投進次數與投球次數的比是 $8 : 20$ ，

比值為 $8 \div 20 = 0.4$ ，即命中率是 40%。

教師隊三分球投進次數與投球次數的比是 $12 : 30$ ，

比值為 $12 \div 30 = 0.4$ ，即命中率是 40%。

因此學生隊與教師隊三分球的命中率相同。

 隨堂練習

正敏與金鋒參加棒球比賽，正敏在 15 次打擊中，擊出 6 次安打；金鋒在 24 次打擊中，擊出 9 次安打，已知安打數與打擊數的比值稱為打擊率，則：

(1) 正敏和金鋒的打擊率分別是多少？(以小數表示)

(2) 兩人的打擊率誰比較高？



比值相等的兩個比，稱為**相等的比**。在例2中，「8 : 20」與「12 : 30」的比值相等，就稱這兩個比相等，可記成 $8 : 20 = 12 : 30$ 。

由於分數經過約分或擴分後，其值不變。因此可知，

$$\begin{array}{ccc} \xrightarrow{\div 4} & & \xrightarrow{\times 6} \\ \frac{8}{20} & = & \frac{2}{5} & = & \frac{12}{30} \\ \xleftarrow{\div 4} & & \xleftarrow{\times 6} \end{array}$$

$$\text{即 } 8 : 20 = 2 : 5 = 12 : 30$$

$$(8 \div 4) : (20 \div 4) \quad (2 \times 6) : (5 \times 6)$$

因此一個比的前項與後項同除以或同乘以一個不為 0 的數，其比相等。



相等的比

已知 $m \neq 0$ ，則(1) $a : b = (a \div m) : (b \div m)$ 。

(2) $a : b = (a \times m) : (b \times m)$ 。



隨堂練習

下列的比中，何者與 40 : 30 相等？在□中打「✓」。

□ 4 : 3

□ 3 : 4

□ $\frac{4}{3} : 1$

□ $1 : \frac{3}{4}$

一個比如果前項、後項都是整數，且此兩個整數的絕對值互質，這個比就稱為**最簡整數比**。例如 $2:5$ 與 $(-7):6$ 是最簡整數比； $\frac{1}{3}:2$ 與 $8:18$ 不是最簡整數比。

例3 最簡整數比

將下列各比化為最簡整數比：

(1) $52:65$

(2) $\frac{1}{10}:\frac{1}{3}$

(3) $(-2\frac{4}{5}):2\frac{1}{3}$

解 (1) $52:65 = (52 \div 13):(65 \div 13)$ ← 同除以最大公因數 13。

$$= 4:5$$

(2) $\frac{1}{10}:\frac{1}{3} = (\frac{1}{10} \times 30):(\frac{1}{3} \times 30)$ ← 乘以分母的最小公倍數 30。

$$= 3:10$$

(3) $(-2\frac{4}{5}):2\frac{1}{3} = (-\frac{14}{5}):\frac{7}{3}$ ← 先化為假分數。

$$= (-\frac{14}{5} \times 15):(\frac{7}{3} \times 15)$$

$$= (-42):35$$

$$= (-42 \div 7):(35 \div 7)$$

$$= (-6):5$$

隨堂練習

將下列各比化為最簡整數比：

(1) $39:(-21)$

(2) $2.6:0.13$

(3) $\frac{12}{35}:\frac{8}{49}$

② 比例式

如果 $a:b$ 與 $c:d$ 是相等的比，則可以記作 $a:b=c:d$ ，像這樣的式子稱為**比例式**。其中， a 和 d 稱為這個比例式的**外項**， b 和 c 稱為這個比例式的**內項**。

以下我們來探索比例式的外項乘積與內項乘積的關係。

探索活動 外項乘積與內項乘積的關係

寫出下列比例式中的外項乘積與內項乘積，並比較兩者是否相等。

比例式	外項乘積	內項乘積	是否相等
$2:5=4:10$	$2 \times 10 = 20$	$5 \times 4 = 20$	☒ 是 ☐ 否
$3:(-4)=(-6):8$			☐ 是 ☐ 否
$\frac{1}{2}:\frac{2}{3}=6:8$			☐ 是 ☐ 否
$3:7=3r:7r(r \neq 0)$			☐ 是 ☐ 否
$a:b=ar:br(r \neq 0)$			☐ 是 ☐ 否

一般而言，當 $a:b=c:d$ ($b \neq 0, d \neq 0$) 以比值的形式表示，可得 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ，

將 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ 的等號兩邊同乘以 $b \times d$ ，

得 $\frac{a}{\cancel{b}_1} \times (\cancel{b}_1 \times d) = \frac{c}{\cancel{d}_1} \times (b \times \cancel{d}_1)$ ，

即 $a \times d = b \times c$ 。

外項乘積 = 內項乘積

若 $a:b=c:d$ ($b \neq 0, d \neq 0$)，則 $a \times d = b \times c$ 。

例4 外項乘積 = 內項乘積

自評 P116 第 3 題

求下列各比例式中 x 的值：

(1) $3 : 4 = 5 : x$

(2) $(x-3) : 2 = (2x-5) : 3$

解 (1) 因為 $3 : 4 = 5 : x$

所以 $3x = 4 \times 5$

$3x = 20$

$x = \frac{20}{3}$

(2) 因為 $(x-3) : 2 = (2x-5) : 3$

所以 $3(x-3) = 2(2x-5)$

$3x - 9 = 4x - 10$

$-x = -1$

$x = 1$

隨堂練習

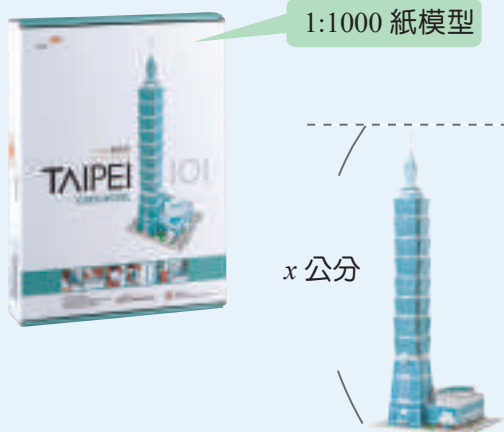
求下列各比例式中 x 的值：

(1) $\frac{5}{4} : \frac{2x}{7} = 7 : 4$

(2) $(2x-8) : (x+1) = 3 : 4$

補給站 比例的應用

杰瑞買了一盒臺北 101 的紙模型，如右圖，他想事先知道組合後的高度，是否可以放進高 60 公分的收藏櫃中，但是只知道臺北 101 的真實高度是 508 公尺，且模型外盒標示是 1 : 1000。於是便依照比例式 $x : 508 = 1 : 1000$ ，算出模型的高是 0.508 公尺 = 50.8 公分，因此可以放進收藏櫃中。



有兩個學生，一個很活潑，一個很害羞，
誰的成績比較好？

若比例式 $x:y=2:3$ ，利用外項乘積＝內項乘積，得 $3x=2y$ ，
 將左右兩式同時除以 3 與 2 的最小公倍數 $[3, 2]=6$ ，得 $\frac{3x}{6}=\frac{2y}{6}$ ，即 $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}$ 。
 如果設 $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=r$ ， $r \neq 0$ ，則 $\frac{x}{2}=r$ ，得 $x=2r$ ；
 $\frac{y}{3}=r$ ，得 $y=3r$ 。

比例式的運算性質

若 m 、 n 都是不為 0 的已知數，則下列三者有相同的意義：

- (1) $x:y=m:n$ 。
- (2) $\frac{x}{m}=\frac{y}{n}$ 。
- (3) $x=mr$ ， $y=nr$ ，其中 $r \neq 0$ 。

例5 比例式性質的應用

已知 x 、 y 皆不為 0，且 $\frac{x}{4}=\frac{y}{7}$ ，求 $3x:4y$ 的最簡整數比。

解 設 $\frac{x}{4}=\frac{y}{7}=r$ ，其中 $r \neq 0$ ，

則 $x=4r$ ， $y=7r$ ，

因此 $3x:4y=(3 \times 4r):(4 \times 7r)$

$$=12r:28r$$

$$=3:7$$

隨堂練習

已知 x 、 y 皆不為 0，且 $\frac{x}{7}=\frac{y}{10}$ ，求 $4x:5y$ 的最簡整數比。

例6 比例式性質的應用

自評 P116 第 4 題

已知 x 、 y 皆不為 0，且 $3x=5y$ ，求下列各比的最簡整數比：

(1) $x:y$

(2) $(x+y):y$

解

(1) 將 $3x=5y$ 等號兩邊同時除以 15，

$$\text{得 } \frac{x}{5} = \frac{y}{3},$$

所以 $x:y=5:3$ 。

(2) 由 $x:y=5:3$ ，

可設 $x=5r$ ， $y=3r$ ，其中 $r \neq 0$ ，則

$$\begin{aligned}(x+y):y &= (5r+3r):3r \\ &= 8:3\end{aligned}$$



隨堂練習

已知 x 、 y 皆不為 0，且 $2x=3y$ ，求下列各比的最簡整數比：

(1) $x:y$

(2) $(2x+y):(3x-y)$

例7 比例式性質的應用

自評 P117 第 5 題

有兩數 x 、 y ，已知 $x:y=1:3$ ，且 $x+y=24$ ，則 x 、 y 的值為多少？

解

由 $x:y=1:3$ ，可設 $x=r$ ， $y=3r$ ，其中 $r \neq 0$ ，

代入 $x+y=24$ ，可得 $r+3r=24$ ， $4r=24$ ， $r=6$

所以 $x=r=6$ ，

$$y=3r=3 \times 6=18。$$



隨堂練習

有兩數 x 、 y ，已知 $x:y=7:5$ ，且 $x-y=18$ ，則 x 、 y 的值為多少？



例8 比例式性質的綜合應用

自評 P117 第 5 題

已知 $(2x-y):(x+y)=2:3$ ，求下列各比的最簡整數比。

(1) $x:y$

(2) $2y:(x+y)$

解

(1) $(2x-y):(x+y)=2:3$

$$3(2x-y)=2(x+y)$$

$$6x-3y=2x+2y$$

$$4x=5y, \text{ 等號兩邊同時除以 } 20,$$

$$\text{得 } \frac{x}{5} = \frac{y}{4},$$

$$\text{所以 } x:y=5:4$$

(2) 由 $x:y=5:4$,

可設 $x=5r, y=4r$ ，其中 $r \neq 0$ ，則

$$2y:(x+y)=(2 \times 4r):(5r+4r)$$

$$=8r:9r$$

$$=8:9$$



隨堂練習

已知 $(x+y):(x-y)=5:3$ ，求下列各比的最簡整數比。

(1) $x:y$

(2) $3x:(x+2y)$



Thinking

已知 $x:y=2:3$ ，則：

(1) 當 $y \neq -1$ 時， $(x+1):(y+1)$ 的比值是否為固定的值？並說明理由。

(2) 當 $y \neq -3$ 時， $(x+2):(y+3)$ 的比值是否為固定的值？並說明理由。

③ 應用問題

比例在日常生活與科技中有許多廣泛的應用，接下來將學習與比例相關的應用問題。

例9 生活中的比例應用

已知甲正方形邊長的 2 倍和乙正方形邊長的 5 倍相等，求：

- (1) 甲正方形的周長：乙正方形的周長。
- (2) 若甲正方形周長與乙正方形周長的和為 350 公分，則甲正方形與乙正方形的周長各為多少公分？

解 (1) 設甲正方形的邊長為 x 公分，乙正方形的邊長為 y 公分。

依題意可得 $2x=5y$ ，則 $x:y=5:2$ ，所以邊長比為 $5:2$ 。

因為正方形的周長等於邊長的 4 倍，所以周長比為 $4x:4y=x:y=5:2$ 。

- (2) 設甲正方形的周長為 $5r$ 公分，乙正方形的周長為 $2r$ 公分，其中 $r \neq 0$ ，則

$$5r+2r=350, 7r=350, r=50$$

所以甲正方形的周長為 $5 \times 50 = 250$ (公分)，

乙正方形的周長為 $2 \times 50 = 100$ (公分)。

隨堂練習

已知姐姐存款的 3 倍和弟弟存款的 8 倍相等，求：

- (1) 姐姐的存款：弟弟的存款。
- (2) 若姐姐和弟弟共有 2200 元，則姐姐和弟弟的存款各為多少元？

例10 生活中的比例應用

自評 P117 第 6 題

在 80 公克的水中放入 20 公克的食鹽，完全溶解後，變成 100 公克的食鹽水，則：

- (1) 食鹽與食鹽水的比為何？
- (2) 若取出 30 公克的食鹽水，則其中含有食鹽多少公克？

解 (1) 食鹽：食鹽水 = $20 : 100 = 1 : 5$

(2) 設 30 公克的食鹽水中，含有食鹽 x 公克，則

$$x : 30 = 1 : 5$$

$$5x = 30$$

$$x = 6$$

所以 30 公克的食鹽水中，含有食鹽 6 公克。

**隨堂練習**

有恩從網路上看到調製完美比例的蜂蜜檸檬水方法如下：400 c.c. 的冰水加入 5 c.c. 的蜂蜜和半顆檸檬。如果有恩想利用 2000 c.c. 的冰水來製作完美比例的蜂蜜檸檬水，則需要蜂蜜多少 c.c.？檸檬多少顆？

不同單位的量有時也可以用比例式來思考。

例如：一輛以均速行駛的車輛，2.5 小時共行駛了 160 公里，則以同樣速率行駛 4 小時可行駛多少公里？

我們可假設 4 小時行駛 x 公里，以比例式 $160:2.5=x:4$ ，求解得
 $2.5x=4 \times 160$ ， $x=256$ （公里）。

例 11 比例尺的計算

自評 P117 第 7 題

1. 如圖，爸爸開車帶著全家旅遊，在電子地圖上知道起點到終點的路徑長約為 4 公分，則他們從起點到終點約行駛多少公里？
2. 已知從起點到休息站的路程約 100 公里，若以均速行駛這段距離共花了 80 分鐘，則從休息站到終點的路程以同樣的均速行駛約要多少分鐘？



解 1. 設起點到終點的距離為 x 公里，故

$$1 \text{ 公分} : 40 \text{ 公里} = 4 \text{ 公分} : x \text{ 公里}$$

$$x = 160$$

則從起點到終點約行駛 160 公里。

2. 因為休息站到終點還有 $160 - 100 = 60$ （公里），故可設還需 x 分鐘，

$$100 : 80 = 60 : x$$

$$x = 48$$

因此從休息站到終點約要 48 分鐘。

距離與時間的比值為速率。



隨堂練習

假日時，博士帶艾美和安琪坐火車去臺灣東部旅遊，如果火車從八堵到花蓮皆為均速行駛，花了 60 分鐘行駛 80 公里後到達羅東，預計還要 96 公里才會抵達花蓮，則：

(1) 火車從羅東到花蓮行駛的時間是多少分鐘？



(2) 從羅東到花蓮的路程為 96 公里，若顯示在右邊的地圖上是多少公分？

補給站 地圖上的比例尺

社會

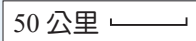
比例尺表示地圖與實際距離的比例關係。例如：臺灣第一條高速公路—國道 1 號，在臺中交流道至臺南仁德交流道的實際路程為 150 公里，但在地圖上的路徑長為 3 公分（如下圖），因此地圖上的距離與實際的距離比為



3 公分：150 公里 = 3 公分：15000000 公分，其中

3 公分：15000000 公分的比值為 $\frac{3}{15000000} = \frac{1}{5000000}$ ，

這表示地圖上的 1 公分，實際距離是 5000000 公分（即 50 公里），其中 $\frac{1}{5000000}$ 就是此地圖的比例尺，

可以用 1：5000000 表示或圖示為 。

例12 比例的應用

自評 P117 第 8 題

班上原來女生與男生的人數比是 $2:3$ 。如果有 2 位男同學轉到他校，此時女生與男生的人數比是 $3:4$ ，則班上原來的女生與男生各有多少人？

解 設班上原有女生 $2r$ 人，男生 $3r$ 人， $r \neq 0$ 。

依題意可得

$$2r : (3r - 2) = 3 : 4$$

$$8r = 9r - 6$$

$$r = 6$$

因此班上原來的女生有 $2r = 2 \times 6 = 12$ (人)，

男生有 $3r = 3 \times 6 = 18$ (人)。

**隨堂練習**

今年敬宇與父親的年齡比是 $1:3$ ，若 7 年後敬宇與父親的年齡比是 $3:7$ ，則敬宇今年幾歲？



水質檢驗



飲用水中的重金屬如果過量，會對身體造成危害，例如：若鉛含量超標，長期飲用恐造成心血管疾病或慢性腎臟病。環保署為了維護民眾用水安全，在 106 年 9 月公布了「保護人體健康的環境基準」，其中重金屬的基準值如下表：

水質項目	重金屬										
	銅	鉛	六價鉻	砷	總汞	硒	銅	鋅	錳	銀	鎳
基準值 (毫克 / 公升)	0.005	0.01	0.05	0.05	0.001	0.01	0.03	0.5	0.05	0.05	0.1

若技術人員在某自來水廠抽驗 600 毫升的自來水得到 0.008 毫克的鉛，對照上表，則這次的抽驗鉛含量合格嗎？ (1 公升 = 1000 毫升)

設 600 毫升的自來水中鉛的容許量為 x 毫克，則

$$x : 600 = 0.01 : 1000$$

$$1000x = 600 \times 0.01$$

$$x = 0.006$$

因為 0.008 毫克超過容許量 0.006 毫克，所以此次抽驗鉛含量不合格。

Q 攝入過量的砷會對皮膚、神經系統等造成危害，若技術人員在某自來水廠抽驗 600 毫升的自來水得到 0.02 毫克的砷，對照上表，則這次的抽驗砷含量合格嗎？(1 公升 = 1000 毫升)



重點回顧

1 比的前項、後項與比值

a 、 b 兩數的比記為 $a:b$ ，則(1) a 稱為比的前項， b 稱為比的後項。

(2) $a:b$ 的比值為 $\frac{a}{b}$ ，即 $a \div b$ 的值 ($b \neq 0$)。

(3)若 $a \div b = k$ ，表示 a 是 b 的 k 倍。

例 $3:7$ 的前項是 3，後項是 7，比值是 $\frac{3}{7}$ ，表示 3 是 7 的 $\frac{3}{7}$ 倍。

2 相等的比

比值相等的兩個比稱為相等的比。

例 $6:10$ 與 $9:15$ 的比值皆為 $\frac{3}{5}$ ，可稱這兩個比為相等的比，
記為 $6:10=9:15$ 。

3 最簡整數比

一個比如果前項、後項都是整數，且此兩個整數的絕對值互質，這個比就稱為最簡整數比。**例** $8:5$ 是最簡整數比， $6:8$ 不是最簡整數比。

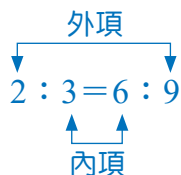
4 比例式

若 $a:b$ 和 $c:d$ 的比值相等，則 $a:b=c:d$ ，稱為比例式。其中， a 和 d 稱為比例式的外項， b 和 c 稱為比例式的內項。

5 外項乘積 = 內項乘積

比例式的外項乘積等於內項乘積，即若 $a:b=c:d$ ($b \neq 0, d \neq 0$)，

則 $a \times d = b \times c$ 。**例**



$$2 \times 9 = 3 \times 6$$

(外項乘積)(內項乘積)

6 比例式的運算性質

若 m 、 n 都是不為 0 的已知數，則下列三者有相同的意義：

$$(1) x:y=m:n \quad (2) \frac{x}{m} = \frac{y}{n} \quad (3) x=mr, y=nr, \text{ 其中 } r \neq 0.$$

例 下列三者有相同的意義：

$$(1) x:y=4:9 \quad (2) \frac{x}{4} = \frac{y}{9} \quad (3) x=4r, y=9r, \text{ 其中 } r \neq 0.$$





3-1 自我評量

① 求下列各比的比值：

課 P100 例 1

(1) $3\frac{1}{5} : (-4)$

(2) $9.1 : 3.9$

② 某球員在一季的籃球賽中，兩分球共投籃 1800 次，且投進 720 次，則兩分球的命中率是多少？（命中率＝投進次數與投球次數的比值，通常以百分率表示。）



課 P101 例 2

③ 求下列各比例式中 x 的值：

課 P105 例 4

(1) $24 : x = 2 : 7$

(2) $(x-1) : 3 = (x+1) : 6$

④ 已知 x 、 y 皆不為 0，且 $5x=2y$ ，求下列各比的最簡整數比：

課 P107 例 6

(1) $x : y$

(2) $(2x-3y) : (4x+y)$

- 5 已知 $(2x+3y):(x-y)=9:2$ ，求：

課 P107、108 例 7、8

(1) $x:y$ 的最簡整數比。

(2) 若 $x+2y=20$ ，則 $x、y$ 的值各是多少？

- 6 小明在 300 毫升的牛奶中放入 6 匙巧克力粉，調製成巧克力牛奶，他想調製一樣濃的巧克力牛奶跟家人分享，則要在 1000 毫升的牛奶中放入幾匙相同的巧克力粉呢？

課 P110 例 10

- 7 在比例尺 $1:500000$ 的地圖上，某市兩區公所的直線距離是 18 公分，則實際的直線距離是多少公里？(1 公里 = 1000 公尺；1 公尺 = 100 公分)

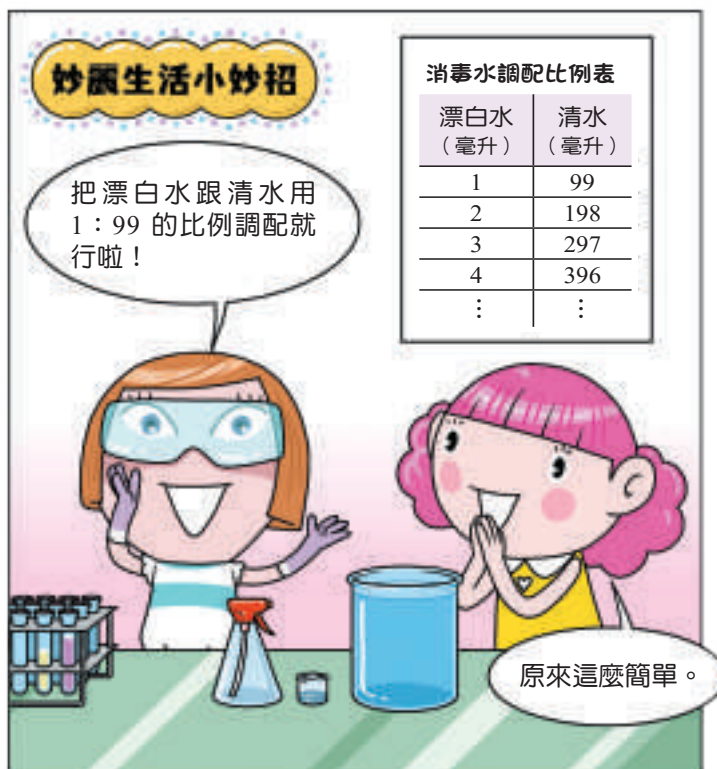
課 P111 例 11

- 8 已知某一節捷運車廂原本男生與女生的人數比為 $7:5$ ，抵達某站後，有 3 位男生上車，3 位女生下車，此時男生與女生的人數比為 $2:1$ ，則此節車廂現有多少人？

課 P113 例 12

3-2 正比與反比

① 正比



漫畫中，將漂白水與清水依 1 : 99 的比例調配消毒水，如下表：

漂白水 (毫升)	1	2	3	4	
清水 (毫升)	99	198	297	396	

Diagram illustrating the ratio progression: 1:99, 2:198, 3:297, 4:396. Arrows indicate the scaling factors: 2倍 (from 1 to 2), 3倍 (from 2 to 3), 4倍 (from 3 to 4).

漂白水與清水的比例為 $1 : 99 = 2 : 198 = 3 : 297 = 4 : 396 = \dots$ ，
 漂白水與清水的比值都是 $\frac{1}{99}$ ，其比值為一定數。

觀察表中，當漂白水的量變為原來的 2 倍、3 倍、4 倍、…… 時，清水的量也隨著變為原來的 2 倍、3 倍、4 倍、……，像這樣的情況，稱漂白水的量與清水的量**成正比**。

由於漂白水的量：清水的量 = 1 : 99，如果漂白水有 x 毫升，清水有 y 毫升，則 $x : y = 1 : 99$ ，也可以將關係式寫成 $y = 99x$ 。

正比

在 x 與 y 的關係中，當 x 改變時， y 也隨著改變，且 y 值恆為 x 值的 k 倍（ k 為固定的數， $k \neq 0$ ），此時 x 、 y 的關係式為 $y = kx$ （或 $\frac{y}{x} = k$ ），稱 y 和 x 成正比。

補給站 消毒漂白水



每當班上有人發燒超過 38°C ，學校就會通知該班用稀釋的漂白水消毒殺菌。依照衛福部疾管署的建議，腸病毒與諾羅病毒用稀釋的漂白水消毒殺菌，有效又方便，其他如肺炎黴漿菌、芽孢桿菌、念珠菌等常見的細菌也可以使用漂白水消毒殺菌。

如果市售漂白水的瓶蓋容量為 25 毫升，將 4 瓶蓋的漂白水加入一桶水調製成 10000 毫升的消毒水，像這樣將漂白水以「漂白水：清水 = 1 : 99」的比例稀釋，除了漂白水氣味較淡，也能達到更好的消毒殺菌效果。稀釋的時候，建議要戴上膠質手套和口罩，不要直接接觸或吸入。另外，稀釋時不可以使用熱水，也不要任意加入其他化學物質，以避免產生其他不良的化學反應。



例1 正比的判別

已知一瓶礦泉水售價 20 元，回答下列問題：

(1) 若買 2 瓶、3 瓶、4 瓶，則各需多少元？完成下表，並寫出 x 、 y 的關係式。

數量 x (瓶)	1	2	3	4
費用 y (元)	20			

(2) y 和 x 是否成正比？

解

(1)

數量 x (瓶)	1	2	3	4
費用 y (元)	20	40	60	80

由上表可知 x 、 y 的關係式為 $y=20x$ 。

(2) 因為 x 、 y 的關係式為 $y=20x$ ，所以 y 和 x 成正比。

當 y 值是 x 值的固定倍數，
稱 y 和 x 成正比。



隨堂練習

已知超商影印 A4 文件每張 3 元，回答下列問題：

(1) 若影印 3 張、5 張、7 張、9 張，則各需多少元？

完成下表，並寫出 x 、 y 的關係式。

數量 x (張)	1	3	5	7	9
費用 y (元)	3				

(2) y 和 x 是否成正比？

例2 判別兩數量是否成正比

1. 雅芬騎自行車，平均以每分鐘 200 公尺的速率前進，當騎車的時間為 x 分鐘時，前進距離 y 公尺，則 y 和 x 是否成正比？
2. 裕欣百貨公司舉行周年慶，HL 牛仔褲以定價打 6 折後又優待 50 元出售。已知一件定價 x 元的牛仔褲售價 y 元，則 y 和 x 是否成正比？

解

1. 因為距離 = 速率 $\times$ 時間，故 x 、 y 的關係式為 $y = 200x$ ，

所以 $\frac{y}{x} = 200$ ，其中 y 恆為 x 的 200 倍，故 y 和 x 成正比。

2. 由題意可得，售價 = 定價打 6 折再減 50 元，

故 x 、 y 的關係式為 $y = \frac{60}{100}x - 50$ 。

當 $x = 600$ 時， $y = \frac{60}{100} \times 600 - 50 = 310$ ， $\frac{y}{x} = \frac{310}{600}$ ；

當 $x = 700$ 時， $y = \frac{60}{100} \times 700 - 50 = 370$ ， $\frac{y}{x} = \frac{370}{700}$ ，

因為 $\frac{310}{600}$ 與 $\frac{370}{700}$ 不相等，所以 x 、 y 不能滿足 y 恆為 x 的 k 倍 ($k \neq 0$)，

故 y 和 x 不成正比。



隨堂練習

自評 P133 第 5 題

1. 阿德到水果攤買橘子，已知橘子每斤 20 元。如果橘子的重量為 x 斤時，總價為 y 元，則：
 - (1) x 和 y 的關係式為_____。
 - (2) y 和 x 是否成正比。□是 □否
2. 已知橘子每斤 20 元，祐祐買了 x 斤的橘子，又加購 60 元的籃子裝水果，總價為 y 元，則：
 - (1) x 和 y 的關係式為_____。
 - (2) y 和 x 是否成正比。□是 □否



例3 正比關係

自評 P132 第 1 題

已知 y 和 x 成正比，且 $x=2$ 時， $y=-6$ 。

(1) 求 x 、 y 的關係式。

(2) 當 $y=2$ 時， x 是多少？

解 (1) 因為 y 和 x 成正比，所以 $y=kx$ (k 為固定數， $k \neq 0$)，

將 $x=2$ 、 $y=-6$ 代入 $y=kx$ ，

可得 $-6=k \times 2$

$$k = -3$$

因此 x 、 y 的關係式為 $y = -3x$ 。

(2) 當 $y=2$ 時，代入關係式 $y = -3x$ ，

可得 $2 = -3x$ ， $x = -\frac{2}{3}$ 。

**隨堂練習**

已知 y 和 x 成正比，且 $x=5$ 時， $y=8$ 。

(1) 求 x 、 y 的關係式。

(2) 當 $x=3$ 時， y 是多少？

**Thinking**

回答下列問題：

(1) 已知 y 與 x 成正比，那麼當 x 的值變得愈大時， y 的值是否也隨著變大？

(2) 當 x 的值變得愈大時， y 的值也隨著變大，則 y 和 x 是否一定成正比？

例4 正比的應用

已知製作雞蛋糕時，500 公克的麵粉要加入 300 公克的細糖。為了維持相同的甜度，需讓麵粉的重量和細糖的重量成正比。

(1) 若 x 公克的麵粉需加入 y 公克的細糖，寫出 x 、 y 的關係式。

(2) 400 公克的麵粉需加入多少公克的細糖？

解 (1) 因為麵粉的重量和細糖的重量成正比，所以可設 $y=kx$ ， $k \neq 0$ 。

已知 $x=500$ 時， $y=300$ ，代入 $y=kx$ ，則

$$300=500k$$

$$k=\frac{3}{5}$$

所以 x 、 y 的關係式為 $y=\frac{3}{5}x$ 。

(2) 當 $x=400$ 時，代入 $y=\frac{3}{5}x$ ，

$$\text{可得 } y=\frac{3}{5} \times 400=240，$$

所以 400 公克的麵粉需加入 240 公克的細糖。



隨堂練習

已知艾美做 Q 梅時，10 斤的梅子要加入 5 斤的冰糖。為了維持相同的甜度，需讓梅子的重量和冰糖的重量成正比。

(1) 若 x 斤的梅子需加入 y 斤的冰糖，寫出 x 、 y 的關係式。

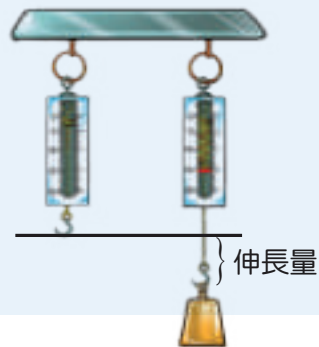
(2) 35 斤的梅子需加入多少斤的冰糖？



例5 物重與彈簧秤伸長量的關係

自評 P132 第 2 題

已知彈簧秤在彈性限度（可正確秤得的最大重量）內，所掛物體的重量與彈簧伸長量成正比。假設一彈簧秤的彈性限度為 40 公克，已知秤 15 公克重的物體時，彈簧的伸長量是 2 公分，則此彈簧秤秤 9 公克重的物體時，彈簧的伸長量是多少公分？



解一 設秤 9 公克重的物體時，
彈簧的伸長量為 x 公分。

$$15 : 9 = 2 : x$$

$$15x = 18$$

$$x = \frac{6}{5} = 1.2$$

所以秤 9 公克重的物體，
彈簧伸長量為 1.2 公分。

甲物重：乙物重
= 秤甲物時的伸長量：
秤乙物時的伸長量

解二 在彈性限度內，所掛物重 y 公克時，
彈簧的伸長量是 x 公分，

此時 y 和 x 成正比，

因此可設 $y = kx$ ， $k \neq 0$ 。

已知 $y = 15$ 時， $x = 2$ ，

代入 $y = kx$ 得 $k = \frac{15}{2}$ ，

因此 x 、 y 的關係式為 $y = \frac{15}{2}x$ 。

當 $y = 9$ 時，代入 $y = \frac{15}{2}x$ ，

可得 $9 = \frac{15}{2}x$ ， $x = \frac{6}{5} = 1.2$

所以秤 9 公克重的物體時，
彈簧的伸長量是 1.2 公分。

隨堂練習

已知物體在火星上的重量與在地球上的重量成正比。一個在地球上重量 60 公斤重的人，在火星上的重量約是 24 公斤重，則在地球上重量 900 公斤重的火星探測車「好奇號」，在火星上的重量約是多少公斤重？



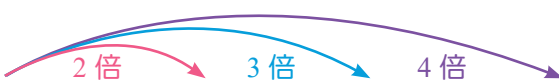
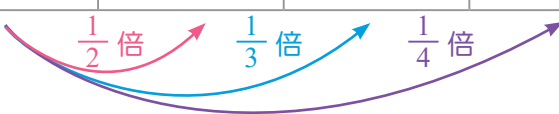
② 反比



漫畫中，最後妙麗用水管接水注滿游泳池，水管每分鐘的流量與注滿所需的時間如下：

- (1) 每分鐘 5 公升時，需要 144 分鐘；
- (2) 每分鐘 10 公升時，需要 72 分鐘；
- (3) 每分鐘 15 公升時，需要 48 分鐘；
- (4) 每分鐘 20 公升時，需要 36 分鐘；……。

水管每分鐘的流量為 x 公升時，注滿所需的時間為 y 分鐘。列表如下：

					
流量(x 公升 / 分)	5	10	15	20	
時間(y 分)	144	72	48	36	
					

當水管的流量由 5 公升變成 10 公升時，注滿所需的時間由 144 分鐘變成 72 分鐘，也就是當水管的流量變成 2 倍時，注滿所需的時間也隨著變成 $\frac{1}{2}$ 倍；同理，水管的流量變成 3 倍、4 倍、……時，注滿所需的時間也隨著變成 $\frac{1}{3}$ 倍、 $\frac{1}{4}$ 倍、……。

在上表中，我們也可以得到 x 、 y 的關係式為 $xy=720$ 。在這個關係式中， x 與 y 的乘積為一個固定的數 720，我們就稱 y 和 x **成反比**。

反比

在 x 與 y 的關係中，當 x 改變時， y 也隨著改變，且 x 與 y 的乘積為固定的數 k ($k \neq 0$)，此時 x 、 y 的關係式為 $xy=k$ (或 $y=k \times \frac{1}{x}$)，稱 y 和 x 成反比。

例6 反比的判別

已知某飲料工廠預計生產 24000 瓶的汽水，若每小時生產 1000 瓶，則需花 24 小時；若每小時生產 2000 瓶，則需花 12 小時；……。回答下列問題：

(1) 完成下表，並寫出 x 、 y 的關係式。

每小時 x 瓶	1000	2000	3000	4000	5000	6000
需花 y 小時	24	12				

(2) y 和 x 是否成反比？

解

(1)

每小時 x 瓶	1000	2000	3000	4000	5000	6000
需花 y 小時	24	12	8	6	4.8	4

由上表可知 x 、 y 的關係式為 $xy=24000$ 。

(2) 因為 x 與 y 的乘積為一個固定的數，所以 y 和 x 成反比。

隨堂練習

已知某織布工廠預計生產 480 匹布料，若每小時生產 30 匹布料，則需花 16 小時；若每小時生產 60 匹布料，則需花 8 小時；……。回答下列問題：

(1) 完成下表，並寫出 x 、 y 的關係式。

每小時 x 匹	30	60	120	240
需花 y 小時	16	8		

(2) y 和 x 是否成反比？

例 7 判別兩數量之間是否成反比

1. 小欣用邊長為 1 公分的小正方形，排成面積為 120 平方公分的長方形，如果長方形的長為 x 公分，寬為 y 公分，則 y 和 x 是否成反比？
2. 一天有 24 小時，分成白晝與黑夜，如果晝長 x 小時，夜長 y 小時，則 y 和 x 是否成反比？

- 解** 1. 由長方形面積 = 長 $\times$ 寬，可得長 $\times$ 寬 = 120，故 x 、 y 的關係式為 $xy = 120$ 。
其中， x 、 y 滿足乘積為固定的數，所以 y 和 x 成反比。
2. 因為晝長 x 小時 + 夜長 y 小時 = 24 小時，故 x 、 y 的關係式為 $x + y = 24$ 。
當 $x = 10$ 時， $y = 14$ ， x 、 y 的乘積 = $10 \times 14 = 140$ ；
當 $x = 11$ 時， $y = 13$ ， x 、 y 的乘積 = $11 \times 13 = 143$ ，
 x 、 y 不能滿足乘積為固定的數，所以 y 和 x 不成反比。

**隨堂練習**

自評 P133 第 5 題

1. 小明全家假日出遊，路程共 160 公里，如果爸爸開車平均時速 x 公里，共花了 y 小時到達目的地，則：
(1) x 、 y 的關係式為_____。
(2) y 和 x 是否成反比。☐是 ☐否
2. x 、 y 為任意兩個不為 0 的數，滿足 $x(y+1) = 9$ ，則 y 和 x 是否成反比。
☐是 ☐否

例8 反比關係

自評 P132 第3題

已知 y 和 x 成反比，且 $x=2$ 時， $y=6$ 。

(1) 求 x 、 y 的關係式。

(2) 當 $x=8$ 時， y 是多少？

解

(1) 因為 y 和 x 成反比，

所以可設 $xy=k$ ， $k \neq 0$ 。

將 $x=2$ 、 $y=6$ 代入 $xy=k$ ，

可得 $2 \times 6 = k$

$$k=12$$

因此 x 、 y 的關係式為 $xy=12$ 。

(2) 將 $x=8$ 代入 $xy=12$ ，

可得 $8y=12$

$$y = \frac{12}{8} \\ = \frac{3}{2}$$

**隨堂練習**

已知 y 和 x 成反比，且 $x=3$ 時， $y=-6$ 。

(1) 求 x 、 y 的關係式。

(2) 當 $y=2$ 時， x 是多少？

**Thinking**

回答下列問題：

(1) 已知 y 與 x 成反比，那麼當 x 的值變得愈大時， y 的值是否也隨著變小？

(2) 當 x 的值變得愈大時， y 的值隨著變小，則 y 和 x 是否一定成反比？

例9 反比關係的應用

自評 P133 第 4 題

已知路程固定時，汽車的車速與行車時間成反比。如果王老師每次開車回娘家所行駛的路程皆相同，當車速是每小時 80 公里時，行車時間是 1.5 小時。

- (1) 若王老師的車速是每小時 x 公里，行車時間是 y 小時，寫出 x 、 y 的關係式。
(2) 如果王老師的車速是每小時 100 公里，則王老師的行車時間是多少小時？

解 (1) 設 $xy = k$ ， $k \neq 0$ 。

將 $x = 80$ 、 $y = 1.5$ 代入 $xy = k$ ，

可得 $80 \times 1.5 = k$

$$k = 120$$

因此 x 、 y 的關係式為 $xy = 120$ 。

(2) 將 $x = 100$ 代入 $xy = 120$ ，

可得 $100y = 120$

$$y = 1.2$$

所以王老師的行車時間是 1.2 小時。

因為距離 = 時間 $\times$ 速率，
當路程固定時，汽車的車
速與行車時間成反比。

**隨堂練習**

已知體積相同的長方體，其底面積與高的數值成反比。如果長方體 A 、 B 的體積相同，且長方體 A 的底面積是 12 平方公分，高是 14 公分。

- (1) 假設長方體 B 的底面積是 x 平方公分，高是 y 公分，寫出 x 、 y 的關係式。
(2) 如果長方體 B 的底面積是 21 平方公分，則高是多少公分？



重點回顧

1 正比

在 x 與 y 的關係中，當 x 改變時， y 也隨著改變，且 y 值恆為 x 值的 k 倍（ k 為固定的數， $k \neq 0$ ），此時 x 、 y 的關係式為 $y=kx$ （或 $\frac{y}{x}=k$ ），稱 y 和 x 成正比。

例

漂白水(x 毫升)	1	2	3	4	
清水(y 毫升)	99	198	297	396	

Diagram illustrating the relationship between漂白水(x 毫升) and清水(y 毫升). The table shows that as x increases, y increases proportionally. Arrows indicate the multiplier for each step: from 1 to 2 (2 倍), from 2 to 3 (3 倍), and from 3 to 4 (4 倍). The corresponding values for y are 99, 198, 297, and 396, showing that y is always 99 times x .

x 、 y 的關係式為 $y=99x$ ， y 值恆為 x 值的 99 倍， y 和 x 成正比。

2 反比

在 x 與 y 的關係中，當 x 改變時， y 也隨著改變，且 x 與 y 的乘積為固定的數 k （ $k \neq 0$ ），此時 x 、 y 的關係式為 $xy=k$ （或 $y=k \times \frac{1}{x}$ ），稱 y 和 x 成反比。

例

流量(x 公升 / 分)	5	10	15	20	
時間(y 分)	144	72	48	36	

Diagram illustrating the relationship between流量(x 公升 / 分) and時間(y 分). The table shows that as x increases, y decreases proportionally. Arrows indicate the multiplier for each step: from 5 to 10 ($\frac{1}{2}$ 倍), from 10 to 15 ($\frac{1}{3}$ 倍), and from 15 to 20 ($\frac{1}{4}$ 倍). The corresponding values for y are 144, 72, 48, and 36, showing that xy is always 720.

x 、 y 的關係式為 $xy=720$ ， x 值和 y 值的乘積恆為固定的數 720， y 和 x 成反比。



3-2 自我評量

- ① 已知 y 和 x 成正比，且 $x=8$ 時， $y=48$ 。

課 P122 例 3

(1) 求 x 、 y 的關係式。

(2) 承(1)，完成下表。

x	8	9	10	11	12
y	48				

- ② 由實驗得知，某一個銅塊溫度升高攝氏 x 度與所需的熱量 y 卡成正比，若該銅塊
 溫度升高攝氏 2 度時，需要 0.92 卡的熱量，求：

(1) x 、 y 的關係式。

(2) 同樣的銅塊溫度升高攝氏 12 度需要多少卡的熱量？(可利用計算機計算)

課 P124 例 5

- ③ 已知 y 和 x 成反比，且 $x=8$ 時， $y=9$ 。

課 P129 例 8

(1) 求 x 、 y 的關係式。

(2) 承(1)，完成下表。

x	8	9	10	11	12
y	9				

- 4 假設某新產品在合理的定價時，其定價 x 萬元與銷售量 y 萬臺成反比，已知定價為 2 萬元時，新產品可銷售 32 萬臺，求：

(1) x 、 y 的關係式。

(2) 當定價為 1.6 萬時，新產品可銷售多少萬臺？

課 P130 例 9

- 5 列出下列各敘述的關係式，並判別 y 與 x 成正比或成反比。

課 P121、128 隨堂

(1) 文德想到國外玩，他以 y 元的臺幣換 x 元的美元，已知當天美元對臺幣的匯率是 1 : 29.732 (表示 1 元美元可換 29.732 元臺幣)，則：

① x 、 y 的關係式為_____。

② y 與 x 成正比或反比。□成正比 □成反比

(2) 福祐的媽媽在銀行存了 x 元，年利率為 1%，一年後得 y 元的利息，則：

① 由 1 年後的利息 = 存款 $\times$ 年利率，求 x 、 y 的關係式為_____。

② y 與 x 成正比或反比。□成正比 □成反比

(3) 有一個容積為 4 公升的長方體水槽，每分鐘注水 x 公升，經 y 分鐘注滿，則：

① x 、 y 的關係式為_____。

② y 與 x 成正比或反比。□成正比 □成反比



自我挑戰

本單元為統整課程，由學生自行挑戰，教師可視班級情況決定如何運用。



雅雅與樂樂計畫出國旅行，樂樂到韓國玩準備了臺幣 40000 元當旅費，雅雅到美國玩準備了臺幣 50000 元當旅費。如果她們到不需手續費的銀行換匯，請回答下列問題：

幣別	匯率
 韓元 KRW	0.02997
 美元 USD	29.732

- (1) 樂樂到銀行將臺幣換成韓元，若當天的現金匯率是 1 韓元換臺幣 0.02997 元，則臺幣 40000 元可以換成多少韓元？(可利用計算機計算，以元為單位四捨五入)

解

- (2) 雅雅到銀行將臺幣換成美元，若當天的現金匯率是 1 美元換臺幣 29.732 元，則臺幣 50000 元可以換成多少美元？不足 1 美元部分則找回臺幣，則雅雅可拿回多少臺幣？(可利用計算機計算，以元為單位四捨五入)

解

範例

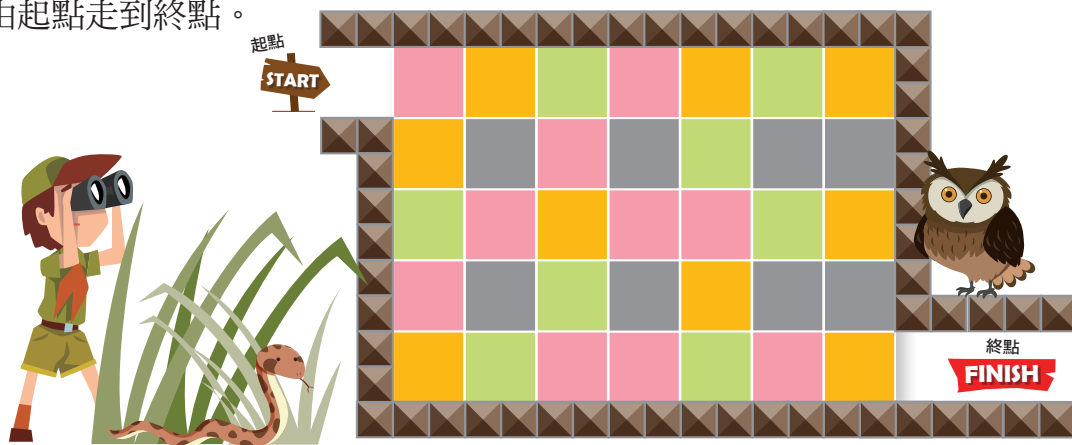
如果計算的結果為 103.235 ...，則整數部分 103 元換成美元，剩下部分找回臺幣。



本單元為配合此章所設計的趣味問題，由學生自行練習，教師可視班級情況而自行決定如何運用。

① 配合 3-1

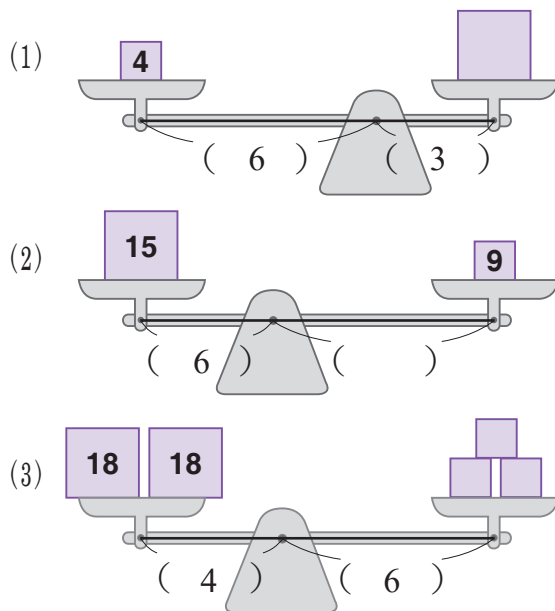
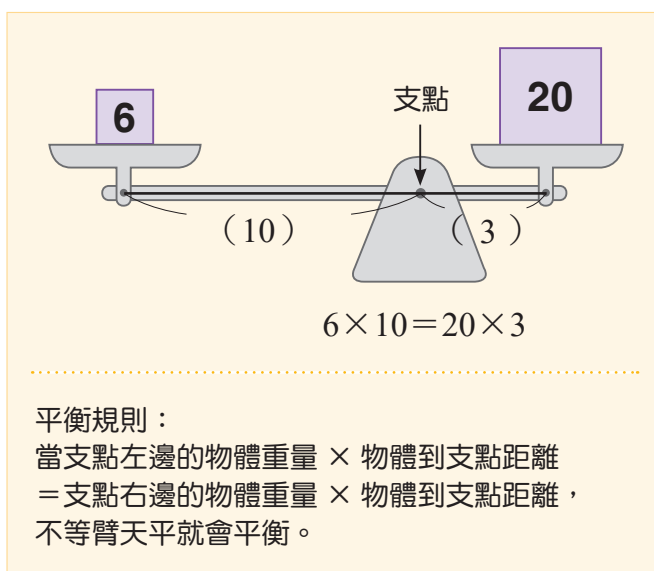
小傑正在玩彩色迷宮遊戲，在地圖中，他按照       的規律，由起點走到終點。



若他走的路徑是正確的，則(通過的  個數):(通過的  個數)=1:1；
(通過的  個數):(通過的  個數)= : 。

2 配合 3-2

已知  內的數代表物體的重量，() 內的數代表物體到支點的距離。請在右列各圖的  或 () 中，填入正確的數，使得不等臂天平皆會平衡。





臺灣螺絲NO.1 國際

臺灣有「螺絲王國」的美譽，高雄岡山更有「螺絲窟」之稱。我們平時所使用的鐘錶、眼鏡、馬桶等，螺絲都扮演著重要的角色。

近年國內業者更將這些產品投入到航太、汽車及醫療應用領域，也因此創造出產值與出口雙贏。在高雄岡山有一座臺灣螺絲博物館，館內介紹了各式的螺絲與其歷史。

在螺絲的製造過程中，廠商都以提升產品的良率（良品產出率）為努力的目標，所謂良率就是（合格產品的數量）：（全部產品的數量）的比值。

例如光強公司出產的螺絲中，檢驗員在生產線上取得 5 組產品，每一組有 100 個，發現不合格的產品數如下表：

組別	第一組	第二組	第三組	第四組	第五組
不合格數	2	1	4	3	2



從上面的資料可知，共取出 500 個螺絲，其中不合格的螺絲有 $2 + 1 + 4 + 3 + 2 = 12$ （個），所以合格的螺絲有 $500 - 12 = 488$ （個）。

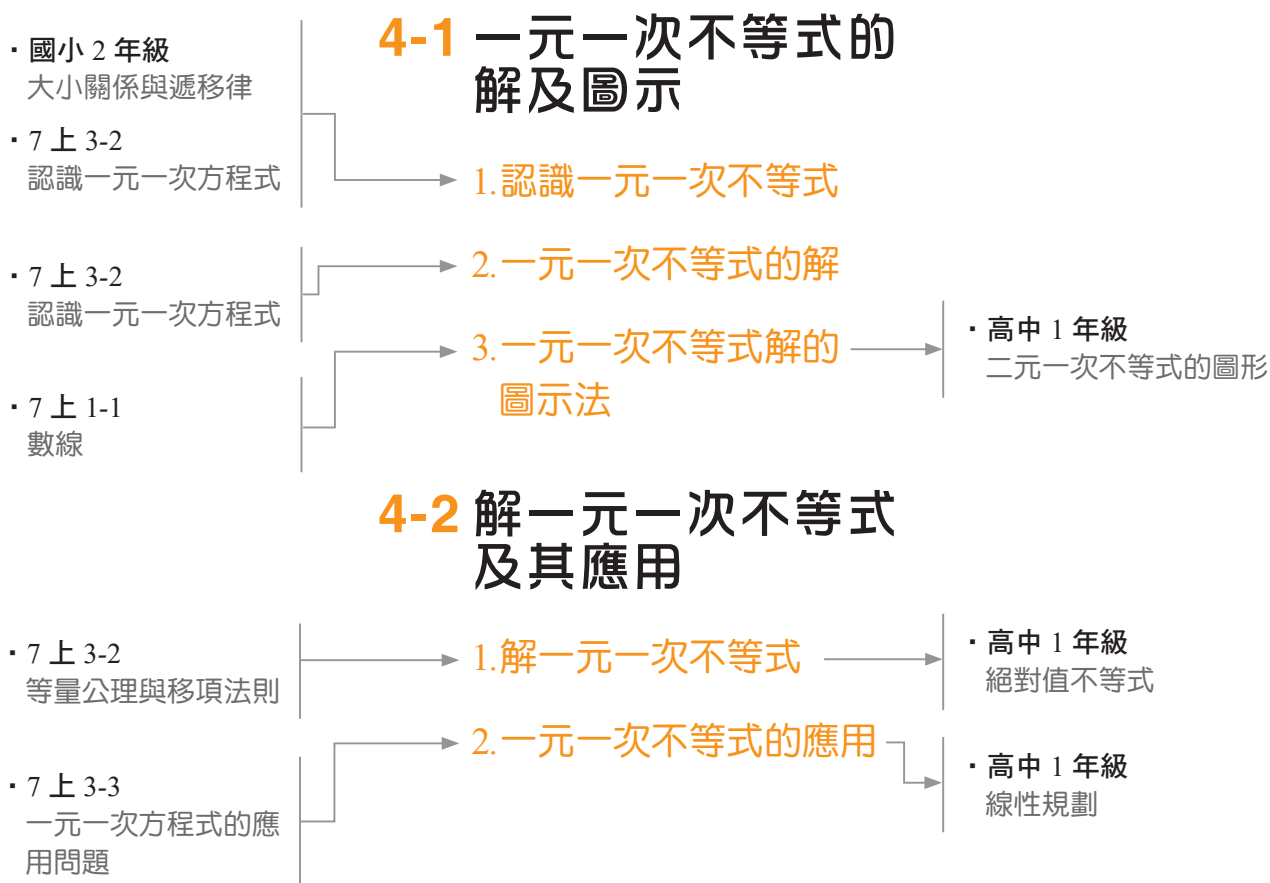
488：500 的比值為 $\frac{488}{500} = 97.6\%$ ，故此批螺絲的良率為 97.6%。

如果當天生產 200000 個同樣的螺絲，以 97.6% 的良率來計算，則當天產出 $200000 \times 97.6\% = 195200$ 個合格的螺絲。



4

一元一次不等式



在生活中常會遇到某些不相等的關係，例如：遊樂園售票處的年齡限制、遊樂設施的身高限制等。

上學期已學過用一元一次方程式表示生活中兩數量之間的相等關係，本章則要學習如何用一元一次不等式表示兩數量之間的不等關係，並以解決生活中的數量問題。





學習前哨站

本單元為學生自我複習，
教師可視班級情況決定如何運用。



回顧 1 解一元一次方程式

7 上第 3 章

$$\begin{aligned}
 7x + 1 &= 4x - 5 \\
 7x - 4x &= -5 - 1 \\
 3x &= -6 \\
 x &= -2
 \end{aligned}$$

等號兩邊同除以 3



課前練習

解下列各一元一次方程式：

(1) $5x - 4 = 17 + 2x$, $x =$ _____。 (2) $2(x - 1) = -3x + 1$, $x =$ _____。

回顧 2 列一元一次方程式

7 上第 3 章

開學時，爸爸到銀行繳鈺凱和鈺緹的學費。若鈺緹的學費為 x 元，且鈺凱的學費是鈺緹的 5 倍多 100 元，則鈺凱的學費為 $(5x + 100)$ 元。

如果爸爸共付了 1300 元，則可列出一元一次方程式 $x + (5x + 100) = 1300$ 。



課前練習

玲惠到文具店影印，每張紙的影印費是 2 元，封面裝訂費用是 50 元。

(1) 如果玲惠影印了 x 張紙，並裝訂封面，則她一共付了 _____ 元。

(以含 x 的式子表示)

(2) 承(1)，已知玲惠一共付了 290 元，可列出 x 的一元一次方程式：

_____。

$$062 = 05 + x2(2) \quad 05 + x2(1) 2 \quad \frac{5}{3} (2) 2(1) 1 : \text{昱揚}$$

4-1 一元一次不等式的解及圖示

① 認識一元一次不等式

在上學期曾經學過一元一次方程式，本章將學習一元一次不等式，並應用到實際生活上。

炳聰和天佑的身高分別為 a 公分及 b 公分，當比較兩人身高時，可能炳聰比天佑高 ($a > b$)，也可能兩人一樣高 ($a = b$)，或炳聰比天佑矮 ($a < b$)，這三種情形恰好有一種會成立。也就是說，比較 a 、 b 兩數的大小關係時， $a > b$ 、 $a = b$ 、 $a < b$ 這三種情形恰好有一種情況會成立。

在前面的漫畫中，雲霄飛車的乘坐限制為身高低於 140 公分不可以玩，威利的身高為 x 公分，安琪的身高為 y 公分。



我的身高不低於 140 公分，我可以去玩。

不低於 140 公分，表示 $x > 140$ 或 $x = 140$ 都可能成立。將「 $x > 140$ 或 $x = 140$ 」合併記作「 $x \geq 140$ 」，讀作「 x 大於或等於 140」。



我的身高低於 140 公分，我不可以去玩...

低於 140 公分，表示 $y < 140$ ，讀作「 y 小於 140」。

數學符號 $>$ 、 $<$ 、 $\geq$ 、 $\leq$ 與 $\neq$ 都稱為**不等號**。含有不等號的式子，稱為**不等式**。例如： $x \geq 140$ 、 $y < 140$ 皆為不等式。



例 1 列不等式

自評 P152 第 1 題

將下列各敘述列成不等式：

(1) $2x$ 大於 18(2) $3y$ 比 5 小(3) $2x-3$ 不大於 6(4) $4y+1$ 不小於 7**解** (1) $2x > 18$ 。(2) $3y < 5$ 。(3) 不大於 6，表示小於 6 或等於 6，
所以 $2x-3 \leq 6$ 。(4) 不小於 7，表示大於 7 或等於 7，
所以 $4y+1 \geq 7$ 。 **隨堂練習**

將下列各敘述列成不等式：

(1) $4x$ 小於 3.2(2) y 比 20 大(3) $5x+2$ 不小於 0(4) $y-1$ 不大於 3

在 **例 1** 與  **隨堂練習** 中，像 $2x > 18$ ， $3y < 5$ ， $4y+1 \geq 7$ ……，這些只含有一種未知數（一元），且其最高次方為一次的不等式，稱為**一元一次不等式**。

生活中常須比較某些事物的大小關係，所以經常會使用到不等式，然而在日常用語中，並不一定會直接以「大於」、「小於」、「大於或等於」、……來描述，有時會以它們的同義詞來表達。下表列出不等號的讀法及一些常見的同義詞：

符號	讀法	同義詞舉例
$>$	大於	超過，高於，逾
$<$	小於	不足，不滿，未滿，不到，低於
$\geq$	大於或等於	不小於，不低於，至少，以上(含)
$\leq$	小於或等於	不大於，不超過，不高於，至多，以下(含)，不逾
$\neq$	不等於	不相等，相異，非

例 2 依情境列出不等式

自評 P152 第 1 題

宏仁與媽媽上市場買了 100 元的牛肉及每公斤 200 元的蝦子 x 公斤，且所用去的錢不超過 500 元。依據上述的情形列出一元一次不等式。

解 100 元的牛肉及每公斤 200 元的蝦子 x 公斤，
 一共用去了 $(100 + 200x)$ 元，
 因為所用去的錢不超過 500 元，
 因此可列出不等式 $100 + 200x \leq 500$ 。

隨堂練習

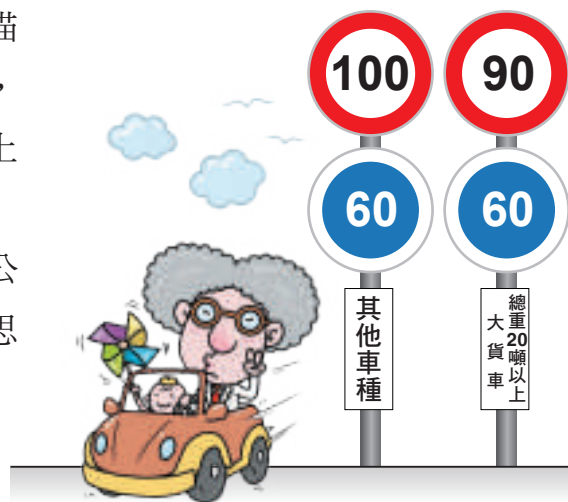
阿超帶 200 元到水果行買了每顆 25 元的蘋果 x 顆，結帳時發現忘了帶環保購物袋，所以又花了 2 元購買一個塑膠袋，假如他買完後還剩下一些錢，依據上述的情形列出一元一次不等式。



解答：猜拳的時候（石頭贏剪刀，剪刀贏布）。

日常生活中也會碰到有上下範圍的情境描述，例如：右圖是高速公路的速限交通標誌，從圖中可知小客車的時速必須在 60 公里以上（含），但不可以超過 100 公里。

已知博士在高速公路開車的時速為 x 公里，若符合速限要求，則「 $60 \leq x \leq 100$ 」，意思是說「 $60 \leq x$ 」和「 $x \leq 100$ 」同時成立。



例 3 依情境列出不等式

自評 P152 第 2 題

博士帶孫子去太平山坐蹦蹦車：

- (1) 若博士的年齡是 x 歲，購買全票乘坐，試以不等式表示 x 的範圍。
- (2) 若孫子的年齡是 y 歲，購買優待票乘坐，試以不等式表示 y 的範圍。

票種	票價	適用對象
全票	180 元	13 歲以上(含)~未滿 65 歲者。
優待票	120 元	① 3 歲以上(含)~未滿 13 歲者。 ② 65 歲以上者(含)。
免票	0 元	① 未滿 3 歲者，需由購票大人陪同。 ② 身心障礙易辨識或持有身障手冊者，及其必要陪伴者一人。

- 解**
- (1) 依據題意，博士購買全票乘坐，所以 $13 \leq x < 65$ 。
 - (2) 依據題意，孫子購買優待票乘坐，所以 $3 \leq y < 13$ 。



隨堂練習

依據兒童及少年福利法規定：

本法所稱兒童及少年，指未滿十八歲之人；所稱兒童，指未滿十二歲之人；所謂少年，指十二歲以上未滿十八歲之人。

若妙麗今年的年齡是 x 歲，且符合上述少年的規定，試以不等式表示 x 的範圍。



健體 舉重級別

郭婞淳是國際知名舉重選手，在 2020 東京奧運，以抓舉 103 公斤、挺舉 133 公斤，總和 236 公斤 3 項創奧運紀錄，為臺灣拿下 1 面女子 59 公斤級的金牌。

目前在國際比賽和奧運會比賽中女子舉重的體重級別畫分如下表：

級別	體重
49 公斤級	體重 ≤ 49 公斤
55 公斤級	$49 \text{ 公斤} < \text{體重} \leq 55 \text{ 公斤}$
59 公斤級	$55 \text{ 公斤} < \text{體重} \leq 59 \text{ 公斤}$
64 公斤級	$59 \text{ 公斤} < \text{體重} \leq 64 \text{ 公斤}$
76 公斤級	$64 \text{ 公斤} < \text{體重} \leq 76 \text{ 公斤}$
87 公斤級	$76 \text{ 公斤} < \text{體重} \leq 87 \text{ 公斤}$
+87 公斤級	體重 > 87 公斤



Q 妙麗的體重是 60 公斤，若她參加比賽，則為哪一個級別？

Q 設艾美的體重是 x 公斤，參加 55 公斤級的比賽，試以不等式表示 x 的範圍。

② 一元一次不等式的解

如果將一個數代入不等式中的未知數，可使得不等式成立，則這個數稱為此不等式的一個解。例如：

要判別 1、2、3 是否為不等式 $100 + 200x \leq 500$ 的解，分別將此三個數代入，可以發現：

$100 + 200 \times 1 = 300 < 500$ ，所以 $x = 1$ 時， $100 + 200x \leq 500$ 成立。

$100 + 200 \times 2 = 500$ ，所以 $x = 2$ 時， $100 + 200x \leq 500$ 成立。

$100 + 200 \times 3 = 700 > 500$ ，所以 $x = 3$ 時， $100 + 200x \leq 500$ 不成立。

因此，1 與 2 都是不等式 $100 + 200x \leq 500$ 的解。

例 4 判別不等式的解

自評 P153 第 3 題

下列哪些是不等式 $3x - 4 \geq 5$ 的解？

(1) 2

(2) 3

(3) $3\frac{1}{2}$

解 (1) 將 $x = 2$ 代入 $3x - 4$ 可得 $3 \times 2 - 4 = 2 < 5$ ，

所以 2 不是 $3x - 4 \geq 5$ 的解。

(2) 將 $x = 3$ 代入 $3x - 4$ 可得 $3 \times 3 - 4 = 5$ ，

所以 3 是 $3x - 4 \geq 5$ 的一個解。

(3) 將 $x = 3\frac{1}{2}$ 代入 $3x - 4$ 可得 $3 \times 3\frac{1}{2} - 4 = 6\frac{1}{2} > 5$ ，

所以 $3\frac{1}{2}$ 是 $3x - 4 \geq 5$ 的一個解。

因此 3 和 $3\frac{1}{2}$ 都是不等式 $3x - 4 \geq 5$ 的解。

隨堂練習

下列哪些是不等式 $2x + 3 \leq 7$ 的解？

(1) -1

(2) 2

(3) 3.5

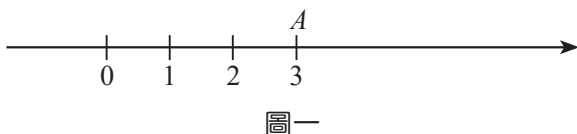
③ 一元一次不等式解的圖示法

由例4可知，3 和 $3\frac{1}{2}$ 都是不等式 $3x-4 \geq 5$ 的解，若將 4、5、6、…… 等數分別代入不等式 $3x-4 \geq 5$ 中，會發現這些數也都是不等式 $3x-4 \geq 5$ 的解。

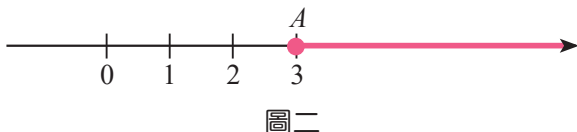
事實上，通常一元一次不等式的解可能不是只有一個，而是一個範圍，因此只要是大於或等於 3 的任何數，都會是不等式 $3x-4 \geq 5$ 的解，因此我們用「 $x \geq 3$ 」來表示不等式 $3x-4 \geq 5$ 的解。

为了方便表示一元一次不等式的解，也可以在數線上將解圖示出來。
例如圖示 $x \geq 3$ 的步驟如下：

步驟 1：先在數線上找出代表 3 的點，令其為 A 點，如圖一。

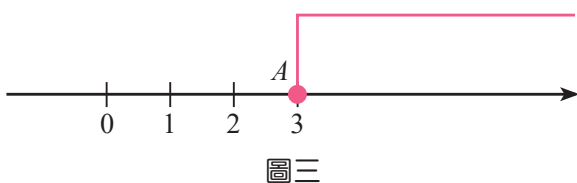


步驟 2： $x \geq 3$ 的圖形為「A 點及 A 點右邊所有點」所形成的圖形，因此將 A 點右側的數線加粗，如圖二。



因為 $x \geq 3$ 包含 $x=3$ ，因此 A 點以實心的圓點「●」表示。

为了方便繪製，不等式解的圖示也經常以圖三的方法表示：

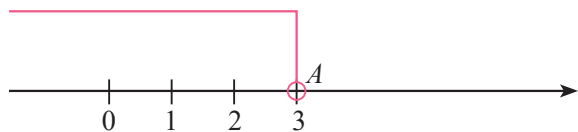


當解的範圍包含端點，
用實心「●」標示端點。



「將、士、象三人相約郊遊，士睡過頭，將、象就自己去玩了」，猜一個數學名詞。

如果要畫出 $x < 3$ 的圖形，因為數線上在 3 左邊的所有點都是小於 3 的數，而在 3 右邊的點皆為大於 3 的數，所以 $x < 3$ 的圖形為「A 點左邊所有點」所形成的圖形，如下圖。



當解的範圍不包含端點，
用空心「○」標示端點。



因為 $x < 3$ 不包含 $x = 3$ ，所以 A 點用空心的圓點「○」表示。

例 5 一元一次不等式的圖示法

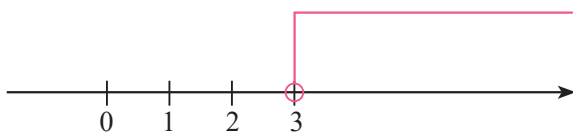
自評 P153 第 4 題

在數線上圖示下列各不等式：

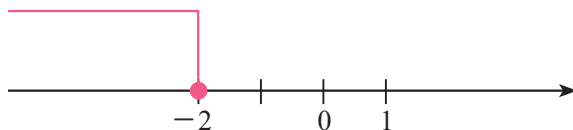
(1) $x > 3$

(2) $x \leq -2$

解 (1) 不等式 $x > 3$ 在數線上所形成的圖形，如下圖：



(2) 不等式 $x \leq -2$ 在數線上所形成的圖形，如下圖：

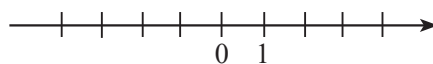
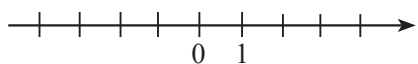


 隨堂練習

1. 在數線上圖示下列各不等式：

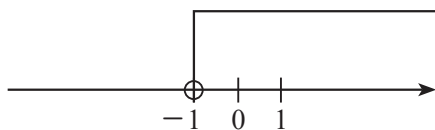
(1) $x < 2$

(2) $x \geq -3$



2. 寫出下列各圖示所表示的不等式：(以 x 的不等式表示)

(1)

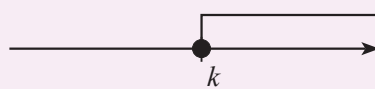


(2)

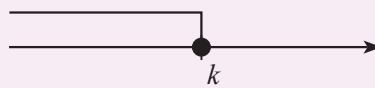


一元一次不等式的形式與圖示

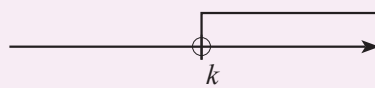
(1) $x \geq k$ 表示包含 k 和比 k 大的數都滿足不等式。



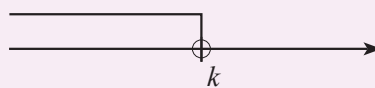
(2) $x \leq k$ 表示包含 k 和比 k 小的數都滿足不等式。



(3) $x > k$ 表示所有比 k 大的數都滿足不等式。

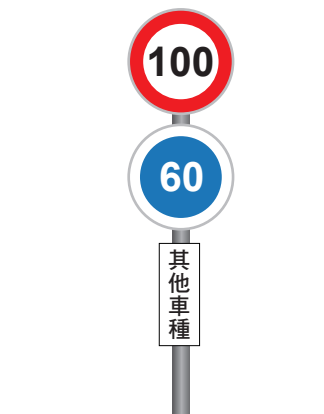


(4) $x < k$ 表示所有比 k 小的數都滿足不等式。



解答：不等式（不等式）。

在 144 頁曾提到有上下範圍的不等式，例如：小客車在高速公路的時速設為 x 公里，則「 $60 \leq x \leq 100$ 」，接下來將介紹有上下範圍不等式的圖示法。

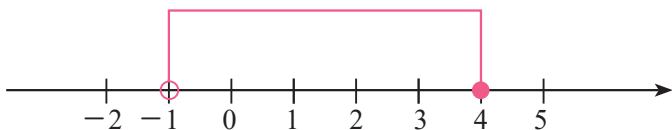


例 6 一元一次不等式的圖示法

自評 P153 第 5 題

在數線上圖示不等式 $-1 < x \leq 4$ 。

解 不等式 $-1 < x \leq 4$ 表示「 x 大於 -1 」且「 x 小於或等於 4 」。圖示如下：

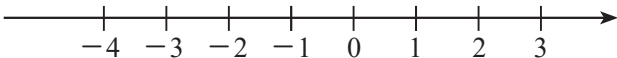


也可以圖示如下：



隨堂練習

在數線上圖示不等式 $-2 \leq x < 2$ 。





重點回顧

1 一元一次不等式

- (1) 在數學的符號中， $>$ 、 $<$ 、 $\geq$ 、 $\leq$ 與 $\neq$ 皆稱為不等號，而包含不等號的數學式子，稱為不等式。
- (2) 只含有一種未知數（一元），且最高次方為一次的不等式，稱為一元一次不等式。

例 $5x < -4$ 、 $\frac{3}{4}x - 6 \geq 2$ 皆為一元一次不等式。

2 一元一次不等式的解

- (1) 如果將一個數代入不等式中的未知數，可使得不等式成立，則這個數稱為此不等式的一個解。

例 $x = 1$ 是一元一次不等式 $2x + 5 > 1$ 的一個解。

- (2) 不等式的解可能不是只有一個，而是一個範圍，因此須呈現所有的解。

例 一元一次不等式 $2x + 5 > 1$ 的解為 $x > -2$ 。

3 一元一次不等式的形式與圖示

(1) $x \geq k$	表示包含 k 和比 k 大的數都滿足不等式。	
(2) $x \leq k$	表示包含 k 和比 k 小的數都滿足不等式。	
(3) $x > k$	表示所有比 k 大的數都滿足不等式。	
(4) $x < k$	表示所有比 k 小的數都滿足不等式。	

例 在數線上圖示 $x \geq -2$ 。



4-1 自我評量

① 依題意列出各不等式：

課 P142、143 例 1、2

(1) 惠雯帶 300 元去買文具，共花了 x 元，而剩下的錢不超過 50 元。

則可列出不等式_____。

(2) 超仁的身高是 160 公分，如果長高 x 公分後，就超過 180 公分。

則可列出不等式_____。

② 臺北捷運自 2020 年 2 月 1 日起，實施常客優惠方案，針對每個月乘坐次數給予不同的回饋比例，方案如下：

課 P144 例 3

當月回饋金 = 前月累計搭乘金額 $\times$ 現金回饋比例

現金回饋比例如下表：

前月累計搭乘次數	現金回饋比例	前月累計搭乘次數	現金回饋比例
10 次以下(含)	不回饋	31~40 次	20%
11~20 次	10%	41~50 次	25%
21~30 次	15%	51 次以上(含)	30%

(1) 若安琪於 2020 年 12 月的乘坐次數為 x 次，且其現金回饋比例為 20%，則 x 在下列哪一個範圍？

- (A) $11 \leq x \leq 20$ (B) $21 \leq x \leq 30$ (C) $31 \leq x \leq 40$ (D) $41 \leq x \leq 50$

(2) 若妙麗於 2020 年 11 月的乘坐次數為 16 次，累計金額為 500 元，則回饋金為多少？

- (A) 40 元 (B) 50 元 (C) 60 元 (D) 100 元

3 下列哪一個是不等式 $5x - 2 < 6$ 的解？

課 P146 例 4

(A) 1

(B) 2

(C) 3

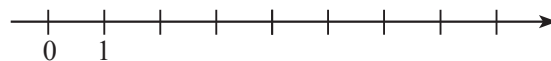
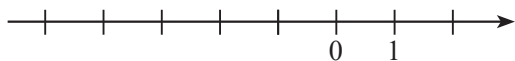
(D) 4

4 在數線上圖示下列各不等式：

課 P148 例 5

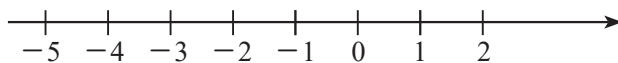
(1) $x > -3$

(2) $x \leq 6$



5 在數線上圖示不等式 $-4 \leq x < 1$ 。

課 P150 例 6



4-2 解一元一次不等式及其應用

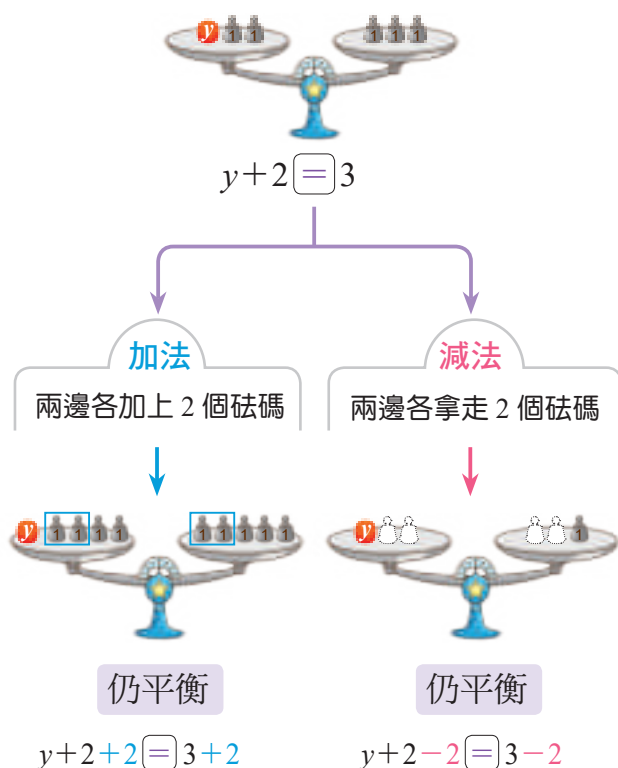
① 解一元一次不等式

我們曾利用等量公理與移項法則來解一元一次方程式，接下來將利用此概念來解一元一次不等式。

▶ 不等式的加減運算

等式

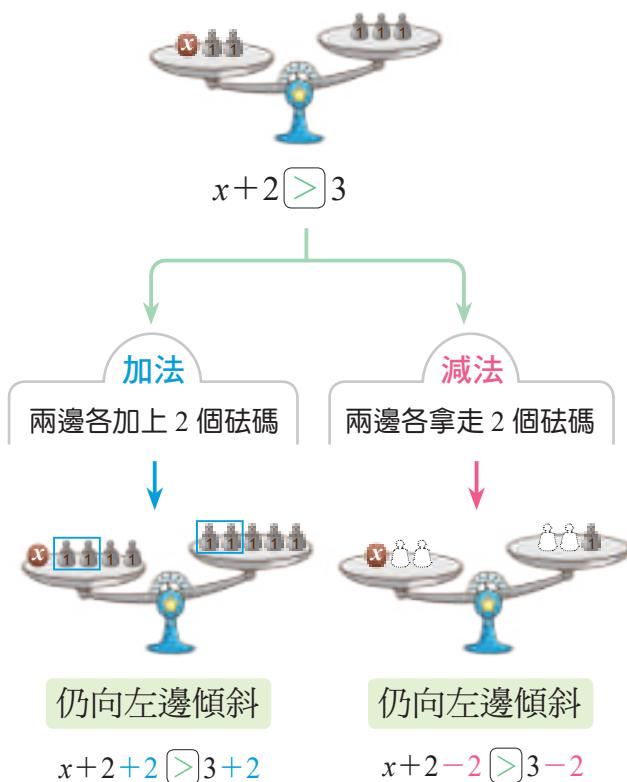
在天平的左右兩邊，分別放上巧克力（每塊 y 公克）與砝碼（每個 1 公克），天平剛好平衡。



兩邊同加（減）一個數，等號仍成立。

不等式

在天平的左右兩邊，分別放上巧克力（每塊 x 公克）與砝碼（每個 1 公克），因為左邊比較重，天平向**左邊**傾斜。



兩邊同加（減）一個數，大小關係不變。

由前面的說明可以得到，不等號的兩邊若同時加上或同時減去一個數，不等號的兩邊大小關係不變。

不等式的加減運算性質

將不等號的兩邊同時加上或減去一個數，其大小關係不變。

即如果 $a > b$ ， c 為任意數，則(1) $a + c > b + c$ ，

(2) $a - c > b - c$ 。

對於 $a < b$ 、 $a \geq b$ 或 $a \leq b$ 時，同時加（或減）任意數 c 後，不等號兩邊的大小關係仍然不變。

找出滿足一元一次不等式中所有解的過程，稱為解一元一次不等式。通常一元一次不等式的解可能不是只有一個，而是一個範圍，求解的時候須呈現不等式所有的解，我們以前頁天平為例，利用不等式的加減運算性質來比較方程式與不等式的解法。

解方程式

$$\begin{aligned} y + 2 &= 3 && \text{等號兩邊} \\ y + 2 - 2 &= 3 - 2 && \text{同減 2。} \\ y &= 1 \end{aligned}$$

解不等式

$$\begin{aligned} x + 2 &> 3 && \text{不等號兩邊} \\ x + 2 - 2 &> 3 - 2 && \text{同減 2。} \\ x &> 1 \end{aligned}$$

隨堂練習

在下列各小題中填入適當的不等號：

$$\begin{aligned} (1) \quad x - 4 &< 7 && \text{不等號兩邊} \\ x - 4 + 4 &< 7 + 4 && \text{同加 4。} \\ \text{即} \quad x &< 11 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad x + 2 &\geq -5 && \text{不等號兩邊} \\ x + 2 - 2 &\geq -5 - 2 && \text{同減 2。} \\ \text{即} \quad x &\geq -7 \end{aligned}$$

如同解方程式一樣，我們也可以利用移項法則解不等式，方法如下：

解方程式

$$\begin{aligned} y-2 &= -3 \\ y &= -3+2 \\ y &= -1 \end{aligned}$$

「-2」移到等號
另一邊變成「+2」。

解不等式

$$\begin{aligned} x-2 &< -3 \\ x &< -3+2 \\ x &< -1 \end{aligned}$$

「-2」移到不等號
另一邊變成「+2」。

不等式的移項法則

在不等式的運算中，將式子中的項從不等號的一邊移到另一邊時，須改變其運算符號，亦即 **+** 變成 **-**（**-** 變成 **+**）。

例 1 利用移項法則解不等式

自評 P172 第 1 題

利用移項法則解下列各不等式：

(1) $x+2 < -5$

(2) $x-3 \geq 10$

解 (1) $x+2 < -5$ ——— 「2」移到不等號另一邊變成「-2」
 $x < -5-2$
 得 $x < -7$

(2) $x-3 \geq 10$ ——— 「-3」移到不等號另一邊變成「+3」。
 $x \geq 10+3$
 得 $x \geq 13$

隨堂練習

利用移項法則解下列各不等式：

(1) $x-2 \geq 4$

(2) $x+3 < -5$

不等式的乘除運算

① 兩邊同乘或除以一個正數

在不等號的兩邊同乘或除以一個**正數**，兩邊的大小關係是否會改變？我們利用

 **探索活動** 來說明。

探索活動 不等號兩邊的大小關係

在下列空格中填入適當的不等號：

原不等式		新不等式
$11 > 4$	不等號的兩邊同乘以 4 	$11 \times 4 \underline{\hspace{1cm}} 4 \times 4$
$-7 < -2$		$-7 \times 4 \underline{\hspace{1cm}} -2 \times 4$
$8 > -12$	不等號的兩邊同除以 4 	$8 \div 4 \underline{\hspace{1cm}} -12 \div 4$
$-20 < -16$		$-20 \div 4 \underline{\hspace{1cm}} -16 \div 4$

由  **探索活動** 可發現：將不等號的兩邊同乘或除以一個正數，其大小關係不變。

不等式的乘除法運算性質一：不等號的兩邊同乘或除以一個正數

將不等號的兩邊同乘或除以一個正數，其大小關係不變。

即(1)當 $a > b$ 時，如果 $c > 0$ ，則 $a \times c > b \times c$ 。

(2)當 $a > b$ 時，如果 $c > 0$ ，則 $a \div c > b \div c$ ，即 $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$ 。

對於 $a < b$ 、 $a \geq b$ 或 $a \leq b$ 時，同乘或除以一個正數後，不等號兩邊的大小關係仍然不變。

隨堂練習

在下列各小題中填入適當的不等號：

(1) $2x > 6$  不等號的兩邊
 $x \underline{\hspace{1cm}} 3$  同時除以 2。

(2) $\frac{1}{2}x \leq -5$  不等號的兩邊
 $x \underline{\hspace{1cm}} -10$  同時乘以 2。

② 兩邊同乘或除以一個負數

在不等號的兩邊同乘或除以一個**負數**，兩邊的大小關係是否會改變？我們利用

 **探索活動** 來說明。

探索活動 不等號兩邊的大小關係

在下列空格中填入適當的不等號：

原不等式		新不等式
$11 > 4$	不等號的兩邊同乘以 -5 	$11 \times (-5) \underline{\hspace{1cm}} 4 \times (-5)$
$-7 < -2$		$-7 \times (-5) \underline{\hspace{1cm}} -2 \times (-5)$
$15 > -5$	不等號的兩邊同除以 -5 	$15 \div (-5) \underline{\hspace{1cm}} -5 \div (-5)$
$-40 < -20$		$-40 \div (-5) \underline{\hspace{1cm}} -20 \div (-5)$

由  **探索活動** 可發現：將不等號的兩邊同乘或除以一個負數，其大小關係相反。

不等式的乘除法運算性質二：不等號的兩邊同乘或除以一個負數

將不等號的兩邊同乘或除以一個負數，其大小關係相反。

即(1)當 $a > b$ 時，如果 $c < 0$ ，則 $a \times c < b \times c$ 。

(2)當 $a > b$ 時，如果 $c < 0$ ，則 $a \div c < b \div c$ ，即 $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$ 。

對於 $a < b$ 、 $a \geq b$ 或 $a \leq b$ 時，同乘或除以一個負數後，不等號兩邊的大小關係相反。

隨堂練習

在下列各小題中填入適當的不等號：

(1) $-2x > 6$  不等號的兩邊
 x  同除以 -2 。

(2) $-\frac{1}{2}x \leq -5$  不等號的兩邊
 x  同乘以 -2 。

例2 同乘或除以正數解不等式

自評 P172 第 1 題

解下列各不等式，並在數線上圖示其解：

(1) $\frac{1}{4}x \leq 1$

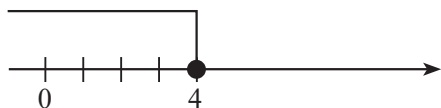
(2) $5x > 7$

解 (1) $\frac{1}{4}x \leq 1$ 同乘以 4 (正數)。

$$\frac{1}{4}x \times 4 \leq 1 \times 4$$

得 $x \leq 4$

其解圖示如下：

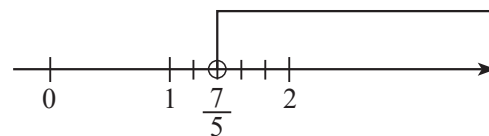


(2) $5x > 7$ 同除以 5 (正數)。

$$\frac{5x}{5} > \frac{7}{5}$$

得 $x > \frac{7}{5}$

其解圖示如下：



隨堂練習

解下列各不等式，並在數線上圖示其解：

(1) $\frac{1}{5}x \geq 0.4$

(2) $4x < -7$



例3 同乘或除以負數解不等式

自評 P172 第 1 題

解下列各不等式，並在數線上圖示其解：

(1) $-\frac{1}{3}x < 2$

(2) $-2x \geq 8$

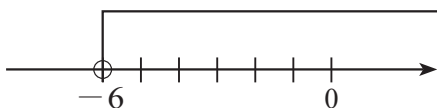
解 (1) $-\frac{1}{3}x < 2$

$(-\frac{1}{3}x) \times (-3) > 2 \times (-3)$

同乘以 -3 (負數)。

得 $x > -6$

其解圖示如下：



不等號的兩邊同乘以負數，
不等號兩邊的大小關係相反，
即「 $<$ 」變成「 $>$ 」。



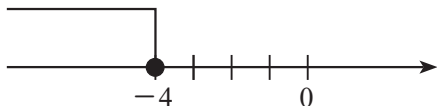
(2) $-2x \geq 8$

$\frac{-2x}{-2} \leq \frac{8}{-2}$

同除以 -2 (負數)。

得 $x \leq -4$

其解圖示如下：



不等號的兩邊同除以負數，
不等號兩邊的大小關係相反，
即「 $\geq$ 」變成「 $\leq$ 」。



隨堂練習

解下列各不等式，並在數線上圖示其解：

(1) $-\frac{3}{4}x > 2$

(2) $-3x \leq -12$



例4 等量運算與移項法則

自評 P172 第 1 題

解不等式 $7x - 5 \leq 5x + 1$ ，並在數線上圖示其解。

解

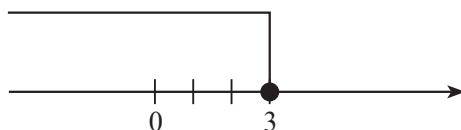
等量運算

$$\begin{aligned}
 7x - 5 &\leq 5x + 1 \\
 \downarrow \text{不等號的兩邊同減 } 5x \\
 7x - 5 - 5x &\leq 5x + 1 - 5x \\
 \downarrow \text{整理} \\
 2x - 5 &\leq 1 \\
 \downarrow \text{不等號的兩邊同加 } 5 \\
 2x - 5 + 5 &\leq 1 + 5 \\
 \downarrow \text{整理} \\
 2x &\leq 6 \\
 \downarrow \text{不等號的兩邊同除以 } 2 \\
 x &\leq 3
 \end{aligned}$$

移項法則

$$\begin{aligned}
 7x - 5 &\leq 5x + 1 \\
 \downarrow \text{移項} \\
 7x - 5x - 5 &\leq 1 \\
 \downarrow \text{整理} \\
 2x - 5 &\leq 1 \\
 \downarrow \text{移項} \\
 2x &\leq 1 + 5 \\
 \downarrow \text{整理} \\
 2x &\leq 6 \\
 \downarrow \text{不等號的兩邊同除以 } 2 \\
 x &\leq 3
 \end{aligned}$$

其解圖示如右：



隨堂練習

解下列各不等式，並在數線上圖示其解：

(1) $5x - 7 < 2x + 5$

(2) $6x + 11 \geq 2x + 3$



「聞×100<見×1」，猜一句六個字的成語。

例5 同乘或除以負數解不等式

自評 P172 第 2 題

解下列各不等式：

(1) $3x + 7 \leq 8x + 11$

(2) $-\frac{1}{2}x + 5 > 8 - \frac{1}{4}x$

解 (1) $3x + 7 \leq 8x + 11$

$3x - 8x \leq 11 - 7$

$-5x \leq 4$

得 $x \geq -\frac{4}{5}$ 同除以 -5 (負數)。

不等號的兩邊同除以負數，
則「 $\leq$ 」變成「 $\geq$ 」。

(2) $-\frac{1}{2}x + 5 > 8 - \frac{1}{4}x$ 同乘以 4。

$-2x + 20 > 32 - x$

$-2x + x > 32 - 20$

$-x > 12$

得 $x < -12$ 同乘以 -1 (負數)。

不等號的兩邊同乘以負數，
則「 $>$ 」變成「 $<$ 」。

隨堂練習

解不等式 $4x - 3 < 7x + 12$ 。

在不等式的解題過程中，通常會將含 x 的部分，全部移項至不等號的左邊，但有時也可以將含 x 的部分，全部移項至不等號的右邊，使得 x 項的係數為正。例如：

$$\begin{array}{lcl}
 3x + 7 \leq 8x + 11 & & \\
 \downarrow \quad \downarrow & \text{移項。} & \\
 -11 + 7 \leq 8x - 3x & & \\
 -4 \leq 5x & \text{使 } x \text{ 項係數為正。} & \\
 \text{即 } 5x \geq -4 & & \\
 \text{得 } x \geq -\frac{4}{5} & &
 \end{array}$$

隨堂練習

1. 在下列空格中填入適當的答案，完成不等式的解題：

$$\begin{array}{lcl}
 \text{解不等式} & 4x - 3 > 7x + 9 & \\
 \downarrow \quad \downarrow & & \\
 \text{移項可得} & -9 - 3 > 7x - \underline{\hspace{2cm}} & \\
 & -12 > \underline{\hspace{2cm}} & \\
 \text{即} & \underline{\hspace{2cm}} < -12 & \\
 \text{得} & x < \underline{\hspace{2cm}} &
 \end{array}$$

2. 解不等式 $8 > 2 + 3x$ 。



解答：百聞不如一見。

例6 展開後移項解不等式

自評 P172 第 2 題

解下列各不等式：

(1) $5(x+3) < 4(3x-1) + 5$

(2) $3(2x-1) - 4(x-2) \geq 8$

解

(1) $5(x+3) < 4(3x-1) + 5$

$$5x + 15 < 12x - 4 + 5$$

$$5x + 15 < 12x + 1$$

$$5x - 12x < 1 - 15$$

$$-7x < -14$$

得

$$x > 2$$

同除以 -7 (負數)。

(2) $3(2x-1) - 4(x-2) \geq 8$

$$6x - 3 - 4x + 8 \geq 8$$

$$2x + 5 \geq 8$$

$$2x \geq 3$$

得

$$x \geq \frac{3}{2}$$

同除以 2 (正數)。

展開後，也可將未知數移至不等號的右邊：

$$5x + 15 < 12x + 1$$

$$15 - 1 < 12x - 5x$$

$$14 < 7x$$

即 $7x > 14$

$$x > 2$$



隨堂練習

解下列各不等式：

(1) $4(x-5) - 2(3x+1) > 0$

(2) $3(2x+7) - 10 \leq 2(5x-1) + 5$

例7 分數型不等式

自評 P172 第2題

解不等式 $\frac{1}{2}(x+3)-(x-2) \leq 3$ 。

解一 $\frac{1}{2}(x+3)-(x-2) \leq 3$

$$\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} - x + 2 \leq 3$$

$$-\frac{1}{2}x + \frac{7}{2} \leq 3$$

$$-\frac{1}{2}x \leq -\frac{1}{2}$$

得

$$x \geq 1$$

同乘以 -2 (負數)。

解二 $\frac{1}{2}(x+3)-(x-2) \leq 3$

$$(x+3)-2(x-2) \leq 6$$

$$x+3-2x+4 \leq 6$$

$$-x+7 \leq 6$$

$$-x \leq -1$$

得

$$x \geq 1$$

同除以 -1 (負數)。

隨堂練習

解下列各不等式：

(1) $\frac{1}{4}(x-1) < \frac{1}{3}(x+2)-1$

(2) $\frac{3x+6}{2} \geq \frac{8x+24}{5}$

② 一元一次不等式的應用

解一元一次不等式的應用問題時，先依題意假設適當的未知數來列不等式，接著解不等式，然後檢驗所有解是否都符合題意。

例8 不等式整數解的應用

自評 P172 第3題

在熊貓購物網上，鉛筆盒一個 100 元，原子筆一支 17 元，且消費金額滿 499 元免運費。如果洛基先選購了一個鉛筆盒，則他至少需再購買多少支原子筆才可以免運費？



解 設需再選購 x 支原子筆，

依題意可列出一元一次不等式 $100 + 17x \geq 499$ 。

解不等式 $100 + 17x \geq 499$

$$17x \geq 399$$

$$x \geq \frac{399}{17} = 23\frac{8}{17}$$

所以洛基至少需再購買 24 支原子筆才可以免運費。

隨堂練習

威利幫班上同學訂購飲料，打電話得知珍珠奶茶只剩 3 杯，除了預訂 3 杯珍珠奶茶以外，他至少要再訂多少杯茉香奶茶才可以達到外送的要求？



例9 不等式整數解的應用

自評 P173 第 4 題

右圖為某餐廳的價目表，開幕日全面九折。當天鈺凱點了橙汁雞丁飯後，還想再點一份 x 元的餐點，且兩份餐點的總花費不超過 200 元，則第二份餐點可以有幾種選擇？

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
藥膳養生粥	蕃茄蛋炒飯	鳳梨蛋炒飯	酥炸排骨飯	和風燒肉飯	蔬菜海鮮麵	香脆炸雞飯	清蒸鱈魚飯	香烤鯛魚飯	紅燒牛腩麵	橙汁雞丁飯	白酒蛤蜊麵	海鮮墨魚麵	嫩烤豬腳飯
60	70	70	80	80	90	90	100	100	110	120	120	140	150
元	元	元	元	元	元	元	元	元	元	元	元	元	元



解 依題意可列出一元一次不等式 $(120 + x) \times 0.9 \leq 200$ 。

解不等式 $(120 + x) \times 0.9 \leq 200$

$$108 + 0.9x \leq 200$$

$$0.9x \leq 92$$

$$9x \leq 920$$

$$x \leq \frac{920}{9} = 102\frac{2}{9}$$

所以第二份餐點價格需小於或等於 102 元，

由價目表可知，共有 ①～⑨，9 種選擇。

隨堂練習

自評 P173 第 5 題

某中學老師和學生共 400 人一起參加校外教學，已知該校有 4 輛校車，每輛可載 35 人，若另外加租每輛可載 40 人的遊覽車若干輛，則最少要租多少輛遊覽車才可載完所有師生？

例10 不等式整數解的應用

自評 P173 第 6 題

8 個未滿 60 歲的大人，帶一群國中生去遊樂園玩。看了票價後，中祥說：「依照大人 1 人 600 元，學生 1 人 500 元購票。」大慶卻說：「雖然我們不到 20 人，但買 20 人的團體票比較便宜耶！」大家發現大慶確實講得比較有道理，則這群人中至少有幾位學生？

售票處	
全票	600 元 → 18 歲以上(含)成人
學生票	500 元 → 13 歲以上(含)未滿 18 歲青少年 或憑學生證購票入場
兒童票	300 元 → 未滿 13 歲兒童
博愛票	300 元 → 65 歲以上(含)長者
備註： 人數 20 人以上(含)，可購買團體票，按全票打 8 折。	

解 設總共有學生 x 人，依題意可列出不等式 $600 \times 80\% \times 20 < 600 \times 8 + 500 \times x$ 。

解不等式得 $9600 < 4800 + 500x$

$$500x > 4800$$

$$x > \frac{48}{5} = 9\frac{3}{5}$$

所以最少有 10 位學生。

隨堂練習

科學館入場券每張 100 元，若買 10 張(含)以上，票價打七五折；某團體不足 10 人，用折價買 10 張入場券，比依實際人數買票還便宜，則此團體可能有多少人？

例11 生活中不等式的應用



世界衛生組織建議以身體質量指數 (Body Mass Index, BMI) 來衡量肥胖程度，計算公式為 $BMI = \frac{\text{體重}}{\text{身高}^2}$ (體重單位：公斤；身高單位：公尺)。衛福部建議 13 歲男、女生的 BMI 應維持在 15.7~21.9 之間，BMI 過小或過大都表示不夠健康。利用計算機計算，並回答下列問題：

- (1) 小倩的身高是 158 公分，體重是 52 公斤，小倩的 BMI 是多少？(四捨五入取至小數點後第一位)
- (2) 鎮宇的身高是 170 公分，體重不超過多少公斤時，BMI 才會在 21.9 以下(含)？

解 (1) 小倩的身高是 158 公分，等於 1.58 公尺，體重是 52 公斤，

$$\frac{52}{1.58^2} = 20.82999519 \cdots \approx 20.8,$$

所以小倩的 BMI 是 20.8。

- (2) 設鎮宇的體重是 x 公斤，因為身高是 170 公分，等於 1.7 公尺，

依題意可列出不等式 $\frac{x}{1.7^2} \leq 21.9$ 。

$$\text{解不等式 } \frac{x}{1.7^2} \leq 21.9$$

$$x \leq 21.9 \times 1.7^2$$

$$x \leq 63.291$$

所以鎮宇的體重不超過 63.291 公斤時，他的 BMI 才會在 21.9 以下(含)。

隨堂練習

欣慧的身高是 160 公分，體重至少要多少公斤，BMI 才會在 15.7 以上(含)？
(可利用計算機計算)



請某人喝飲料，幫忙插上吸管，某人還是不喝。某人是誰？

超乎想像的塑膠吸管垃圾



2015 年，一段塑膠吸管卡在海龜鼻子的影片引發大眾矚目。畫面中，工作人員試圖將卡在海龜鼻子的吸管去除，過程令人不忍。這段影片引起各界對海洋垃圾問題的重視，也引發「反塑膠吸管運動」的風潮。



**STOP
USING
PLASTIC
STRAWS**

塑膠吸管質輕、容易取得且體積小，但若任意丟棄，將會在未經分解或分解為塑膠碎片後，被生物攝食進入體內，再經由食物鏈進入中高階掠食者的體內，而衍生嚴重的生態與環境汙染問題。

手搖杯飲料風氣在臺灣非常盛行。根據統計，臺灣每年約可賣出 10 億杯的茶飲，其中至少有 80% 使用塑膠吸管，環保署於 2019 年 7 月開始實施限用一次性塑膠吸管的政策，嚴格要求全臺各公部門、公私立學校、百貨公司及購物中心、連鎖速食店等全面禁用塑膠吸管，希望可以減少對環境與海洋的汙染。

- Q** 一根吸管的重量約 0.42 公克，依據上述文章內容，如果每一杯飲料都不使用吸管，則臺灣一年至少可以減少多少公斤的塑膠吸管垃圾？



重點回顧

1 不等式的加減運算性質

將不等號的兩邊同時加上或減去一個數，其大小關係不變。

即如果 $a > b$ ， c 為任意數，則(1) $a + c > b + c$ ，

(2) $a - c > b - c$ 。

對於 $a < b$ 、 $a \geq b$ 或 $a \leq b$ 時，同時加(或減)任意數 c 後，不等號兩邊的大小關係仍然不變。

例 (1) $x - 3 > 6$ ，不等號的兩邊同加 3，可得 $x > 9$ 。

(2) $x + 5 < 7$ ，不等號的兩邊同減 5，可得 $x < 2$ 。

2 不等式的乘除法運算性質一：不等號的兩邊同乘或除以一個正數

將不等號的兩邊同乘或除以一個正數，其大小關係不變。

即(1)當 $a > b$ 時，如果 $c > 0$ ，則 $a \times c > b \times c$ 。

(2)當 $a > b$ 時，如果 $c > 0$ ，則 $a \div c > b \div c$ ，即 $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$ 。

對於 $a < b$ 、 $a \geq b$ 或 $a \leq b$ 時，同乘或除以一個正數後，不等號兩邊的大小關係仍然不變。

例 (1) $2x \geq 6$ ，不等號的兩邊同除以 2，可得 $x \geq 3$ 。

(2) $\frac{1}{4}x < 7$ ，不等號的兩邊同乘以 4，可得 $x < 28$ 。

3 不等式的乘除法運算性質二：不等號的兩邊同乘或除以一個負數

將不等號的兩邊同乘或除以一個負數，其大小關係相反。

即(1)當 $a > b$ 時，如果 $c < 0$ ，則 $a \times c < b \times c$ 。

(2)當 $a > b$ 時，如果 $c < 0$ ，則 $a \div c < b \div c$ ，即 $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$ 。

對於 $a < b$ 、 $a \geq b$ 或 $a \leq b$ 時，同乘或除以一個負數後，不等號兩邊的大小關係相反。

例 (1) $-2x > 6$ ，不等號的兩邊同除以 -2 ，可得 $x < -3$ 。

(2) $-\frac{1}{4}x \leq 7$ ，不等號的兩邊同乘以 -4 ，可得 $x \geq -28$ 。





4-2 自我評量

① 解下列各一元一次不等式，並在數線上圖示其解：

課 P156~161 例 1~4

$$(1) -\frac{1}{3}x + 4 > 6$$

$$(2) 3x + 3 > x - 7$$

—————→

—————→

② 解下列各一元一次不等式：

課 P162~165 例 5~7

$$(1) 4x + 3 < 2x + 9$$

$$(2) 2(2x + 3) \geq 5x + 8$$

$$(3) 3(x - 3) + 4 < 5(2x + 1) - 7$$

$$(4) \frac{x}{2} + \frac{x-2}{3} \leq \frac{2x}{3} - \frac{2x+3}{6}$$

③ 不等式 $2(x-4)-6 > x-11$ 的解中， x 的最小整數值是多少？

課 P166 例 8

- 4 大成購物中心舉辦周年慶，全館商品一律八折，若暖暖包原價 1 袋 230 元，傑克帶 1000 元去買暖暖包，則他最多可以買到多少袋？

課 P167 例 9

- 5 小勇想買一組價格 30000 元的電腦，已知他有存款 7500 元，如果小勇每週都再存入 450 元，則最少還要幾週，才可以買到這一組電腦？

課 P167 隨堂



- 6 已知臺灣高鐵從臺北到高雄的原票價為 1490 元，中學生團體校外教學購買 11 張以上(含)，每張優惠票價為 1040 元。若此次校外教學從臺北到高雄購票的費用比原價便宜 10000 元以上，則此團體至少有多少人？

課 P168 例 10





自我挑戰

本單元為統整課程，由學生自行挑戰，
教師可視班級情況決定如何運用。

★ 聖誕節到了，小鋒的老師想訂購巧克力來請全班同學，老師利用網路訂購每包顆數皆相同的巧克力 5 包，分給班上同學，預定每人分 20 顆，會剩餘 80 顆。後來因廠商存貨不足，來不及供應，所以少訂了 2 包，於是改成每人分 14 顆，但是最後分到小鋒時，發現只有小鋒拿不到 14 顆，但仍至少拿到 7 顆以上。

試回答下列問題：

(1) 如果同學有 x 人，則每包巧克力有多少顆？(以含 x 的式子表示)

解



(2) 同學至少有多少人？

解

(3) 同學至多有多少人？

解



趣學數學

本單元為配合此章所設計的趣味問題，由學生自行練習，教師可視班級情況而自行決定如何運用。

1 配合 4-1

這裡有一個不等式迷宮，如果從 A 點進入，最後會從哪一個出口出來呢？
一起來挑戰看看吧！

規則：

1. 自 A 點進入。
2. 解每一個方格的不等式或方程式：
 - ◆ 答案如果是「 $x=2$ 」，就「往前直走」，到下一個方格；
 - ◆ 答案如果是「 $x>2$ 」，就「向右轉」，往前走到下一個方格；
 - ◆ 答案如果是「 $x<2$ 」，就「向左轉」，往前走到下一個方格。

2 配合 4-2

輕鬆文創店舉辦解謎促銷活動，只要根據大門口貼出的售價傳單，答對一個魔術方塊至少多少元（價格皆為整數），即可獲得 50 元飲品折價券。你看的出來一個魔術方塊至少多少元嗎？

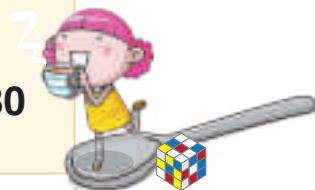
輕鬆文創
有獎徵答

猜猜看 至少多少元？

$$① \text{ (cupcake) } + \text{ (cupcake) } + \text{ (cupcake) } + \text{ (cupcake) } > 200$$

$$② \text{ (cupcake) } + \text{ (cake) } + \text{ (cake) } = 200$$

$$③ \text{ (cake) } + \text{ (magic cube) } + \text{ (magic cube) } + \text{ (magic cube) } = 180$$





多少票才能篤定當選

博士參加市議員選舉，共有 9 位候選人，應選出 6 人。已知可投票人數為 40 萬人，若以投票率 70%，有效票比率 96% 計算，則博士至少要獲得多少票才能篤定當選？

這個問題可以用數學算式處理，

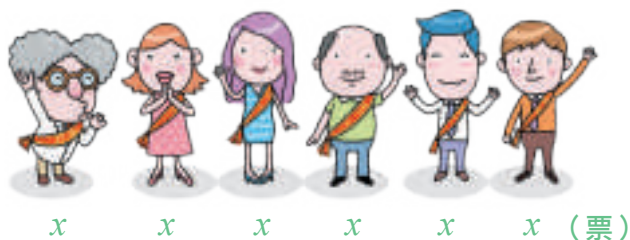
$$\text{投票數} : 400000 \times 70\% = 280000$$

$$\text{有效票} : 280000 \times 96\% = 268800$$

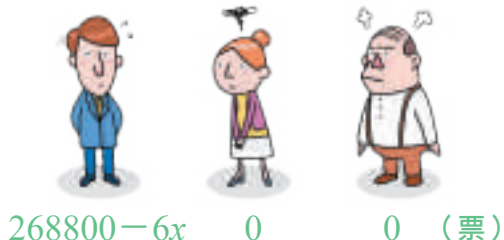
假設當選的安全票數是 x 張票，所以 6 位當選人的總得票數大於或等於 $6x$ 張，而落選人總得票數必須不大於 $(268800 - 6x)$ 張票，所以最高票落選人的票數最多有 $(268800 - 6x)$ 張。



當選



落選



因此當 x 大於 $(268800 - 6x)$ 時，則篤定當選，

$$\text{即 } x > 268800 - 6x$$

$$7x > 268800$$

$$\text{得 } x > \frac{268800}{7} = 38400$$

所以博士至少要得到 38401 票，才能篤定當選。

5

統計圖表與統計數據

・ 國小 4 年級
報讀長條圖與折線圖
製作長條圖

・ 國小 5 年級
製作折線圖

・ 國小 6 年級
報讀與製作圓形圖

・ 國小 3 年級
一維表格與二維表格

5-1 統計圖表

1. 生活中的統計圖表

2. 列聯表

3. 次數分配與直方圖

・ 8 上

第 5 章 統計資料處理

5-2 平均數、中位數與眾數

・ 國小 5 年級
平均

1. 平均數

2. 中位數

3. 眾數

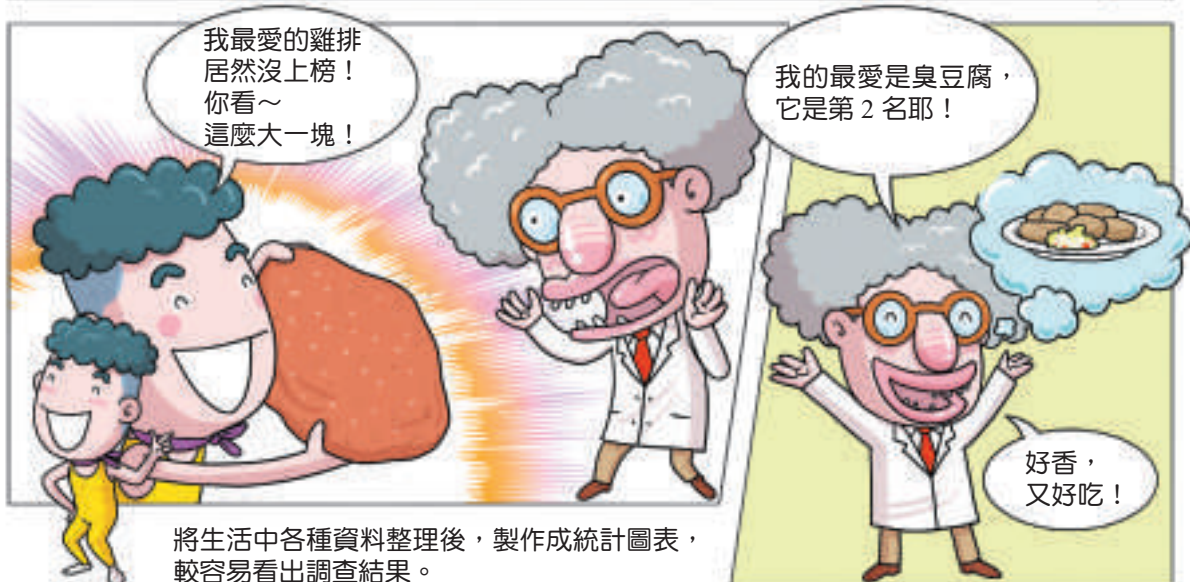
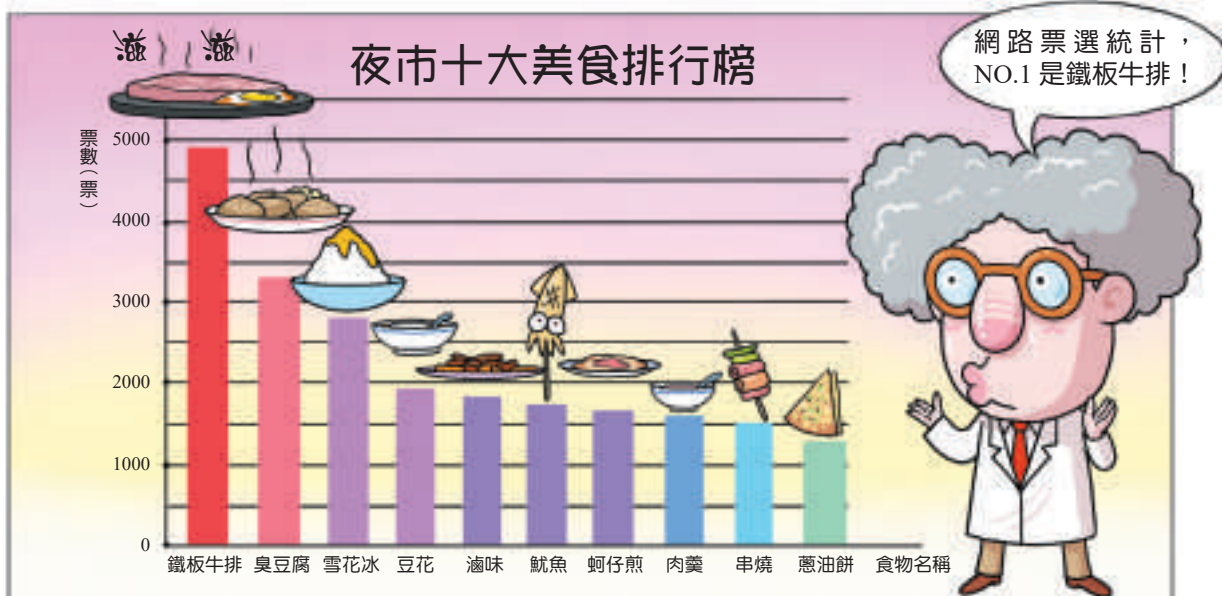
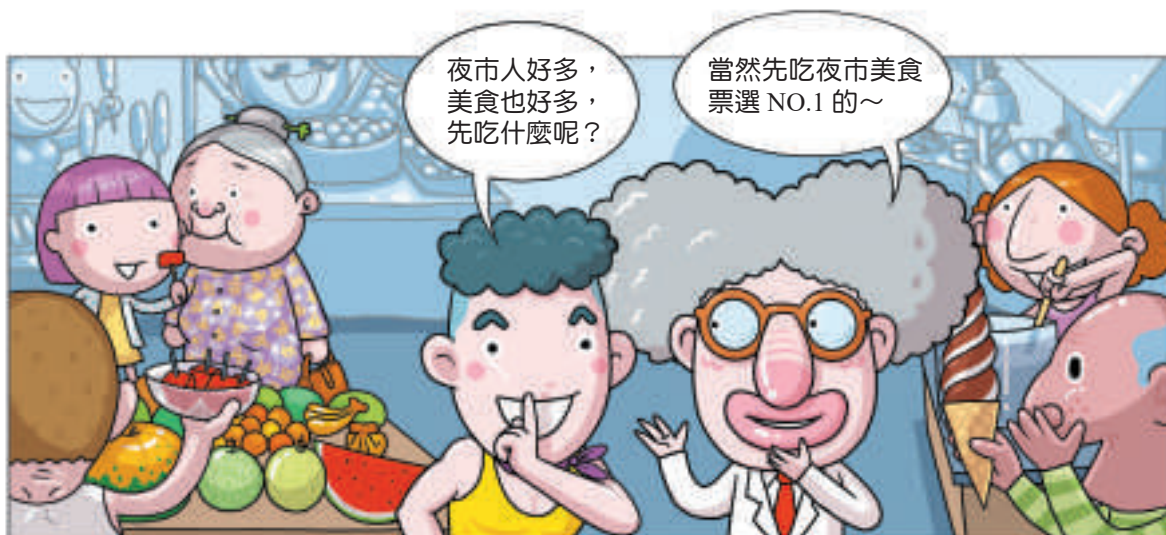
・ 9 下

2-1 四分位數與盒狀圖

統計圖表廣泛運用在生活中，例如：夜市的美食排行榜、考試成績的統計等。如何將大量的資料透過圖表描述出來，而這些資料又可以如何解讀、分析？

本章將從整理資料開始，學習繪製各種統計圖表，再討論平均數、中位數與眾數，進一步分析與了解資料的分布狀態。







學習前哨站

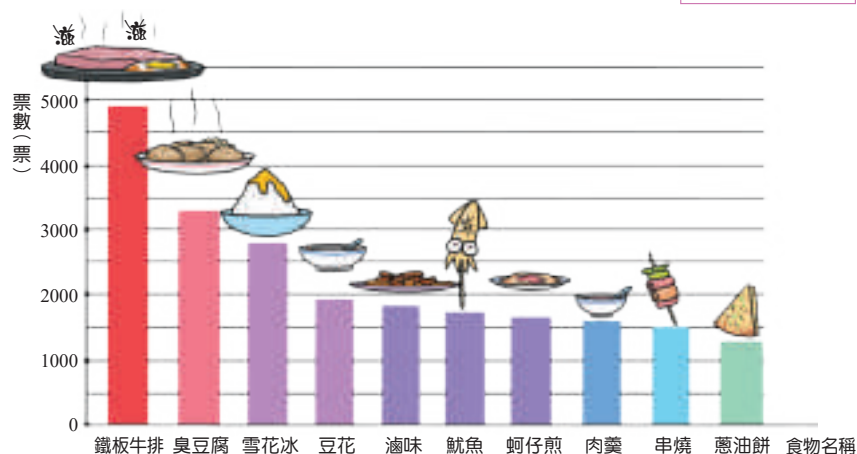
本單元為學生自我複習，
教師可視班級情況決定如何運用。



回顧 1 長條圖

國小 4 年級

夜市十大美食排行榜
如右：由長條圖可知，
前三名分別為
鐵板牛排、臭豆腐、
雪花冰。



課前練習

依據夜市十大美食排行榜長條圖，回答下列問題：

- (1) 十大美食中，甜品類的美食有_____個。
- (2) 臭豆腐要增加_____千票，才能變成排名第一。(請填整數)

回顧 2 圓形圖

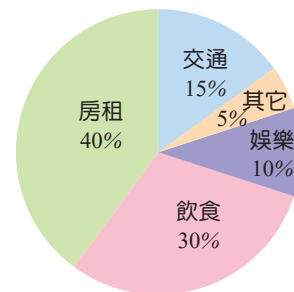
國小 6 年級

右圖是小芳上個月生活支出的圓形圖，如果總支出
是 3 萬元，則房租的支出是 $30000 \times \frac{40}{100} = 12000$ (元)。



課前練習

承上，交通支出是多少元？



小芳上個月生活支出圓形圖

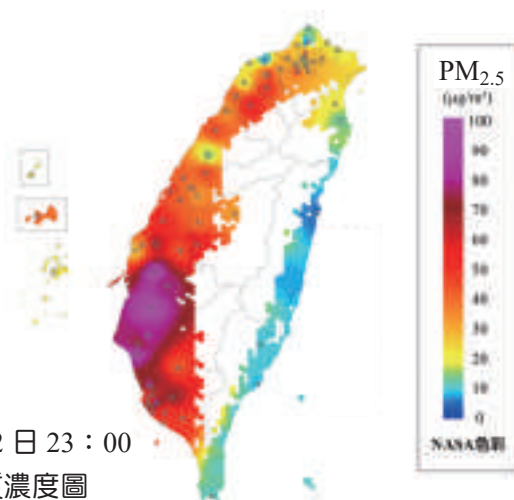
5-1 統計圖表

可搭配附件 3

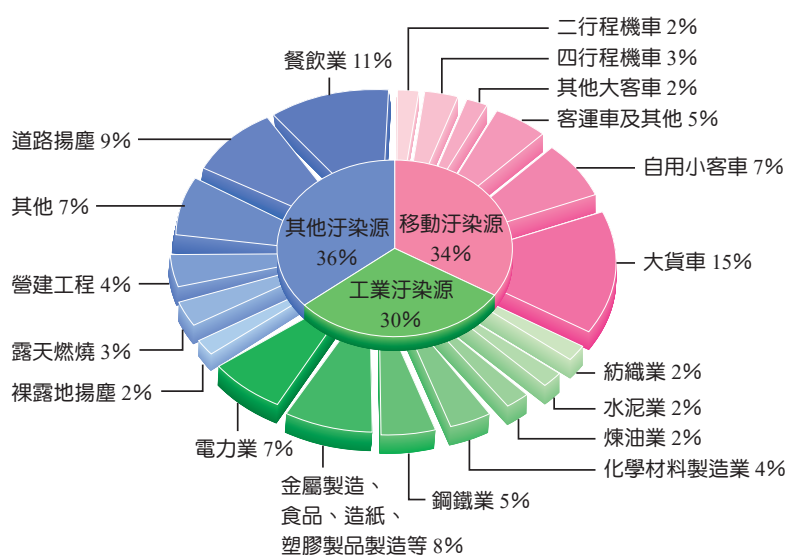


① 生活中的統計圖表

我們常從報紙或網路上看到一些由統計數據資料所呈現的統計圖表。例如：下圖是 $PM_{2.5}$ 空氣品質濃度圖，顏色橘色以上表示汙染嚴重，提醒民眾減少戶外活動。



常用的統計圖有折線圖、長條圖等，雖然統計表能清楚呈現統計數據，但統計圖以顏色、圖形強調要呈現的內容，更加一目了然。右圖是環保署在民國 106 年 4 月調查臺灣境內 $PM_{2.5}$ 汙染來源的圓形圖，從扇形的大小可以清楚呈現各項目所占的比率，例如：移動汙染源占 34%、工業汙染源占 30%，其他汙染源占 36%。



民國 106 年 4 月臺灣境內 $PM_{2.5}$ 汙染來源圓形圖

在國小時，利用分割成 100 份的圓形來繪製圓形圖，呈現各分類資料的百分率。實際上，圓形圖是比長條圖、折線圖更容易看出各資料間的相對百分率，接下來，我們以百分率換算成圓心角的度數，繪製圓形圖的扇形區域。

例 1 繪製圓形圖

自評 P197 第 1 題

勝利國中為了解九年級同學參加會考寫作測驗成績分布情形，製作該校九年級寫作測驗成績分布圓形圖。

成績(級分)	1	2	3	4	5	6	合計
次數(人)	5	10	45	80	40	20	200

解 製作圓形圖的方法如下：

步驟 1：計算該級分人數占總人數百分率($\frac{\text{該級分人數}}{\text{總人數}} \times 100\%$)。

1 級分： $\frac{5}{200} \times 100\% = 2.5\%$ 。同理，其它級分所占百分率如下表。

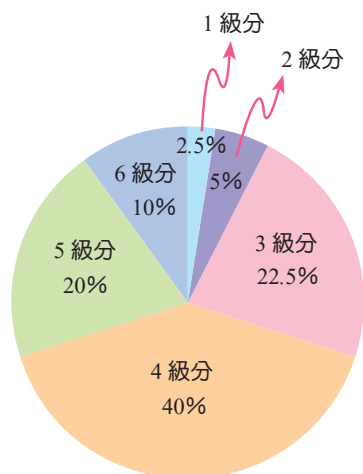
步驟 2：計算該級分在圓形圖中所占圓心角度數(百分率 $\times 360^\circ$)。

1 級分： $2.5\% \times 360^\circ = 9^\circ$ 。同理，其它級分所占圓心角如下表。

成績(級分)	1	2	3	4	5	6
次數(人)	5	10	45	80	40	20
百分率(%)	2.5	5	22.5	40	20	10
圓心角(度)	9	18	81	144	72	36

步驟 3：依照圓心角畫出代表各級分的扇形，並於扇形中標示百分率。

依照上述步驟可以得到下圖：



 隨堂練習

明聖國中調查學生最喜愛的休閒活動，調查結果如下表：

種類	音樂	閱讀	運動	上網	其他	合計
次數(人)	20	20	60	80	20	200

(1) 計算各休閒活動所占的百分率及圓心角：

音樂所占的百分率為_____ %；

其圓心角為_____ 度。

閱讀所占的百分率為_____ %；

其圓心角為_____ 度。

運動所占的百分率為_____ %；

其圓心角為_____ 度。

上網所占的百分率為_____ %；

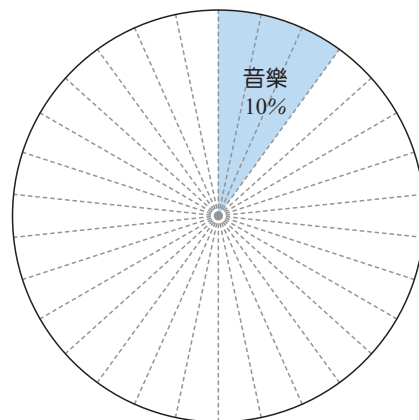
其圓心角為_____ 度。

其他所占的百分率為_____ %；

其圓心角為_____ 度。

(2) 完成該校學生最喜愛的休閒活動圓形圖。

每一等分的圓心角
為 12 度喔！



例2 繪製多條折線圖

下表是學校合作社上半年營業收入與支出統計表，製作此合作社營業收入與支出的折線圖。

金額 \ 月分	1 月	2 月	3 月	4 月	5 月	6 月
收入	10	25	35	20	35	20
支出	15	20	25	15	15	15

(單位：萬元)

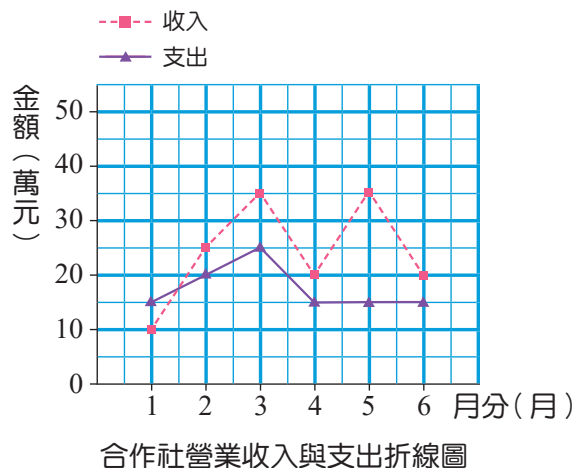
解 製作折線圖的方法如下：

步驟 1：畫出互相垂直的橫軸與縱軸，並標示單位。

步驟 2：分別標出代表收入的點
(1, 10)、(2, 25)、
(3, 35)、(4, 20)、
(5, 35)、(6, 20)。

步驟 3：將各點依序用線段連接。

同理，依照上述步驟繪製支出的折線圖。

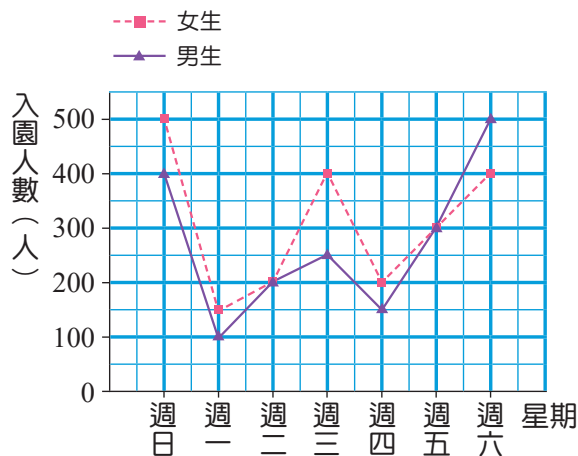


由例2的折線圖中可以觀察到：1月的支出大於收入，呈現虧損狀態；2月起由虧轉盈；而5月的收入與支出差距最大，也就是5月獲利最多。

隨堂練習

好好玩樂園在五月分第1週週日～週六入園人數的折線圖如右，回答下列問題：

- (1) 哪幾天女生入園人數超過男生？
- (2) 哪一天男、女生入園人數相差最多？



② 列聯表

運動會前，宥均班上要訂購班服，因此調查每位同學衣服尺寸，其中 1～15 號是男生，16～30 號是女生，結果如下：

座號	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
尺寸	S	M	M	M	M	L	L	S	M	L
座號	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
尺寸	L	M	XL	S	XL	L	M	M	S	L
座號	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
尺寸	XL	S	S	M	S	M	L	M	M	S

宥均要將班服資料彙整給廠商製作班服，因此依照尺寸(S、M、L、XL)及性別(男、女)這兩種類別統計製表，方法如下：

步驟 1：畫出橫列及直行的表格，橫列有男、女及合計，直行有 S、M、L、XL 四種尺寸及合計，所以畫出橫列四列，直行六行的表格，並標示性別及尺寸，如右表。

性別 \ 尺寸	S	M	L	XL	合計
男					
女					
合計					

步驟 2：計算男生 S 尺寸有 1、8、14 號，共 3 人，所以 S 與 男 的對應格中填入 3。

步驟 3：依上述方式統計人數，完成統計表如下：

性別 \ 尺寸	S	M	L	XL	合計
男	3	6	4	2	15
女	5	6	3	1	15
合計	8	12	7	3	30

總計全班人數 (單位：人)

像這樣將資料用兩種以上的類別分組，並統計次數所得的統計表，稱為**列聯表**，其中直行與橫列對應的數即為次數。雖無法看出哪一位同學穿何種尺寸的班服，但列聯表可清楚呈現各尺寸及男、女生的數量。

例3 繪製列聯表

自評 P197 第 2 題

建國國中七年二班調查同學上學方式如下表，其中 1~10 號是男生，11~20 號是女生，以上學方式與性別分類完成列聯表。

步行 公車 腳踏車 其它

座號	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
上學方式	步行	步行	腳踏車	公車	腳踏車	步行	其它	步行	步行	公車
座號	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
上學方式	公車	腳踏車	步行	其它	步行	公車	步行	其它	公車	步行

解 1. 畫出橫列與直行的表格，標示出上學方式及性別。

2. 計算步行的男生人數，其分別為座號 1、2、6、8、9 號，共 5 人。

所以在 步行 與 男 的對應格中填入 5。

(單位：人)

3. 依上述方式統計人數，完成列聯表。

上學方式 性別	步行	公車	腳踏車	其它	合計
男	5	2	2	1	10
女	4	3	1	2	10
合計	9	5	3	3	20

隨堂練習

文新國中甄選與姐妹校交流的代表學生，報名及錄取結果如下表，其中紅色序號為七年級，藍色序號為八年級。如果了解七、八年級的錄取情形，試做年級(七、八年級)與錄取結果(錄取、不錄取)的列聯表。

序號	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
錄取結果	○	×	○	×	×	○	×	×	×	×
序號	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
錄取結果	○	×	○	×	×	×	○	○	○	○

年級 錄取結果			

(單位：人)

③ 次數分配與直方圖

▶ 分組的次數分配表

將透過各種方式所蒐集的數據，作適當的整理與歸納，並製成圖表，可以更容易看出資料的分布情況及特性。

下表是七年四班數學成績的一覽表，從表中可以得知每位學生的數學成績，但是如果進一步知道哪一個區間分數的人數最多，或者成績優劣的分布情形，就必須再加以整理。

七年四班數學成績一覽表

座號	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
成績(分)	78	80	72	65	76	100	54	87	77	36
座號	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
成績(分)	55	85	64	98	70	75	82	62	94	86
座號	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
成績(分)	66	85	64	66	84	58	89	43	64	44

製作次數分配表的方法如下：

步驟 1：決定組距

如上表中，最低分是 36 分，最高分是 100 分，從 30 分開始，每 10 分為一組（**組距**是 10 分），分成 30~40、40~50、50~60、60~70、70~80、80~90、90~100，共 7 組。

步驟 2：分組

在本教材中規定，分組時「 $a \sim b$ 」表示資料在 a 以上（含下限 a ）而未達 b （不含上限 b ），但最後一組 90~100 分也含滿分 100 分。

(1) 30~40 分：成績在 30 分以上（含 30 分）且未達 40 分（不含 40 分）。

(2) 40~50 分：成績在 40 分以上（含 40 分）且未達 50 分（不含 50 分）。

⋮

(6) 80~90 分：成績在 80 分以上（含 80 分）且未達 90 分（不含 90 分）。

(7) 90~100 分：成績在 90 分以上（含 90 分）且 100 分以下（**含 100 分**）。

步驟 3：製作次數分配表

判別每一個人的分數歸屬於哪一組，並在該組的計數符號欄畫記，最後再統計該組的人數。例如：1 號 78 分在 70～80 分這一組；2 號 80 分在 80～90 分這一組。

七年四班數學成績次數分配表

成績(分)	計數符號欄	次數(人)
30～40	/	1
40～50	//	2
50～60	///	3
60～70	/// /	7
70～80	/// /	6
80～90	/// ///	8
90～100	///	3
合計		30

50 分以上(含 50 分)
未達 60 分(不含 60 分)

90 分以上(含 90 分)
100 分以下(含 100 分)

這種將統計的資料歸類到不同的類別中，並顯示每一個類別中觀察值的數量，稱作**次數分配表**。上表就是已分組的次數分配表，從表中很容易發現 80～90 分這一組的人數最多。



隨堂練習

自評 P198 第 3 題(1)

下表是珮茹班上同學體重一覽表，完成該班同學體重次數分配表。

珮茹班上同學體重一覽表

座號	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
體重(公斤)	51	56	64	69	56	58	50	61	45	54
座號	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
體重(公斤)	66	55	54	58	47	57	53	66	51	63
座號	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
體重(公斤)	59	49	56	55	52	67	52	60	53	64

珮茹班上同學體重次數分配表

體重(公斤)	計數符號欄	次數(人)
45～50		
50～55		
55～60		
60～65		
65～70		
合計		30

在完成次數分配表後，為了讓資料的呈現更加一目了然，通常會繪製成**次數分配直方圖**或**次數分配折線圖**，我們以七年四班數學成績次數分配表為例，方法如下：

▶ 次數分配直方圖

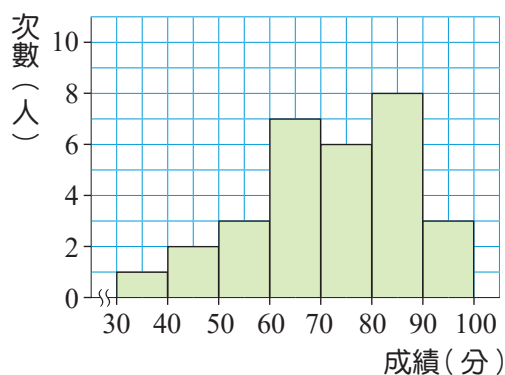
步驟 1：畫出橫軸與縱軸，並標示單位

在橫軸標示成績及單位(分)，從適當位置開始，由左到右依次標示各組分數，
在縱軸標示次數及單位(人)。

步驟 2：畫出各組之長方形

分別以各組的組距為底，該組次數(人)為高，畫出長方形，注意底部刻度間隔要相同。

依照上述步驟可以得到右圖。



七年四班數學成績次數分配直方圖

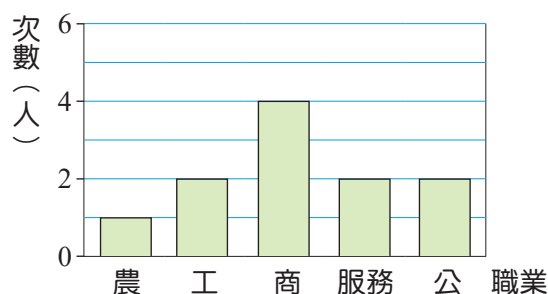
符號「≡」表示中間部分省略。

補給站 長條圖 v.s. 直方圖

統計學中，條形圖分為長條圖與直方圖兩大類：

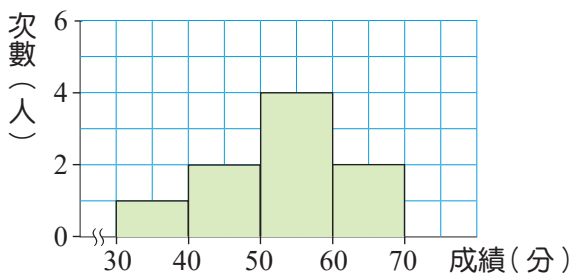
長
條
圖

當資料可以清楚呈現每個調查資料類別的次數時使用。
例如：職業分類(農、工、商、服務、公)或交通方式等這樣的類別資料，宜用長條圖來表示。



直
方
圖

當資料數值屬於**連續性**且**適合分組**時使用。
例如：成績、身高等資料適合用直方圖表示，直方圖各長方形間無間隔，且有連續性。



次數分配折線圖

步驟 1：畫出橫軸與縱軸，並標示單位

在橫軸標示成績及單位(分)，在縱軸標示次數及單位(人)。

步驟 2：計算各組的中點

例如：30~40 分的組中點是 $(30+40) \div 2 = 35$ (分)，此點即為該組的**組中點**。
各組的組中點依序為 35 分、45 分、55 分、65 分、75 分、85 分、95 分。

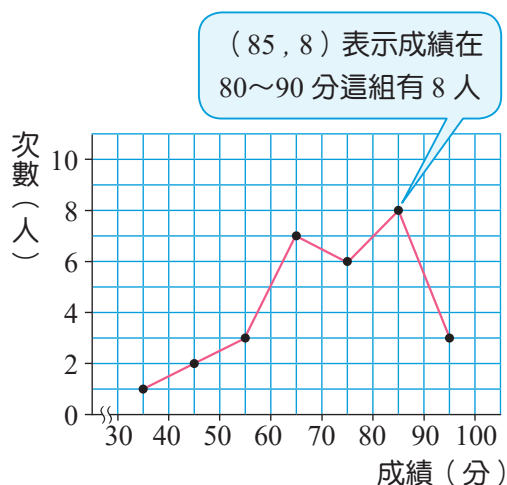
步驟 3：在坐標平面上標出(組中點, 人數)的點

$(35, 1)$ 、 $(45, 2)$ 、 $(55, 3)$ 、 $(65, 7)$ 、 $(75, 6)$ 、 $(85, 8)$ 、 $(95, 3)$ 。

步驟 4：由左至右用線段依序連接這些點

依照上述步驟可以得到右圖。

由圖可知，80~90 分這一組的人數最多，30~40 分這一組的人數最少。

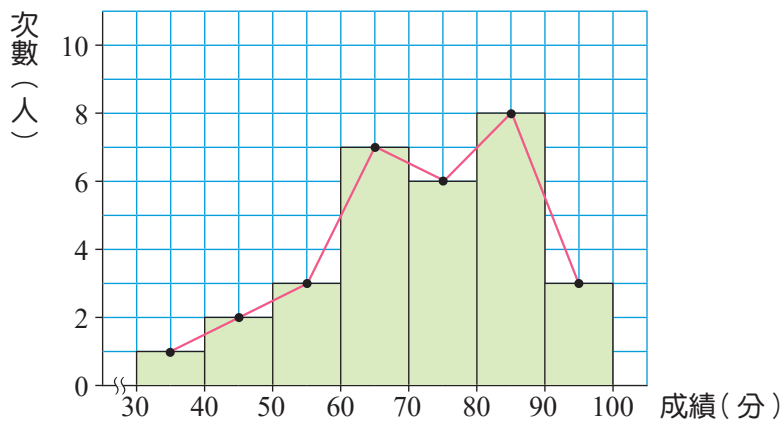


七年四班數學成績次數分配折線圖

製作次數分配折線圖時，以各組的**組中點**來取折點。



若將直方圖和折線圖畫在一起，可以看出它們的對應關係，如下圖：



七年四班數學成績次數分配直方圖與折線圖

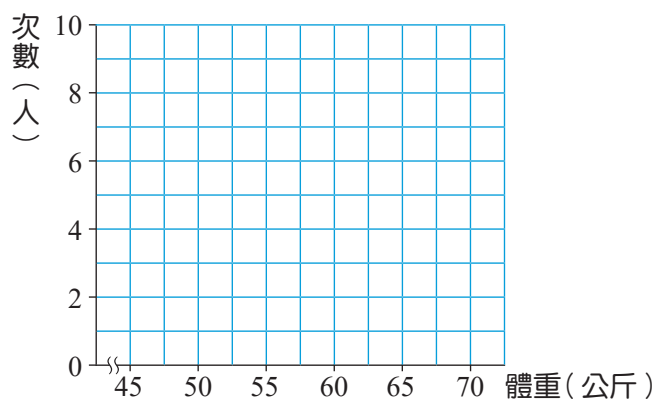
隨堂練習

1. 下表為珮茹班上同學體重的次數分配表，繪製該班體重次數分配直方圖。

自評 P199 第 4 題

珮茹班上同學體重次數分配表

體重(公斤)	次數(人)
45~50	3
50~55	9
55~60	9
60~65	5
65~70	4
合計	30



珮茹班上同學體重次數分配直方圖

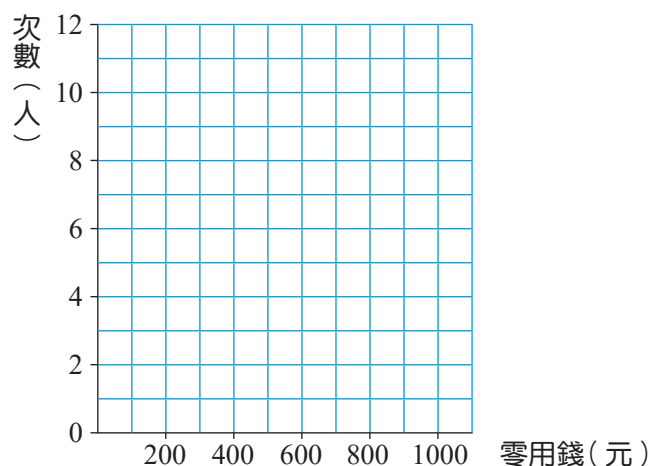
2. 下表為珮茹班上同學每月零用錢的次數分配表，回答下列問題：

- (1) 每月零用錢 600~800 元有多少人？
- (2) 繪製該班每月零用錢次數分配折線圖。

自評 P198 第 3 題(2)

珮茹班上同學每月零用錢次數分配表

零用錢(元)	次數(人)
0~200	2
200~400	6
400~600	12
600~800	?
800~1000	3
合計	30



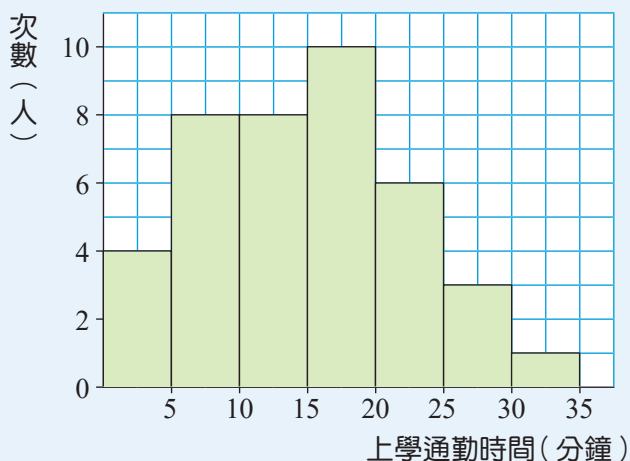
珮茹班上同學每月零用錢次數分配折線圖

例4 次數分配圖的判讀

自評 P199 第 5 題

右圖是文星國中七年五班學生上學通勤時間的次數分配直方圖。

- (1) 上學通勤時間在 10~20 分鐘有多少人？
- (2) 通勤 20 分鐘以上和不到 20 分鐘相差多少人？



七年五班學生上學通勤時間次數分配直方圖

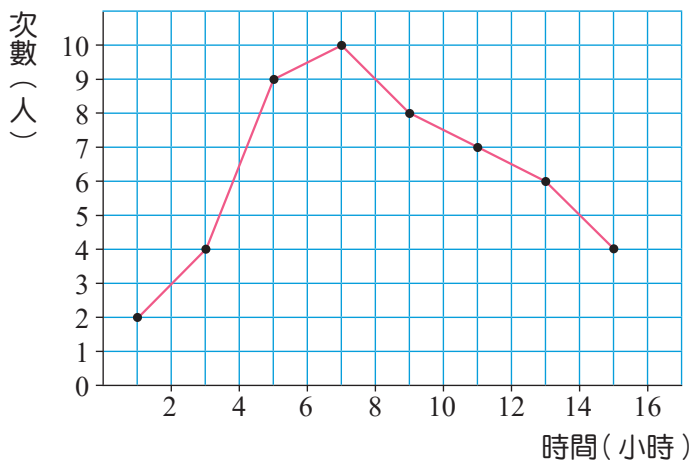
- 解** (1) 從圖中可以知道上學通勤時間在 10~20 分鐘有 $8+10=18$ (人)。
- (2) 通勤時間 20 分鐘以上有 $6+3+1=10$ (人)
- 不到 20 分鐘有 $4+8+8+10=30$ (人)
- 兩者相差 $30-10=20$ (人)。



隨堂練習

右圖是七年六班每週六、日讀書時間的次數分配折線圖。

- (1) 讀書時間為 6~8 小時的有多少人？
- (2) 讀書時間 10 小時以上有多少人？

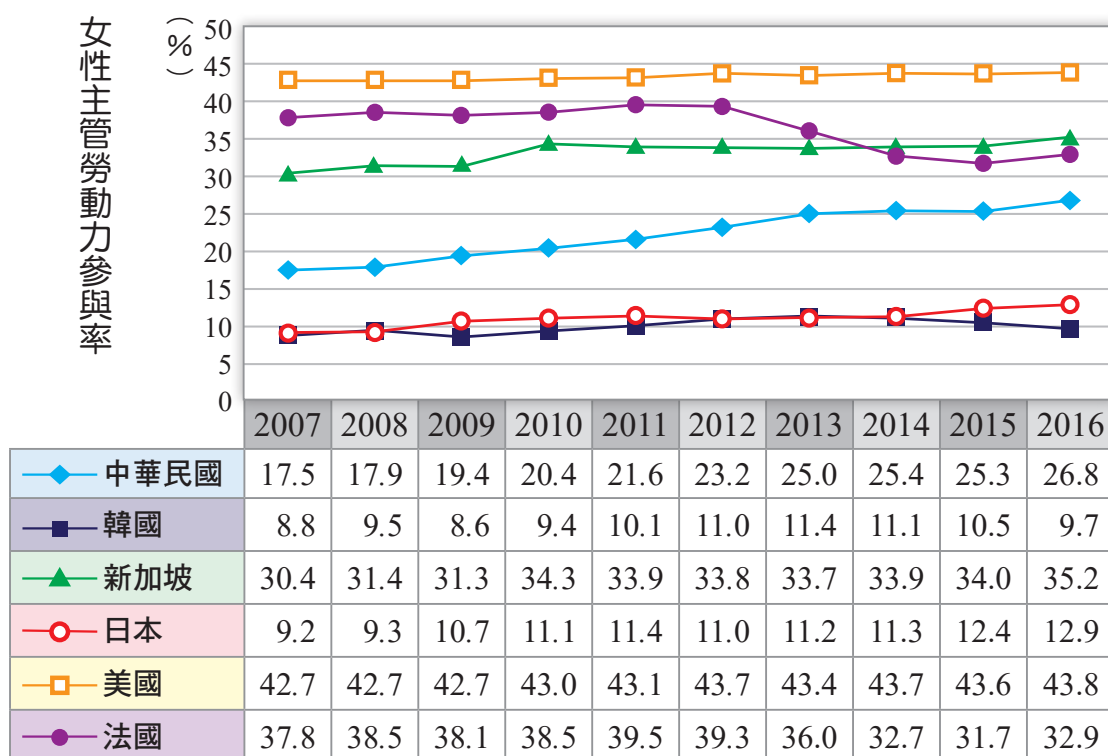


七年六班週休二日讀書時間次數分配折線圖

性別平權



西元 1979 年聯合國通過【消除對婦女一切形式的歧視公約】(The Convention on the Elimination of all Forms of Discrimination Against Women, CEDAW)，實施至今，世界各國的發展指標其中一項就是以性別觀點作為建立各項統計指標的根據。從 2007 年至 2016 年亞洲各國、美國與法國在民意代表、主管及經理人員女性比例如下表。



資料來源：行政院主計總處

Q 從上述資料中可知：

- (1) 哪一個國家女性主管勞動力參與率在 2007 年至 2016 年增加最多？增加多少百分率？
- (2) 除了法國以外，各國 2016 年女性主管勞動力參與率與 2007 年相比都是成長，是否代表每一年都有成長呢？試舉一個國家說明。



利用試算表繪製統計圖



我們可以利用電腦軟體繪製統計圖，這樣會更方便有效率且美觀。以下是寶來大學調查學生手機電信費支出情形，我們以 Excel 2013 繪製圓形圖及折線圖。

寶來大學學生手機電信費支出統計表

費用(元)	100 元以下	100~300 元	300~600 元	600~900 元	900 元以上	合計
次數(人)	188	100	740	440	132	1600

步驟 1：開啟電腦 Excel 軟體，在試算表各儲存格中輸入資料，建置表格。

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	費用(元)	100 元以下	100~300 元	300~600 元	600~900 元	900 元以上	合計	
2	次數(人)	188	100	740	440	132	1600	

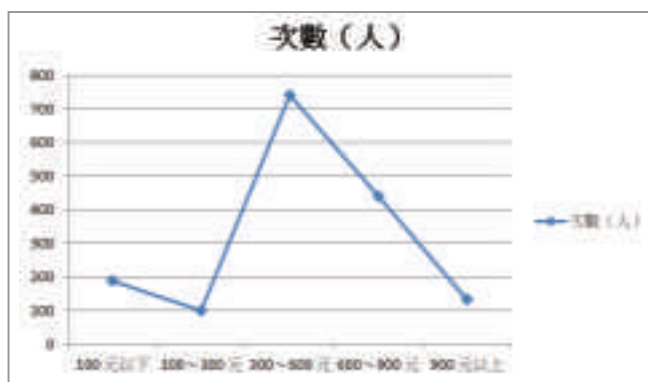
此儲存格為 A1

此儲存格為 F2

步驟 2：選取 **步驟 1** 的資料範圍 A1:F2，並在「插入」的功能區選擇 **圖表** 的「折線圖」，即完成。

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	費用(元)	100 元以下	100~300 元	300~600 元	600~900 元	900 元以上	合計	
2	次數(人)	188	100	740	440	132	1600	

資料範圍 A1:F2



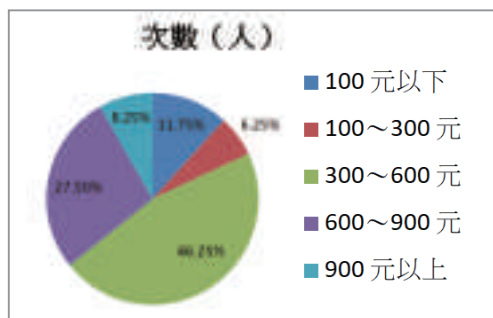
步驟 3：在 A3 儲存格輸入 **百分率**，在 B3 儲存格輸入 $=B2/1600$ 後，選取數值，然後按下功能區上的 % 樣式，將數值改以百分比表示。

接著，將滑鼠游標移到 B3 儲存格的右下角，在出現十字時，按住滑鼠左鍵，再將游標移到 G3 儲存格後，放開滑鼠左鍵，即可算出所有的百分率。

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	費用 (元)	100 元以下	100 ~ 300 元	300 ~ 600 元	600 ~ 900 元	900 元以上	合計	
2	次數 (人)	188	100	740	440	132	1600	
3	百分率	11.75%	6.25%	46.25%	27.50%	8.25%	100.00%	
4								
5								

步驟 4：選取 **步驟 3** 的資料範圍 A1:F2，並在「插入」的功能區選擇 **圖表** 的「圓形圖」，即完成。

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	費用 (元)	100 元以下	100 ~ 300 元	300 ~ 600 元	600 ~ 900 元	900 元以上	合計	
2	次數 (人)	188	100	740	440	132	1600	
3	百分率	11.75%	6.25%	46.25%	27.50%	8.25%	100.00%	
4								
5								



同樣的方法，也可以在「插入」的功能區選擇 **圖表** 的「長條圖」、「直方圖」，就可以呈現不同的統計圖。





重點回顧

1 列聯表

將資料用兩種以上的類別分組，並統計次數所得的統計表稱為列聯表，其中直行與橫列對應的數字即為次數。

例 某校三位優良學生候選人投票結果，統計如下：

年級 \ 候選人	候選人 A	候選人 B	候選人 C	合計
七年級	105	156	163	424
八年級	201	64	57	322
九年級	145	265	76	486
合計	451	485	296	1232

(單位：票)

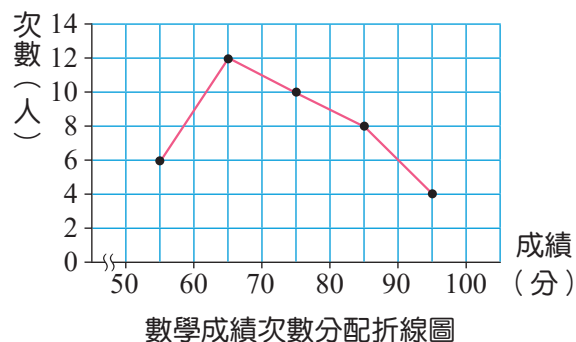
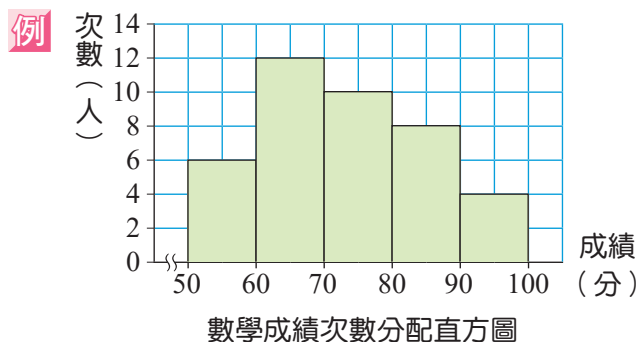
2 次數分配表

將統計資料歸類到不同的類別中，並顯示每一個類別中觀察值的數量，稱為次數分配表。

成績(分)	次數(人)
50~60	6
60~70	12
70~80	10
80~90	8
90~100	4
合計	40

3 次數分配直方圖與折線圖

將資料整理成分配表後，根據次數分配表，可以繪製次數分配直方圖與折線圖。



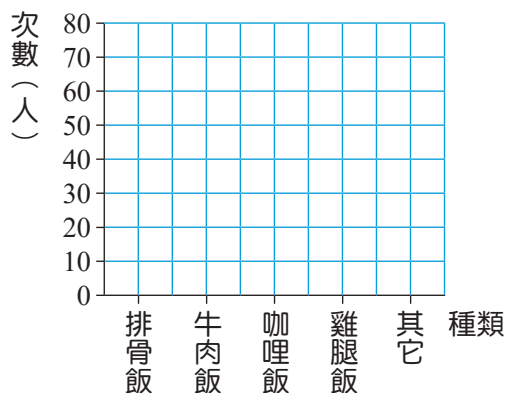
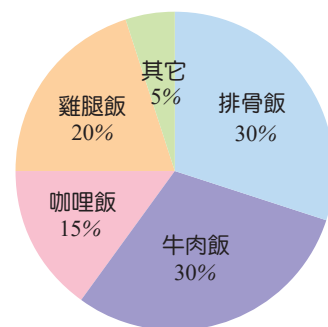


5-1 自我評量

- 1 大忠國中七年級共有 200 人，右圖是該校某日訂購午餐人數的圓形圖，回答下列問題：

課 P182 例 1

- (1) 訂購排骨飯的有多少人？
(2) 繪製該校訂購午餐人數的折線圖。

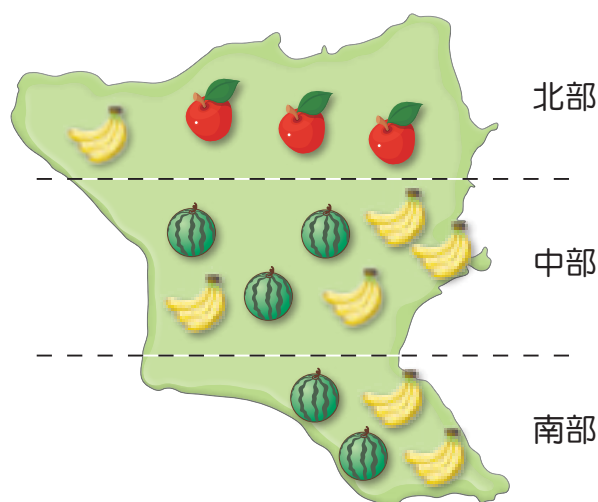


- 2 日光島盛產水果，其水果產量分布如下，若每一圖示代表產量 10 公噸，完成此島各區水果產量的列聯表。

課 P186 例 3

地區 \ 水果種類				
	西瓜	香蕉	蘋果	合計
北部				
中部				
南部				
合計				

(單位：公噸)



- (1) 由列聯表知，日光島中水果產量最大的區域是_____。(北、中、南部)
(2) 哪些水果只產在一個區域？

3 下表是惠雯班上同學身高一覽表：

惠雯班上同學身高一覽表

座號	身高(公分)	座號	身高(公分)	座號	身高(公分)	座號	身高(公分)
1	181	8	182	15	174	22	178
2	175	9	155	16	168	23	155
3	160	10	161	17	163	24	165
4	172	11	182	18	162	25	156
5	160	12	176	19	170	26	148
6	172	13	169	20	171	27	150
7	169	14	146	21	165	28	180

(1) 完成惠雯班上同學身高的次數分配表。

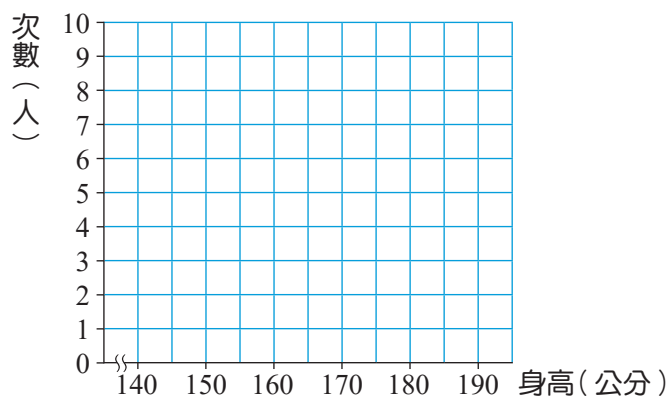
課 P188 隨堂

惠雯班上同學身高次數分配表

身高(公分)	計數符號欄	次數(人)
140~150		
150~160		
160~170		
170~180		
180~190		
合計		28

(2) 承(1)，繪製該班同學身高的次數分配折線圖。

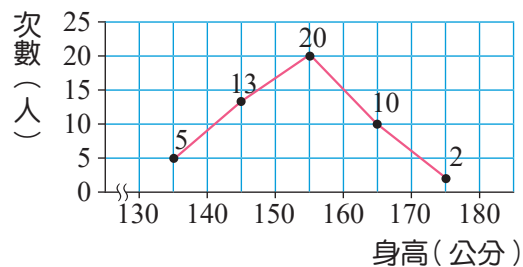
課 P191 隨堂 2



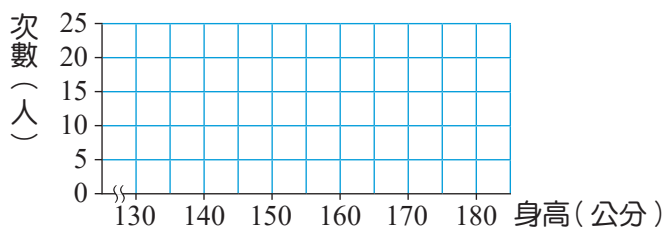
惠雯班上同學身高次數分配折線圖

- 4 右圖為籃球社 50 位社員身高的次數分配折線圖，利用此折線圖繪製身高的次數分配直方圖。

課 P191 隨堂 1



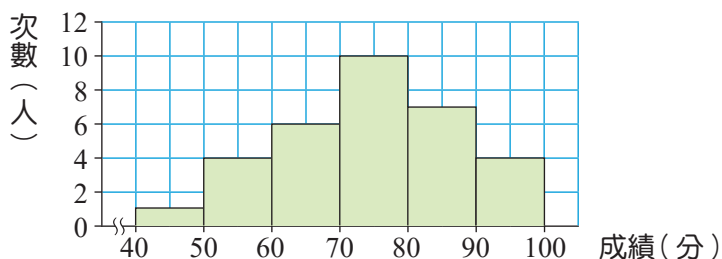
籃球社身高次數分配折線圖



籃球社身高次數分配直方圖

- 5 下圖是七年七班 32 位學生數學成績的次數分配直方圖，回答下列問題：

課 P192 例 4



七年七班數學成績次數分配直方圖

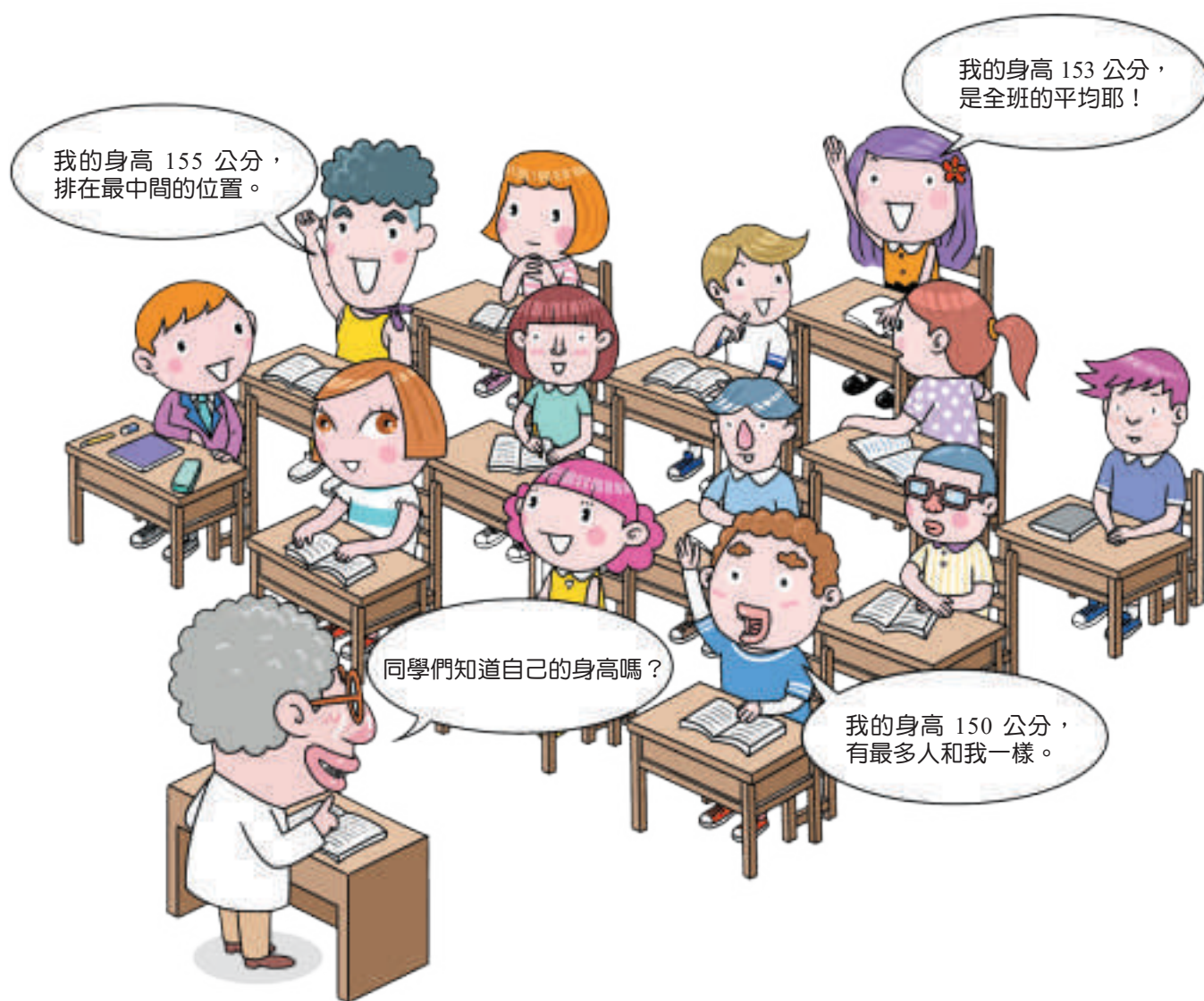
- (1) 哪一組的人數最多？
- (2) 未滿 60 分有多少人？
- (3) 如果想了解各組分數所占的百分率，則應將成績統計畫成下列何種圖表？

(A) 次數分配折線圖
(B) 圓形圖
(C) 次數分配長條圖

5-2 平均數、中位數與眾數



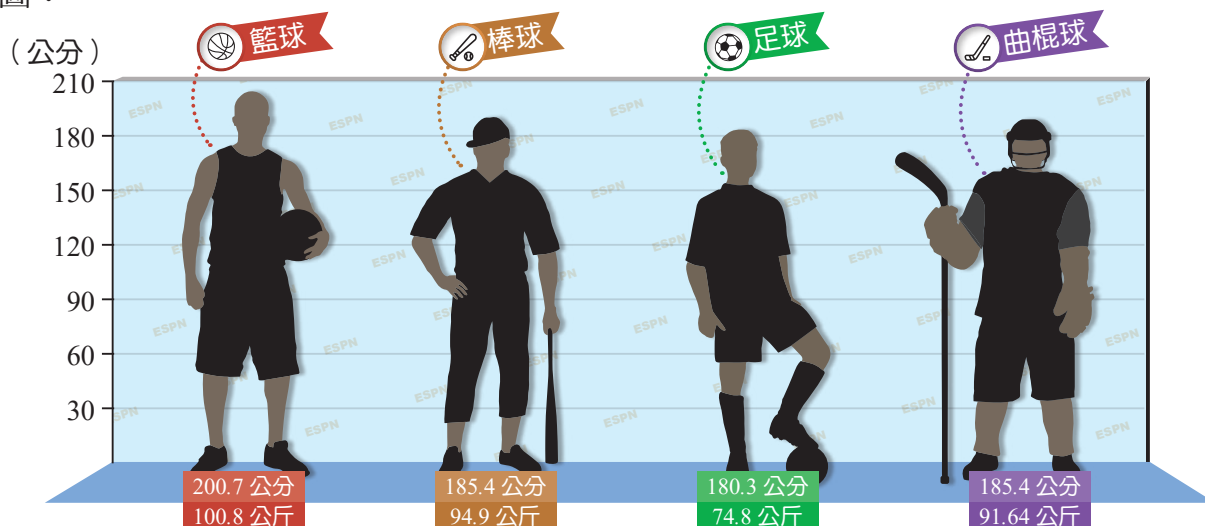
學會資料的整理、分組與繪製統計圖表後，接下來將開始分析與了解資料。



上圖中，這三位同學所敘述的內容有提到「平均」、「最中間」及「最多人和我一樣」，接下來我們來認識這些敘述所代表的意義。

1 平均數

美國的娛樂與體育節目電視網 (Entertainment Sports Programming Network, ESPN) 統計美國籃球、棒球、足球和曲棍球四種球類球員的平均身高和體重如下圖：



由圖可知，籃球員的平均身高最高，足球員的平均體重最輕。在上述中，平均身高的「平均」是什麼意思呢？我們以下面例題來說明：

例 1 求平均數

自評 P219 第 1 題(1)

某籃球隊先發五名球員身高分別為 190、195、180、187、183 公分，求先發球員的平均身高。

解 因為 $190 + 195 + 180 + 187 + 183 = 935$ ，
 $935 \div 5 = 187$ ，
 所以先發球員的平均身高是 187 公分。

例 1 中，將身高的總和除以人數所得的平均身高，稱為身高的平均數。

平均數

將所有數據資料的總和除以總次數，稱為**平均數**。



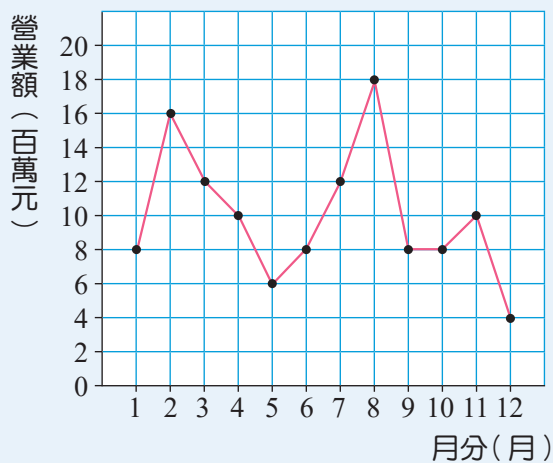
隨堂練習

一組資料有 10 個數，分別是 4、11、13、7、6、16、14、8、9、12，求該組資料的平均數。

例 2 由統計圖求平均數

自評 P219 第 2 題

右圖是大大餐飲集團去年每個月營業額的折線圖，求大大餐飲集團去年每個月的平均營業額。



大大餐飲集團去年每個月營業額折線圖

解 因為 $8 + 16 + 12 + 10 + 6 + 8 + 12 + 18 + 8 + 8 + 10 + 4 = 120$ ，

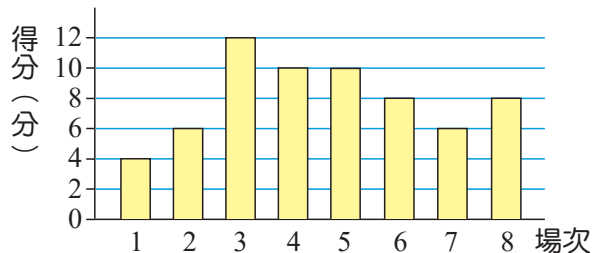
$120 \div 12 = 10$ (百萬元)，

所以去年每個月的平均營業額是一千萬元。



隨堂練習

右圖是阿哲在班際籃球賽出賽 8 場的得分情形，求阿哲這 8 場球賽的平均得分。



當資料數據非常多時，通常只會呈現整理過的次數分配表或折線圖等，因此，我們只能求出其平均數的近似值。

例如下表是正義國中健康減重班學生體重的次數分配表：

正義國中健康減重班學生體重次數分配表

體重(公斤)	次數(人)
65~70	30
70~75	30
75~80	20
80~85	10
85~90	10
合計	100

由於已經分組的資料，不一定能知道其原始資料，因此我們將各組資料視為均勻分布於該組上，用組中點代表該組的平均數。

該校健康減重班學生體重的平均數算法如下：

步驟 1：先算出各組的組中點，

$$65\sim 70 \text{ 公斤的組中點為 } (65+70)\div 2=67.5；$$

$$70\sim 75 \text{ 公斤的組中點為 } (70+75)\div 2=72.5。$$

⋮

步驟 2：將各組的組中點乘以次數，

$$65\sim 70 \text{ 公斤的「組中點}\times\text{次數}」為 } 67.5\times 30=2025；$$

$$70\sim 75 \text{ 公斤的「組中點}\times\text{次數}」為 } 72.5\times 30=2175。$$

⋮

步驟 3：將各組的組中點乘以次數的數值相加得其總和，

$$2025+2175+1550+825+875=7450。$$

將上述三個步驟的結果記錄在下表：

正義國中健康減重班學生體重次數分配表

體重(公斤)	組中點(公斤)	次數(人)	組中點×次數(公斤)
65~70	67.5	30	2025
70~75	72.5	30	2175
75~80	77.5	20	1550
80~85	82.5	10	825
85~90	87.5	10	875
合計		100	7450

步驟 4：將總和除以總次數即可得平均數， $7450 \div 100 = 74.5$ (公斤)。

補給站 計算機的特殊功能鍵

計算機除了 $+$ 、 $-$ 、 $\times$ 、 $\div$ 外，還有 **M+**、**M-** 等按鍵，它們到底是怎麼用的呢？

原來，M 是 Memorize (記憶)、R 是 Recall (叫出)、**M+** 就是將記憶中的數字叫出來，而 **M+** 是累加，**M-** 是累減的意思。

例如：計算 $3.2 \times 4.6 + 1.4 \times 5.1$

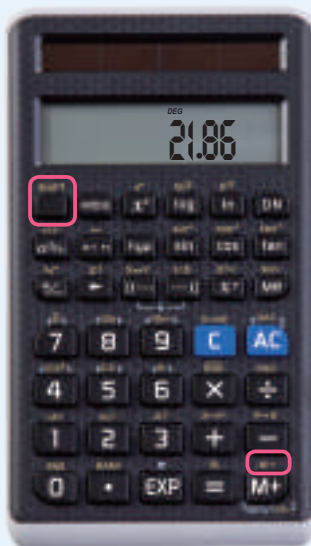
步驟 1：輸入 3.2 **×** 4.6 **M+**

步驟 2：輸入 1.4 **×** 5.1 **M+** **M+**

螢幕顯示



有些計算機須使用 **M+** 鍵才能進行累加的功能，但本教材使用的計算機亦可直接輸入 $3.2 \times 4.6 + 1.4 \times 5.1 =$ 求得答案。



本教材使用的計算機若需 **M-** 功能，需先按 **SHIFT**，再按 **M+**。



 我們也可以使用計算機來計算平均數。以正義國中健康減重班學生體重的次數分配表為例，按法如下：

67.5  30 

72.5  30 

77.5  20 

82.5  10 

87.5  10 

  100 

螢幕顯示



計算每一道題目前
要先按 ，可消除
先前的記憶。

不同計算機的按法
可能略有不同。



隨堂練習

利用計算機計算七年一班全班英文成績的平均分數。

自評 P220 第 3 題(1)

七年一班全班英文成績次數分配表

成績(分)	次數(人)
50~60	3
60~70	5
70~80	7
80~90	8
90~100	2
合計	25

補給站 設基準點求平均數

右表是明青國中七年級身高的次數分配表，我們可以用另一種方法求平均數。

身高(公分)	次數(人)
150~155	8
155~160	14
160~165	20
165~170	23
170~175	10
175~180	5

步驟 1：從組中點中，找一個較適當的數值為基準點，設基準點為 **167.5** 公分。

步驟 2：計算每一個組中點與基準點的差。

步驟 3：計算每一組的(組中點－基準點)×次數。

步驟 4：將 **步驟 3** 的每一組乘積相加，可得總和是 **-260**。

步驟 1			步驟 2		步驟 3	
身高 (公分)	組中點 (公分)	次數 (人)	組中點－基準點		(組中點－基準點)×次數 (公分)	
150~155	152.5	8	-15		-120	
155~160	157.5	14	-10		-140	
160~165	162.5	20	-5		-100	
165~170	167.5	23	0		0	
170~175	172.5	10	5		50	
175~180	177.5	5	10		50	
合計		80			-260	

步驟 4

步驟 5：計算基準點+平均每人比基準點多(少)幾公分，

$$167.5 + \frac{(-260)}{80} = 164.25,$$

則明青國中七年級身高的平均是 164.25 公分。

例3 分組合併求平均數

自評 P220 第 4 題

自立國中七年級有一、二、三，共 3 班，人數分別是 28 人、32 人與 25 人，第一次期中考三班數學成績的平均分別是 70 分、80 分、66 分，求全校七年級第一次期中考數學成績的平均是多少分？(四捨五入取至小數點後第一位)

解 一班數學成績總分 $70 \times 28 = 1960$ ，
 二班數學成績總分 $80 \times 32 = 2560$ ，
 三班數學成績總分 $66 \times 25 = 1650$ ，
 全校七年級總分 $1960 + 2560 + 1650 = 6170$ ，
 全校七年級人數 $28 + 32 + 25 = 85$ ，
 故全校七年級數學成績平均 $6170 \div 85 = 72.588 \cdots \approx 72.6$ (分)。

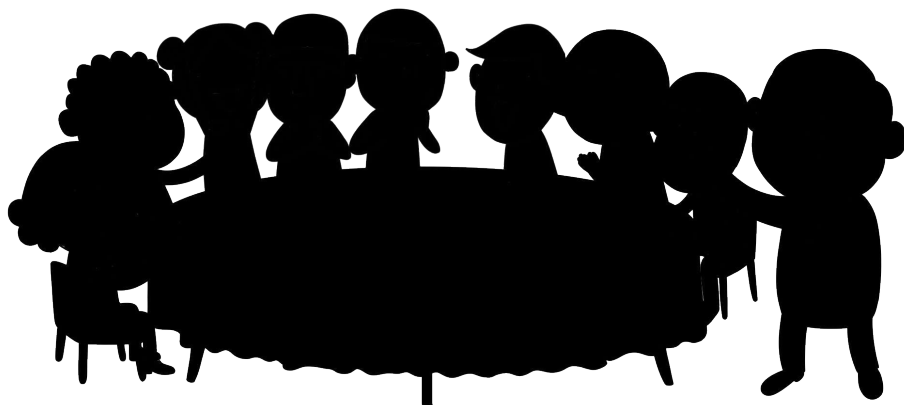
在例3中，平均分數 $= \frac{70 \times 28 + 80 \times 32 + 66 \times 25}{28 + 32 + 25} = \frac{6170}{85} \approx 72.6$ (分)。

隨堂練習

平成國中七年二班共有 30 位學生，依座號順序的前 20 位學生身高的平均是 165 公分，後 10 位學生身高的平均是 174 公分，求全班身高的平均是多少公分？

平均數容易計算、易於了解，是一種較具有客觀性的表示法。例如：老師公布第一次期中考數學的平均成績，同學可以了解自己與全班平均分數的差距。

② 中位數



上圖為 9 個人參加聚餐的剪影，他們的平均年齡是 17 歲。你或許以為他們是一群高中生的聚餐，事實上，這是 8 名國中生與老師的聚餐，因為老師的年齡比國中生大很多，而平均數是所有資料的平均，因此很容易受到資料中特別大或特別小的資料影響。



為了不受這些極端的數據影響，我們將這 9 個人的年齡由小到大排列，分別為

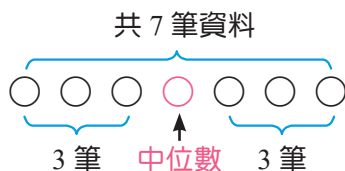
13、13、13、13、14、14、15、15、43（歲）

這 9 個人的年齡排序後，最中間位置是第 5 個人，他的年齡為 14 歲。像這樣將資料由小到大排列後，取在最中間位置的數值來表示整體的資料，這樣的數稱為**中位數**。在這裡，14 歲就比 17 歲更能顯示這群人的年齡。

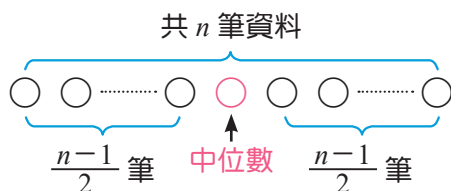
如果資料共有 10 筆，中位數會是第幾筆？接下來，我們會以資料數是奇數筆或偶數筆，分別說明中位數的求法。

① 當資料個數是奇數

例如：有 7 筆資料，中位數是由小到大排列的第 4 筆。

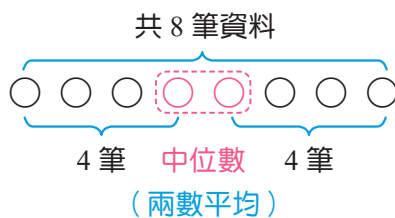


若資料數量有 n 筆 (n 為奇數)，在中位數前後都各有 $\frac{n-1}{2}$ 筆資料，則中位數在第 $(\frac{n-1}{2} + 1) = \frac{n+1}{2}$ 筆資料。

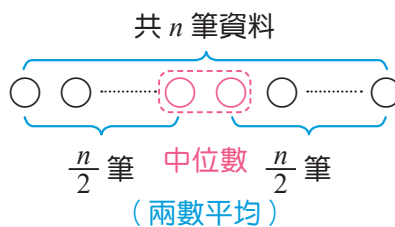


② 當資料個數是偶數

例如：有 8 筆資料，中位數是由小到大排列的第 4 筆與第 5 筆資料的平均。



若資料數量有 n 筆 (n 為偶數)，將資料分成兩等分，則中位數取第 $\frac{n}{2}$ 筆及第 $(\frac{n}{2} + 1)$ 筆資料的平均，中位數不一定在這組資料中。



 中位數

將 n 筆數據資料由小到大排列，

(1) 若 n 是奇數，則中位數是「第 $\frac{n+1}{2}$ 筆資料」。

(2) 若 n 是偶數，則中位數是「第 $\frac{n}{2}$ 筆與第 $(\frac{n}{2} + 1)$ 筆資料的平均」。

例4 求中位數（資料個數為奇數）

自評 P219 第 1 題(2)

一組資料有 11 個數，分別是 22、43、35、7、16、51、19、11、28、2、30，
求該組資料的中位數。

解 將資料由小到大排列：2、7、11、16、19、22、28、30、35、43、51。

共有 11 筆資料，11 是奇數， $\frac{11+1}{2} = 6$ ，

所以中位數是這組資料由小到大排列的第 6 筆，

故這組資料的中位數是 22。

 隨堂練習

一組資料有 13 個數，分別是 7、17、62、9、12、13、14、52、17、43、32、41、3，求該組資料的中位數。

例 5 求中位數（資料個數為偶數）

自評 P220 第 5 題

七年三班有 16 位男生，每人投籃 6 次，進球數如下表，求進球數的中位數。

進球數(球)	0	1	2	3	4	5	6
次數(人)	3	1	4	2	3	2	1

解 七年三班有 16 位男生，

因為 16 是偶數， $\frac{16}{2}=8$ ， $\frac{16}{2}+1=9$ ，

所以中位數是由小到大排列的第 8 筆與第 9 筆資料的平均，

即中位數 $=\frac{2+3}{2}=2.5$ ，

故進球數的中位數為 2.5 球。

進球數由小到大排列：

0、0、0、1、2、2、
2、2、3、3、4、4、
4、5、5、6

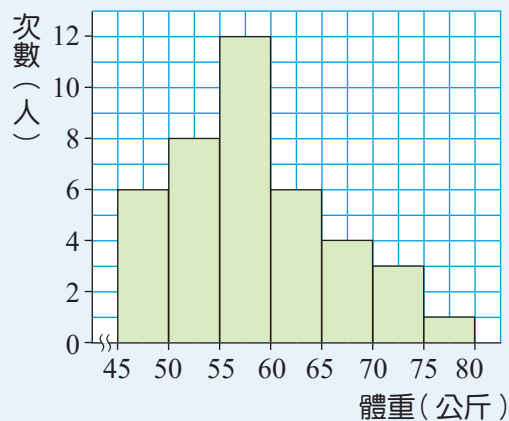
隨堂練習

七年四班有 28 位同學，每位同學家庭人口數的次數分配表如下表，求該班同學家庭人口數的中位數。

家庭人口數(人)	3	4	5	6	7	8
戶數(戶)	8	9	4	3	2	2

例6 求中位數的組別

右圖為文星國中七年五班體重的次數分配直方圖，則該班體重的中位數在哪一組？



文星國中七年五班體重次數分配直方圖

解 $6+8+12+6+4+3+1=40$ (人)

因為全班人數 40 是偶數，故中位數是由小到大排列的第 20 筆與第 21 筆的平均。

由最小的組別累加計算 $6+8=14$ ，

$$14+12=26，$$

所以該班體重的中位數在 55~60 公斤這一組。



隨堂練習

自評 P220 第 3 題(2)

右表為青雲國中七年六班第一次期中考數學成績的次數分配表，則該班數學成績的中位數在哪一組？

成績 (分)	次數 (人)
30~40	3
40~50	5
50~60	7
60~70	9
70~80	7
80~90	5
90~100	3
合計	39

③ 眾數

百貨公司或零售商常常會記錄哪一個廠牌或哪一種型號的物品最暢銷，藉此作為下次進貨的依據。因此他們會統計一組資料中，有哪些出現的次數最多，其中出現次數最多的資料，稱為這群資料的**眾數**。如果出現次數最多的資料有 2 種以上（含 2 種），則這幾種資料都是眾數。眾數也能呈現一組資料的特性。

眾數

一組資料中，出現次數最多的資料，稱為這組資料的眾數。

例 7 求眾數

自評 P219 第 1 題(3)

忠信統計班上男同學球鞋的尺寸號碼（美國標準）如下表：

尺寸(號)	7.5	8	8.5	9	9.5	10
次數(人)	1	5	5	4	2	3

則忠信班上男同學球鞋尺寸號碼的眾數是幾號？

解 從表中可知忠信班上男同學球鞋的尺寸號碼，
出現最多次的是 5 次，為 8 號與 8.5 號，
故眾數是 8 號與 8.5 號。

隨堂練習

七年三班訂購午餐的數量如下表，則該班訂購午餐的眾數是哪一種餐點？

種類	雞排飯	排骨飯	牛肉飯	滷肉飯	咖哩飯	素食
數量(人)	7	12	8	6	4	3

平均數、中位數與眾數都可以某種程度地表示一組資料的特性，但它們的使用時機不太相同。例如：常用平均數來表示班級成績；常用中位數來表示一間公司的薪資；用眾數來表示飲料店最受歡迎的飲品。

我們以下面的例子來說明，達利公司職員每月的薪水如下表：

每月薪水(元)	23000	27000	35000	170000
次數(人)	9	7	3	1

在表格中可以發現大部分員工的薪水在 23000~35000 元之間，僅有 1 人薪水高達 170000 元。像這樣一組資料中特別大或特別小的值，稱為這組資料的**極端值**。

從表格中可以算出該公司每月薪水以及去掉極端值後薪水的平均數、中位數與眾數如下：

	平均數	中位數	眾數
原資料(元)	33550	27000	23000
去掉極端值的資料(元)	26368	27000	23000

一般而言，一組資料中的極端值會影響平均數的大小，而中位數與眾數則不太會受到影響。

例8 極端值的影響

愛心公益團體收到的捐款如下表，回答下列問題：

金額(千元)	1	2	5	10	1000
次數(人)	13	6	3	2	1

(1) 平均捐款為多少元？

(2) 如果扣除極端值，則平均捐款為多少元？

解 (1) $\frac{(1 \times 13 + 2 \times 6 + 5 \times 3 + 10 \times 2 + 1000 \times 1)}{25} = 42.4$ (千元)，即 42400 元。

(2) $\frac{(1 \times 13 + 2 \times 6 + 5 \times 3 + 10 \times 2)}{24} = 2.5$ (千元)，即 2500 元。

隨堂練習

開心牧場調查牧場內 10 隻乳牛的產乳量(單位：公斤)如下：

20、22、21、19、3、18、20、21、17、22

求開心牧場乳牛產乳量扣除極端值後的平均產乳量為多少公斤？

補給站 加權平均數

在計算學期成績時，會將各科成績乘上每週教學節數，再除以每週教學總節數，作為學期成績。這種將資料中不同類別的資料給予不同的權重，再加以平均，稱為加權平均數。

下表是建明各領域的學期成績：

科目	國文	英文	數學	自然	社會	藝文	健體	科技	綜合
分數(分)	90	85	72	80	90	90	80	80	90
每週教學節數(節)	5	3	4	3	3	3	3	2	3

加權平均成績

$$\begin{aligned}
 &= \frac{90 \times 5 + 85 \times 3 + 72 \times 4 + 80 \times 3 + 90 \times 3 + 90 \times 3 + 80 \times 3 + 80 \times 2 + 90 \times 3}{5 + 3 + 4 + 3 + 3 + 3 + 3 + 2 + 3} \\
 &= \frac{450 + 255 + 288 + 240 + 270 + 270 + 240 + 160 + 270}{5 + 3 + 4 + 3 + 3 + 3 + 3 + 2 + 3} \\
 &= \frac{2443}{29} \\
 &\approx 84.2 \text{ (分)}
 \end{aligned}$$



利用試算表計算平均數、中位數、眾數



愛莎在溜冰場調查 15 位民眾學習溜冰的時間分別如下(單位：小時)：

10、13、25、32、8、11、14、3、3、15、7、3、15、6、2

以下利用 Excel 2013，計算此 15 位民眾溜冰時間的平均數、中位數與眾數。

開啟電腦 EXCEL 軟體，在試算表各儲存格中輸入資料，如下：

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
1	原始資料	10	13	25	32	8	11	14	3	3	15	7	3	15	6	2	
2	平均數																
3	中位數																
4	眾數																
5																	

方法一：輸入公式

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
1	原始資料	10	13	25	32	8	11	14	3	3	15	7	3	15	6	2	
2	平均數	11.1333															
3	中位數	10															
4	眾數	3															
5																	

① 移至儲存格 B2，輸入公式=AVERAGE (B1:P1)

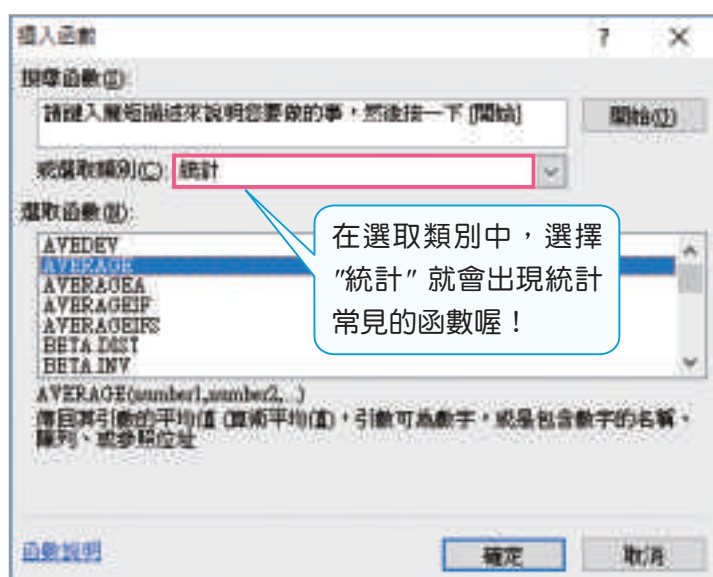
② 移至儲存格 B3，輸入公式=MEDIAN (B1:P1)

③ 移至儲存格 B4，輸入公式=MODE (B1:P1)

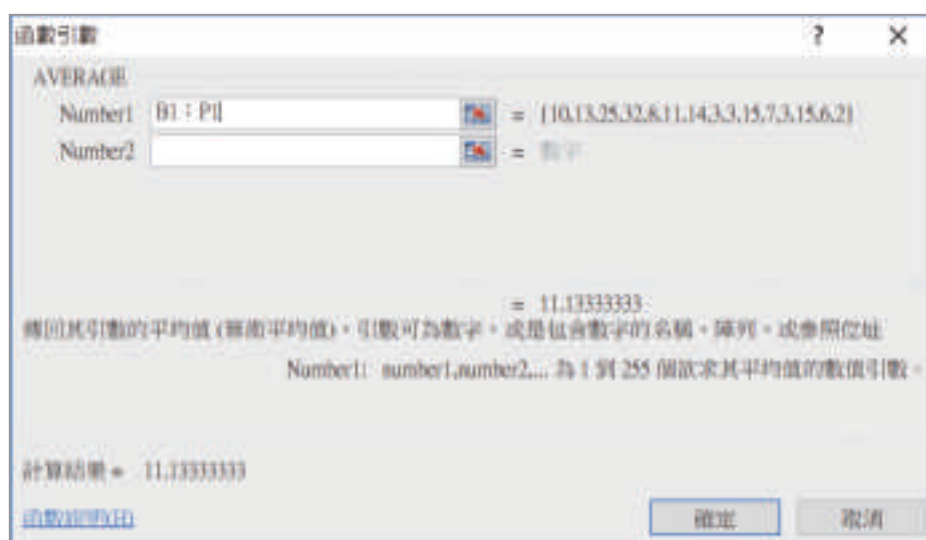
AVERAGE 即平均數；
MEDIAN 即中位數；
MODE 即眾數。

方法二：插入函數

在公式列按下  圖示，啟動「插入函數」，選取需要的函數。例如：計算平均數，則選取"AVERAGE"，如下圖。



接著再選取(或輸入)資料範圍，按下確定，



也可以得到平均數。

同樣的方法，選取 "MEDIAN"、"MODE" 也可以求出中位數及眾數。



重點回顧

1 平均數

將所有數據資料的總和除以總次數，稱為平均數（或算術平均數）。

例 50、52、54、56、58 的平均數為 $\frac{50+52+54+56+58}{5} = 54$ 。

2 中位數

(1) 中位數是一組由小到大排列的資料中，最中間位置的數值。

(2) 中位數的求法如下：將 n 筆資料由小到大依序排列，

① 若 n 是奇數，則中位數是「第 $\frac{n+1}{2}$ 筆資料」。

例 將 7 筆資料 1、3、5、7、9、11、13 由小到大排列，
其中位數為「第 4 筆資料」，即為 7。

② 若 n 是偶數，則中位數是「第 $\frac{n}{2}$ 筆與第 $(\frac{n}{2}+1)$ 筆資料的平均」。

例 將 8 筆資料 2、4、6、8、10、12、14、16 由小到大排列，
其中位數為「第 4 筆與第 5 筆資料的平均」，即 $\frac{8+10}{2} = 9$ 。

3 眾數

一組資料中，出現次數最多的資料，稱為這組資料的眾數。

例 有一組資料 30、32、32、32、34、36、38，
出現最多次的是 32，則其眾數為 32。

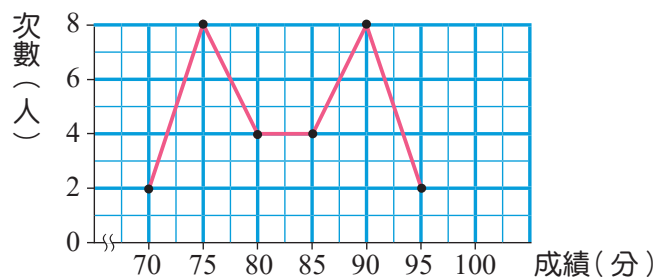


5-2 自我評量

- ① 有 15 個人的體重(單位：公斤)分別如下：56、67、86、45、46、60、45、72、52、58、56、45、63、50、60，回答下列問題：

- (1) 這 15 個人體重的平均數是多少公斤？ 課 P201 例 1
 (2) 這 15 個人體重的中位數是多少公斤？ 課 P210 例 4
 (3) 這 15 個人體重的眾數是多少公斤？ 課 P213 例 7

- ② 右圖是小克班上同學某次生活科技測驗分數折線圖，根據圖中的數據，計算該班生活科技平均分數是多少分？ 課 P202 例 2



- ③ 右表是雅慧班上同學國文成績的次數分配表，回答下列問題：



- (1) 該班同學國文成績的平均數是多少分？

課 P205 隨堂

- (2) 該班同學國文成績的中位數在哪一組？

課 P212 隨堂

成績(分)	次數(人)
40~50	5
50~60	8
60~70	9
70~80	12
80~90	7
90~100	9
合計	50

- ④ 甲班第一次段考數學成績平均 82 分，乙班段考平均 85 分，已知甲班有 30 人，乙班有 35 人，求兩班的平均分數。(可利用計算機計算，四捨五入至小數點後第 2 位)

課 P207 例 3

- ⑤ 早晨的公園裡有 8 人正在活動，他們的年齡(單位：歲)分別如下：4、65、11、47、6、62、45、60，回答下列問題：
- (1) 這些人年齡的中位數是幾歲？
- (2) 若後來又來了 1 人，而他們年齡的中位數沒有改變，則此人是幾歲？

課 P211 例 5



自我挑戰

本單元為統整課程，由學生自行挑戰，
教師可視班級情況決定如何運用。

某籃球隊共有 16 名隊員，每人投籃 6 次。若下表為此籃球隊進球數的次數分配表，已知投進球數的中位數是 3 球，且 a 與 b 相差 2，回答下列問題：

進球數(球)	0	1	2	3	4	5	6
次數(人)	2	2	a	b	3	2	1

(1) 此籃球隊的眾數是多少球？

解

(2) 此籃球隊平均進球數是多少球？

解



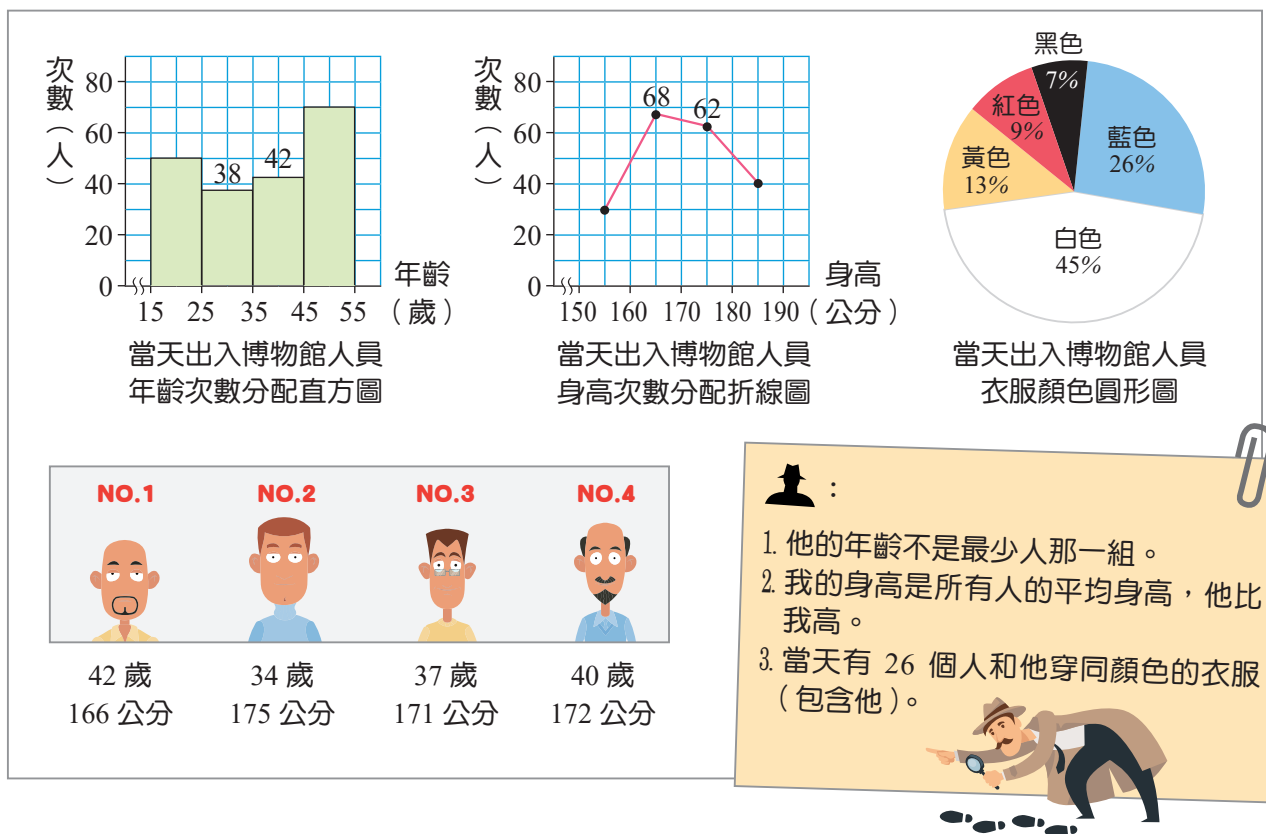


趣學數學

本單元為配合此章所設計的趣味問題，由學生自行練習，教師可視班級情況而自行決定如何運用。

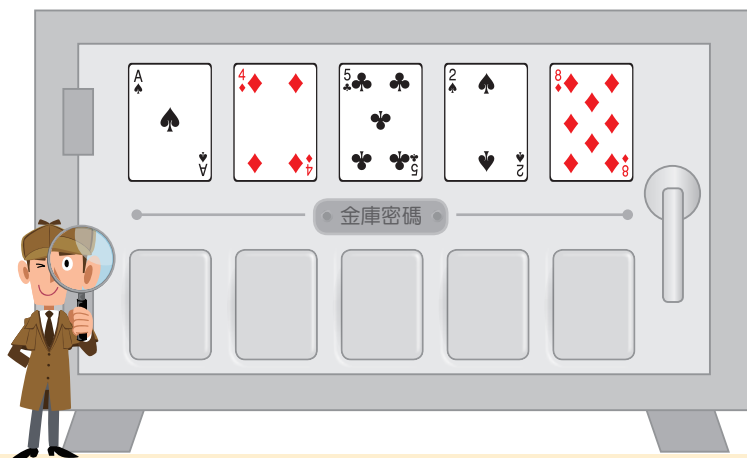
1 配合 5-1、5-2

博物館的名畫失竊了，警方根據監視器，統計當天 200 名出入博物館的人員特徵，繪製統計圖如下，並鎖定四名嫌疑犯。此時來了一位秘密證人，依據秘密證人的證詞，小偷會是誰呢？



2 配合 5-2

金庫密碼解碼任務，抽出五張撲克牌，順序如圖，4 為 1，先求出這五張牌的中位數，並重新排列，數字越接近中位數的撲克牌排在越前面，排出的 5 位數即為金庫密碼！





違反直覺的統計

統計有助於我們了解大量資料的特性，但也有可能產生誤解。例如：甲、乙兩所國中學生參加國中教育會考，數學成績達到 A (精熟) 等級的百分比如下表：

	人數(人)		達 A 百分比	達 A 人數(人)
甲校	男	400	20%	80
	女	100	40%	40
乙校	男	100	10%	10
	女	400	30%	120

哪一間學校達 A 等級的百分比比較高呢？



甲校男、女生達 A 等級百分比都高於乙校，那麼甲校達 A 等級的比例應該也會高於乙校！

不是這樣判斷的，你被騙了啦！



實際上是

$$\begin{aligned}
 \text{甲校} &: (400 \times 20\% + 100 \times 40\%) \div 500 \\
 &= (400 \times 0.2 + 100 \times 0.4) \div 500 \\
 &= 120 \div 500 \\
 &= 0.24 \\
 &= 24\%
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{乙校} &: (100 \times 10\% + 400 \times 30\%) \div 500 \\
 &= (100 \times 0.1 + 400 \times 0.3) \div 500 \\
 &= 130 \div 500 \\
 &= 0.26 \\
 &= 26\%
 \end{aligned}$$

所以乙校的達 A 等級的百分比高於甲校。

這種與直覺不同的結論，稱為辛普森悖論 (Simpson's Paradox)，是英國統計學家辛普森 (E.H. Simpson) 在 1951 年所提出。由這個例子，我們在瀏覽報章雜誌中的統計資料時，要格外注意，以免遭到誤導。



自我挑戰解答

第 1 章 P48

- (1) $64 - 50 = 14$ ，可得阿輝將 14 個龍形公仔換成虎形公仔，
 已知 1 個龍形公仔可以和 2 個虎形公仔互換，
 所以 14 個龍形公仔可以換成 28 個虎形公仔，
 又阿輝原有 56 個虎形公仔，所以 $56 + 28 = 84$ (個)。

答：84 個。

- (2) 假設龍形公仔 x 個，虎形公仔 y 個。

依題意可列出聯立方程式
$$\begin{cases} x + y = 120 & \text{..... ①} \\ 2x + y = 150 & \text{..... ②} \end{cases}$$

②式－①式可得 $x = 30$

將 $x = 30$ 代入①式可得 $30 + y = 120$ ， $y = 90$

答：龍形公仔 30 個，
 虎形公仔 90 個。

第 2 章 P92

- (1) Q 區的範圍包含臺南市、高雄市、屏東縣和臺東縣，
 所以圖一的位置在屏東縣的可能性最高，故選(D)。

答：(D)。

- (2) 由乙(250, 2650)往下移動 $50 \times 3 = 150$ (公里)，
 即可到達丙(250, 2500)。

答：丙(250, 2500)。

第 3 章 P134

- (1) 設臺幣 40000 元可以換
- x
- 韓元。

$$x : 40000 = 1 : 0.02997$$

$$0.02997x = 40000$$

$$x = 1334668.00133 \cdots \approx 1334668$$

答：1334668 韓元。

- (2) 設臺幣 50000 元可以換
- x
- 美元。

$$x : 50000 = 1 : 29.732$$

$$29.732x = 50000$$

$$x = 1681.6897 \cdots = 1681 + 0.6897 \cdots$$

故臺幣 50000 元可換成 1681 美元。

$$50000 - 1681 \times 29.732 = 20.508 \approx 21$$

答：1681 美元，

不足部分可找回 21 元臺幣。

第 4 章 P174

- (1) 由每人分 20 顆，還剩 80 顆可知，巧克力共有
- $(20x + 80)$
- 顆，

$$\text{所以每包巧克力有 } \frac{20x + 80}{5} = 4x + 16 \text{ (顆)}。$$

答： $(4x + 16)$ 顆。

- (2) 同學每人分 14 顆卻不夠，表示
- $3(4x + 16) < 14x$
- 。

$$3(4x + 16) < 14x$$

$$12x + 48 < 14x$$

$$x > 24$$

所以至少有 25 人。

答：25 人。

- (3) 同學有 1 人拿 7 顆(以上)，其他人拿 14 顆，

$$\text{表示 } 3(4x + 16) \geq 14(x - 1) + 7。$$

$$3(4x + 16) \geq 14(x - 1) + 7$$

$$12x + 48 \geq 14x - 14 + 7$$

$$55 \geq 2x$$

$$x \leq \frac{55}{2} = 27.5$$

所以至多有 27 人。

答：27 人。

第 5 章 P221

(1) 因籃球隊共 16 名隊員，

所以 $2+2+a+b+3+2+1=16$ ， $a+b=6$ 。

又 a 與 b 相差 2，可得 $a=4$ 、 $b=2$ 或 $a=2$ 、 $b=4$ ，

且由題意可知中位數為第 8 筆資料與第 9 筆資料的平均為 3 球。

① 若 $a=4$ 、 $b=2$ ，

則第 8 筆資料為 2，第 9 筆資料為 3，

中位數為 $\frac{2+3}{2}=2.5$ （球），不合題意。

② 若 $a=2$ 、 $b=4$ ，

則第 8 筆資料為 3，第 9 筆資料為 3，

中位數為 $\frac{3+3}{2}=3$ （球）。

由①、②可知 $a=2$ 、 $b=4$ ，

因此眾數為 3 球。

答：3 球。

$$\begin{aligned} (2) & \frac{(0 \times 2 + 1 \times 2 + 2 \times 2 + 3 \times 4 + 4 \times 3 + 5 \times 2 + 6 \times 1)}{16} \\ &= \frac{46}{16} \\ &= 2.875 \end{aligned}$$

答：2.875 球。



第 1 章 P49

1

2	-4	7
3	-5	3
2	-11	-5
3	2	-4

2 由菜單可知：

 = 10 元

 = 20 元

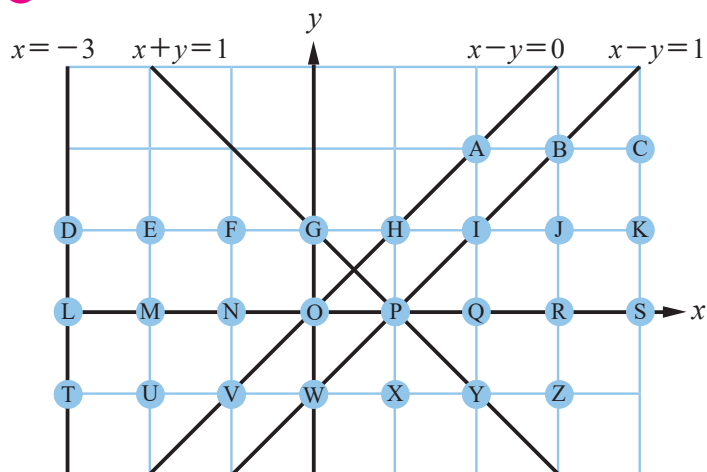
 = 15 元
所以 4 號餐為 $10 + 20 + 15 = 45$ (元)。

第 2 章 P93

1

	乙 C (4, 2)			丙 B (3, 2)	
甲 M (-2, 0)	O (0, 0)	N (-1, 0)	K (4, 1)	E (-2, 1)	Y (2, -1)
	W (0, -1)			A (2, 2)	
				R (3, 0)	

2 (1)

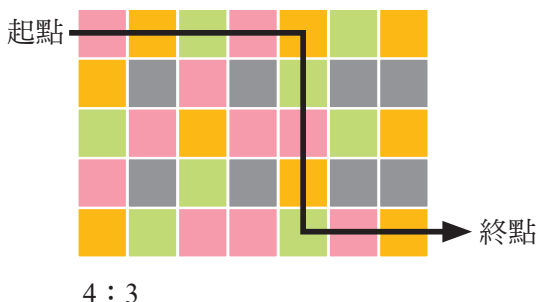
(2) A、B、D、G、H、I、L、O、P、T、
V、W、Y

(3) 【參考答案】

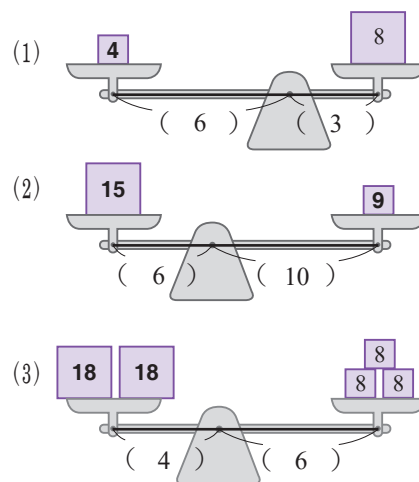
DOG：狗， $(-3, 1)(0, 0)(0, 1)$ 。BOY：男孩， $(3, 2)(0, 0)(2, -1)$ 。PIG：豬， $(1, 0)(2, 1)(0, 1)$ 。

第 3 章 P135

1

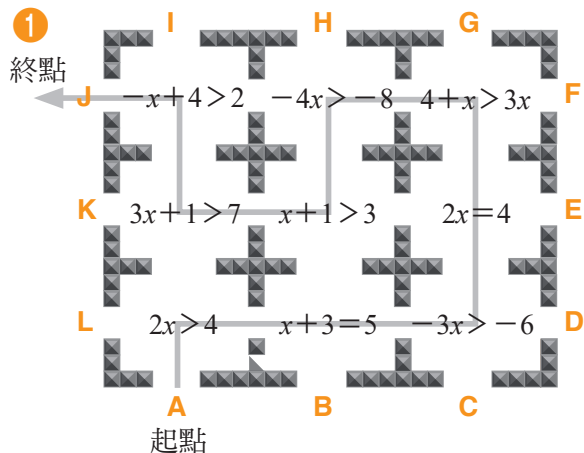


2



第 4 章 P175

1



2

根據①知，一杯咖啡 > 50 (元)，
並且由②可推得，一塊蛋糕 < 75 (元)，
最後根據③知，一個魔術方塊 > 35 (元)，
所以一個魔術方塊至少 36 元。

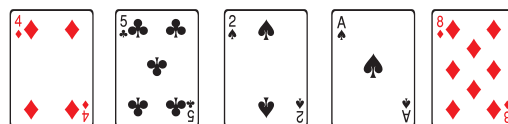
第 5 章 P222

1

- (1) 人數最少的年齡是 25~35 歲這一組，
所以由證詞 1，刪除 NO.2。
(2) 平均身高為 $(155 \times 30 + 165 \times 68 + 175 \times 62 + 185 \times 40) \div 200 = 170.6$ (公分)，
所以由證詞 2，刪除 NO.1。
(3) $\frac{26}{200} \times 100\% = 13\%$ ，由證詞 3 知，
小偷是穿黃色衣服。
由以上證詞知，NO.3 是小偷。

2

將五張撲克牌根據數字由小到大排列為 A (代表 1)、2、4、5、8，所以中位數為 4。
數字越接近 4 的撲克牌排越前面，所以金庫密碼為





1. 常用機型介紹

傳統型計算機



運算規則：依照輸入的先後順序

科學型計算機



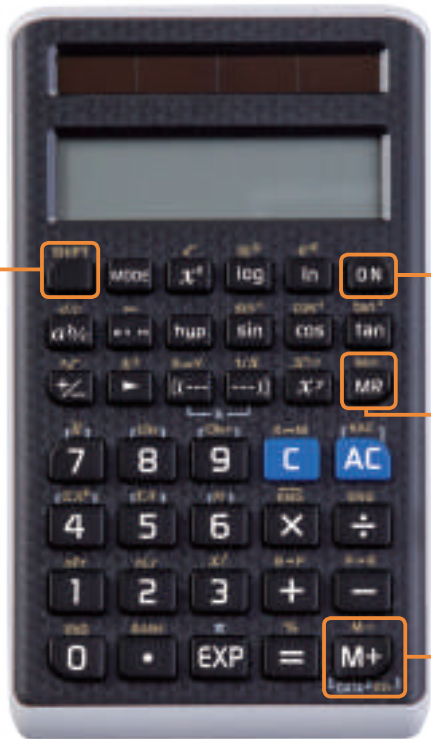
運算規則：依照四則運算的規則

手機



2. 計算機按鍵介紹

以下皆以本教材使用的計算機機型介紹按鍵與按法。



SHIFT 鍵

按下此鍵可開啟電源，若要進行新的計算問題，也可按下此鍵歸零與清除記憶。

記憶喚起鍵

記憶加法鍵

3. 計算機按法介紹

計算機除了 +、-、×、÷ 外，還有 $M+$ 、 MR 等按鍵，M 是 Memorize（記憶）、R 是 Recall（叫出）、 MR 就是將記憶中的數字叫出來，而 $M+$ 是累加（記憶加法）， $M-$ 是累減（記憶減法）的意思。

計算每一道題目前，要先按 ON ，可消除先前的記憶。

記憶加法（ $M+$ ）

Table with 4 columns: 算式, 按法, 螢幕顯示, 搭配課本. Row 1: 3.2 x 4.6 + 1.4 x 5.1, steps for calculation, display 21.86, P204.

記憶減法（ $M-$ ）

本教材使用的計算機若需 $M-$ 功能，需先按 $SHIFT$ ，再按 $M+$ 。

Table with 4 columns: 算式, 按法, 螢幕顯示, 搭配課本. Row 1: 5 x 3 - 8 x 6, steps for calculation, display -33.

4. 實作練習

利用計算機計算下列算式：

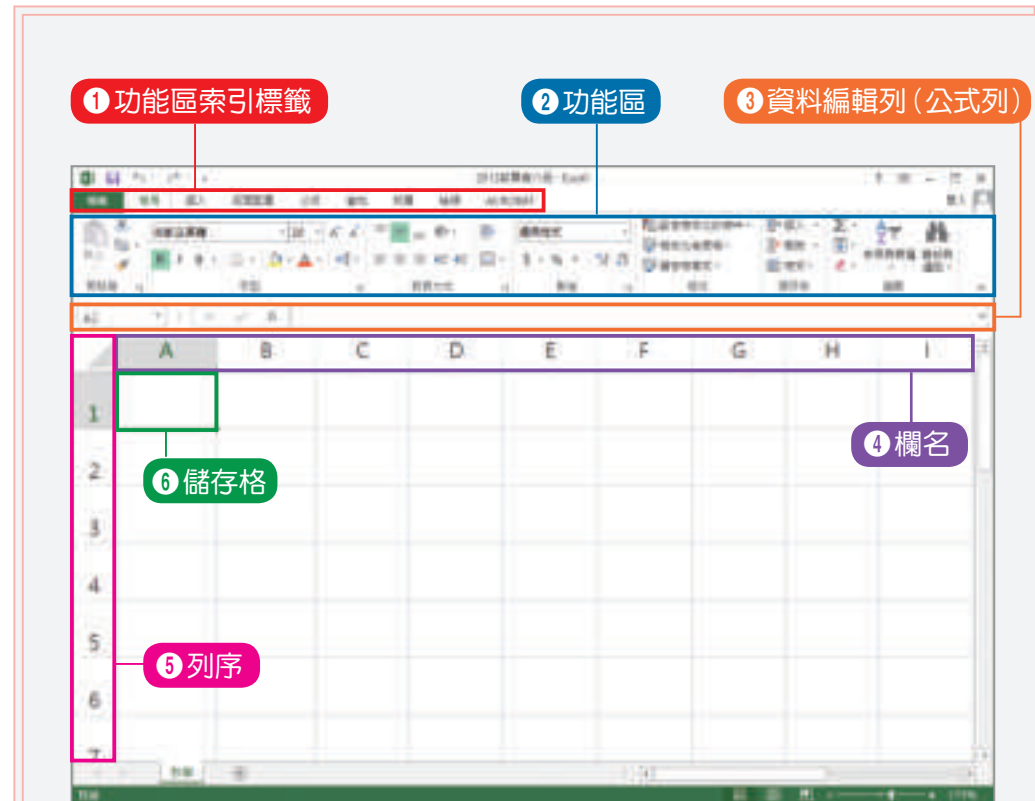
記憶加法 2.4 x 5 + 1.6 x 3

記憶減法 0.7 x 6 - 5.1 x 2

綜合運算 (23 - 7) + (91 ÷ 4) - (21 x 3)



一、介面說明：



1 功能區索引標籤

每個索引標籤都具有不同的功能群組，用滑鼠按下索引標籤，會顯示對應的功能區。

2 功能區

顯示常用的功能鍵。

3 資料編輯列 (公式列)

顯示選取儲存格的資料內容，可在此進行編輯。

4 欄名

顯示儲存格所在的欄位。

5 列序

顯示儲存格所在的列號。

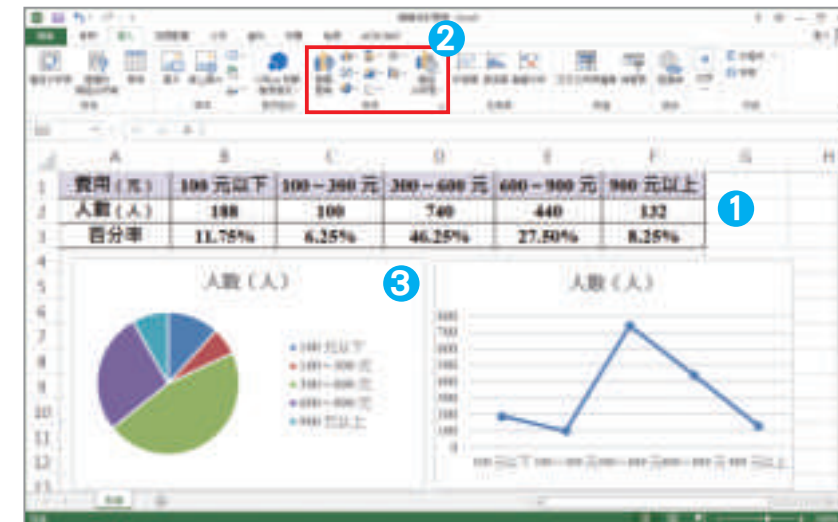
6 儲存格

放置資料的格子，用滑鼠在格子上點兩下，可在此編輯資料。



Let's GO

二、繪製統計圖表



步驟

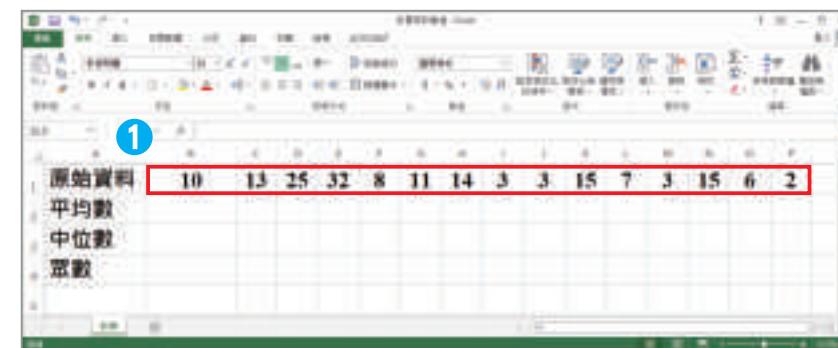
- 1 輸入資料建置表格，再選取資料。
- 2 在 **插入** 功能區的 **圖表** 中，選取所需的統計圖選項。
- 3 完成統計圖的繪製。

NOTE



各種統計圖都有許多不同類型的圖形可依個人需求使用。

三、計算統計數值



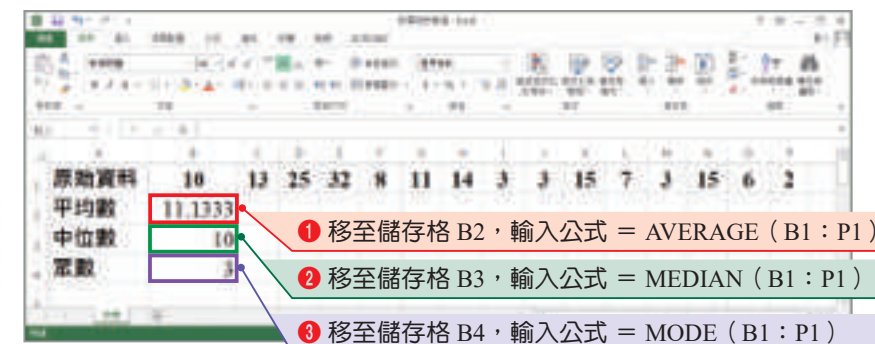
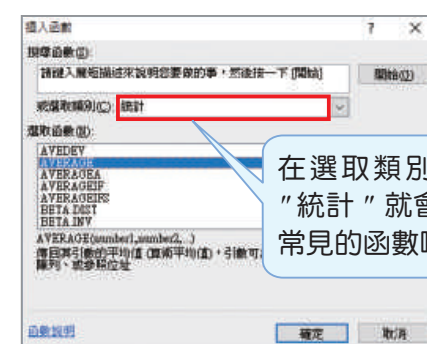
步驟

- 1 將原始資料輸入表格中。
- 2 使用 **方法 1** 或 **方法 2** 算出統計數值。

NOTE

函數是針對連續的儲存格來簡化輸入，例如：
輸入 `=AVERAGE(B1:P1)`
可計算儲存格 B1 至 P1 數值的平均。
其中
B1：起始儲存格
P1：結束儲存格

2 方法 1 直接輸入函數

方法 2 按下公式列的 **f_x**，插入函數

在選取類別中，選擇“統計”就會出現統計常見的函數喔！